جامعة عبد الحميد بن باديس–مستغانم–
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم التجارية

دليل مختصر في مادة أساسيات بحوث العمليات

مقدم لطلبة السنة الثانية ليسانس

دروس و تمارين محلولة

من إعداد الأستاذة : حجار آسية أستاذة محاضرة أ

السنة الجامعية :2024–2025

فهرس المحتويات

مقدمة

إن عملية اتخاذ القرارات هي عملية ملازمة للإنسان منذ أول نشأته، حيث كان عليه أن يقرر كيف يعيش وأين يعيش، وكيف يحمي نفسه. كما أنه كان بحاجة إلى اتخاذ قرار بشأن أية مشكلة تواجهه في حياته. لقد كان الأفراد يتخذون قراراتهم معتمدين على قدراتهم و خبراتهم و ظروفهم الشخصية، و البيئة التي يعيشون فيها والتي تشكل بحد ذاتها تعقيداً لهذه العملية إضافة إلى الصعوبة المتمثلة بعدم توافر أسس علمية ثابتة و متعارف عليها لهذه العملية. إلا أنه و نتيجة لازدياد حجم المشاكل التي تواجه الإنسان وتداخلها وتقسيم العمل وتعدد الإدارات والأقسام، وكذلك تنوع المنتجات والسلع الذي أدى إلى تعقيد الأعمال وظهور كثير من المشكلات الإدارية والإنتاجية، كان لا بد من البحث عن أساليب أكثر ملاءمة وفعالية لمواجهة هذه المشكلات.

تتناول هذه المطبوعة البيداغوجية الموسومة ب ***دليل مختصر في مادة أساسيات بحوث العمليات*** دليل يوجه الطلبة خاصة طلبة الليسانس سنة ثانية في معرفة وفهم مبسط للبرمجة الخطية وكذا التمثيل البياني والطريقة المبسطة سمبلكس لحل مختلف المسائل الاقتصادية بطريقة بسيطة مزودة بتمارين محلولة حول كل نمط لإزالة الإشكال والغموض عن الطلبة والخوف من عدم فهم واكتساب محتوى المادة : أساسيات بحوث العمليات .

يعتبر هذا الدليل تلخيص مبسط لأهم النقاط في المادة لتكون عونا للطلبة حيث تم تقسيمها إلى المحاور التالية:

- المحور الأول : مدخل لبحوث العمليات .
- المحور الثاني البرمجة الخطية.
- المحور الثالث: طرق حل نماذج البرمجة الخطية.
- المحور الرابع : تمارين محلولة.

المحور الأول:

مدخل لبحوث العمليات

1. تعريف بحوث العمليات

يطلق اسم بحوث العمليات على مجموعة الأساليب العلمية المستخدمة في تحليل المشكلات والبحث عن الحلول المثلى ، أو بتعبير آخر بحوث العمليات هي مصطلح أطلق على مجموعة البحوث والدراسات التي تساعدنا على اتخاذ قرار علمي ومدروس للقيام بعمل ما على أفضل وجه وضمن الإمكانات المتاحة.

تعد بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرزت تطبيقاتها نجاحاً واسعاً في مختلف مجالات الحياة. إن الخاصية التي يتميز بها هذا العلم هو إعداد نموذج علمي و عملي لنظام معين يتضمن تحديد العوامل المؤثرة و التنبؤ و مقارنة النتائج لمساعدة الإدارة في قياس دقة النظام المستخدم و من ثم اتخاذ القرارات المناسبة و السليمة.

لا يوجد تعريف موحد لبحوث العمليات، فهناك من يعرفها :

تعريف Kimball و Morse :طريقة علمية لإمداد الإدارة التنفيذية بأساس كمي للقرارات الخاصة بالعمليات تحت رقابتهم الاقتصاد (علم تجريبي : تجربة، فرضية، نظرية)

تعريف د. موفق محمد الكبيسي :عبارة عن مجموعة من الطرق والوسائل التي تساعد في عملية اتخاذ القرارات في مجالات متنوعة بصدد تحقيق الاستخدام الأفضل للموارد المتاحة.

وقد ***عرفها بعض العلماء*** على أنها مجموعة من الطرق المستخدمة في إعداد المعلومات بشكل يعطي للإدارة الفرصة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب .

– أما ***جمعية بحوث العمليات ببريطانيا*** : فقد عرفته على أنها تطبيق الطرق العلمية على المشاكل المعقدة التي تنشأ عند توجيه وإدارة النظم الكبيرة من الأفراد، المعدات، المواد والأموال. وبمقتضى هذا النموذج يمكن التنبؤ ومقارنة عوائد مختلف القرارات والاستراتيجيات البديلة وذلك بهدف مساعدة الإدارة في تحديد سياساتها وإجراءاتها بأسلوب علمي.

