وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

جامعـة عبد الحميد ابن باديس مستغانم

كلية العلوم الدقيقة و الأعلام الألي

قسم الرياضيات و الأعلام الألي

Compétition en Mathématiques Mars 2023

****

- Les copies doivent être bien rédigées.
- Tout résultat doit être justifié.
- Les copies doivent être remises le Dimanche 12 mars 2023 avant 12h au secrétariat du département de mathématiques.

****

Exercice N°1:

Soit G un semi groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. On suppose que $G \neq \{0\}$.

Soit $\alpha = inf\{x > 0,\ x \in G\}$.

1. Montrer que $\alpha \in G$.
2. Montrer que $(\alpha > 0) \Longrightarrow (G = \alpha.\mathbb{Z})$.
3. Montrer que si $\alpha = 0$ alors $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$; $a < b\ on\ a :\ ]a, b[\cap G \neq \emptyset$

Exercice N°2 :

1. Etudier la nature de la série :
$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}.$$
2. Pour toute suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$, on définit la différence finie de u_n, notée Δu_n, par : $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. Vérifier que :
$$\Delta(u_n v_n) = u_{n+1}\Delta v_n + v_n \Delta u_n.$$
3. Déduire la somme de la série S.

Exercice N°3 :

Soient f une fonction analytique dans un domaine $G \subset \mathbb{C}$ et $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} :\ |z| \leq 1\} \subset G$.

Démontrer l'égalité

$$\iint_D \frac{f(z)}{2 - \bar{z}} dxdy = \pi \int_0^{1/2} f(x)dx\ .$$