نلاحظ مما سبق أن تعريف بحوث العمليات يركز على النواحي الأساسية الآتية:

- أن بحوث العمليات تستخدم الطريقة العلمية كأساس و منهج في البحث والدراسة.
- أن جوهر بحوث العمليات هو بناء نموذج و الاعتماد عليه.
- إن الهدف من بحوث العمليات هو مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات المتعلقة بالمشكلات الإدارية الصعبة و المعقدة.

2. التطور التاريخي لبحوث العمليات:

يمكن تقسيم مراحل تطور بحوث العمليات إلى ثلاث مراحل

- وهي ***المرحلة الأولى مرحلة ما قبل الحرب العالمية الثانية*** تعود جذور بحوث العمليات إلى عام 1885م من ركز ***فريديك تايلور (F.Taylor)*** على تطبيق التحليل العلمي على الأنشطة الإنتاجية، من خلال قيامه بتجارب عديدة للتوصل إلى الحمولة الملائمة من مادة معينة ليتمكن العامل من جرف أكبر كمية ممكنة منها باستخدام الجرافة وبأقل ما يمكن من الجهد، وبعد قيامه بسلسلة من التجارب استطاع تايلور التوصل إلى مبتغاه

ساهم العالم ***هنري جانت (Henry L.Gantt)*** أيضا في وضع اللبنات الأولى لهذا العلم، إذ توصل إلى أسلوب علمي الجدولة العمل من خلال خارطة عرفت باسمه وهي خارطة جانت التخطيط أساليب تحميل المكائن من اجل تقليل أية تأخيرات يمكن أن تحدث في العملية الإنتاجية، وعلى إثره يتم تحديد وقت تسليم المنتج بشكل دقيق

وفي عام 1915م وضع ***هاريس (FW.Harris)*** نموذجا يمثل حجم الكمية الاقتصادية المعروفة في مجال السيطرة على المخزون في حين نشر عالم الرياضيات الدانمركي **ارلينج ..Erlang)**في عام 1917 م مؤلفه حول المشاكل المتعلقة بكثرة المكالمات الهاتفية إذ لم تستطع العاملات في البدالات من استلام كل المكالمات فور طلب الخدمة في فترات الذروة، مما أدى إلى حدوث تأخيرات في تلبيتها، وفي هذا الصدد، يمكن القول بأنه قد تم الاعتماد على مؤلف ايرلينج بعد عدة سنوات من قبل مكاتب البريد البريطانية من خلال الاستفادة من ملاحظاته لتقديم أفضل الخدمات البريدية إلى الزبائن وفي الثلاثينات من القرن المنصرم، تم تطبيق التحليل السلمي من قبل العالم الفلكي **ليفنسن** (H.C.Levinson) ، إذ ركز جهوده على دراسة علمية للعادات الشرائية وسلوك المستهلكين ومدى استجابتهم لأساليب الترويج المختلفة مثل الإعلان وقد أثرت الثورة الصناعية بشكل كبير على تطور بحوث العمليات إذ اتسمت الفترة السابقة لتلك الثورة بصغر حجم المنظمات ، كما و أن أداء الأعمال اتسم بكونه يدويا، وطور العمل بعد ذلك من خلال إحلال الآلة محل العمل اليدوي، فضلا عن التطورات في مجالات النقل والمواصلات، مما أدى إلى صعوبة قيام المدير بمختلف

الوظائف الإدارية بمفرده من التخطيط للإنتاج المبيعات والشراء ... الخ، وعليه كان لا بد من إيجاد تقسيم الوظائف الإدارية متمثلا بوظائف الإنتاج التسويق المالية الأفراد والبحث والتطوير .... الخ، ومع التطور الصناعي دعت الحاجة إلى تجزئة الوظائف الرئيسية المشار إليها إلى فروع أخرى، فمثلا تم تقسيم قسم الإنتاج إلى فروع أمثال الصيانة السيطرة على الجودة، تخطيط الإنتاج .... الخ.

- **المرحلة الثانية خلال الحرب العالمية الثانية** تواصل تطور علم بحوث العمليات أثناء الحرب العالمية الثانية من خلال استدعاء الإدارة العسكرية في بريطانيا لفريق عمل من العلماء من اجل دراسة المشاكل الإستراتيجية والتكتيكية للدفاع الجوي، تحت إشراف البروفيسور باتريك بلاكت(Patrick Blackett ، من جامعة مانشستر تكون فريق العمل من 11 عضوا، ثلاثة علماء منهم متخصصون في علم وظائف الأعضاء، واثنان في علم الرياضيات الفيزيائية، وعالم واحد في مجال الفيزياء العامة واثنان في مجال الرياضيات البحتة .هدف الفريق إلى إيجاد أفضل توزيع للموارد العسكرية المحدودة على مختلف العمليات العسكرية، ومن ثم تطبيق بحوث العمليات للاستخدام الفاعل للرادارات وتوزيع القوة الجوية، وكان هذا الفريق هو الأول في مجال بحوث العمليات لقد جاءت تسمية بحوث العمليات استنادا إلى مهمة الفريق القائمة على البحث في العمليات والمجالات العسكرية . توصل الفريق إلى نتائج مشجعة، مما أدى إلى تشكيل فرق أخرى في كل من بريطانيا، الولايات المتحدة الأمريكية كندا وفرنسا.

- **المرحلة الثالثة ما بعد الحرب العالمية الثانية:** لقد أ ىتت النتائج التي توصل إليها أثناء الحرب العالمية الثانية إلى تشجيع المدراء الصناعيين الباحثين عن الحلول للمشاكل التي كانت تواجههم للاهتمام بهذا العلم، ففي بريطانيا وبعد انتهاء الحرب العالمية الثانية انتقل استخدام بحوث العمليات من المجال العسكري إلى مجالات أخرى كالصناعة ، علم الاجتماع، والاقتصاد إذ كان الاقتصاد البريطاني يواجه حالة ركود اقتصادي حاد، مما تطلب البحث عن أساليب جديدة لزيادة فاعلية الإنتاج وإيجاد أسواق جديدة

بينما كان الوضع مختلفا في الولايات المتحدة الأمريكية إذ تم التركيز على بحوث العمليات الدفاعية، ولم يؤشر له دور كبير في المجال الصناعي، ولكن تزايد الاهتمام بعلم بحوث العمليات خلال الثورة الصناعية الثانية على اثر أتمتة العمليات الإنتاجية واستبدال العامل بالماكنة، وفي الخمسينات من القرن الماضي وجه الاهتمام العلم بحوث العمليات في الجامعات الأمريكية إذ شكلت جمعية متخصصة في مجال بحوث العمليات عام 1950م وهكذا استمر تطور هذا العلم تدريجيا، من خلال الاستفادة من علم الحاسوب في حل المشكلات المتعددة التي تواجه المنظمات والمتعلقة بموضوعات خاصة ببحوث العمليات مثل البرمجة الخطية ، نظرية القرارات ، شجرة القرارات ، التنبؤ ، نماذج النقل ، مشاكل التخصيص التحليل الشبكي ، نماذج المخزون، تحليل ماركوف، صفوف الانتظار، نظرية المباريات والمحاكاة .... وغيرها للتوصل إلى القرار الأمثل.

3. أهداف بحوث العمليات:

تهدف بحوث العمليات للوصول إلى الحل الأمثل، و هذا يعني أن الحل المتوصل إليه هو أفضل الحلول ولا يوجد بديل آخر يعطي نتائج أفضل ، كما تهدف بحوث العمليات لتحقيق الأمثلية و ليس فقط تحسين الوضع الحالي و هذا يعني أنه في ظروف المسألة موضوع الدراسة يكون الهدف المطلوب تحقيقه هو أفضل و أمثل الحالات المتاحة لبدائل الحل.

إن استخدام أساليب و نماذج بحوث العمليات يستدعي معرفة في مجالات عديدة كما يعني أن المدخل الملائم لعلاج المسائل باستخدام بحوث العمليات يستدعي تشكيل فريق عمل لدراسة المسألة و حلها.

و يوفر علم بحوث العمليات فائدة كبيرة لصانعي القرار ، أهمها:

- طرح البدائل لحل مشكلة معينة، وذلك لاتخاذ القرار المناسب اعتمادا على العوامل و الظروف المتوفرة.
- إعطاء صورة عن تأثير العالم الخارجي على الإستراتيجية المتبعة في تنفيذ خطة ما حيث تؤثر الظروف الخارجية على نتيجة الاستراتيجيات التي تتخذها الإدارة
- صياغة الأهداف والنتائج، ومدى تأثر هذه الأهداف بكافة العوامل و المتغيرات، و سهولة معالجة الروابط بين هذه المتغيرات رياضيا للوصول إلى كمية رقمية يسهل تحليلها

وتعتمد بحوث العمليات على المنهج العلمي ابتداء من بناء النموذج إلى حله فاختباره فتطبيقه، كون أن التحضير لاتخاذ القرار في المؤسسات بمساعدة بحوث العمليات يتطلب المرور بمجموعة من المراحل منها ما يلي:

- ✓ تحديد المشكلة وتحليلها إلى عناصرها الأولية (تعريف المسألة).
- ✓ بناء النموذج الرياضي المناسب الذي يتماشى مع طبيعة المشكلة.
- ✓ اختبار مدى صحة النموذج
- ✓ إيجاد حل للنموذج
- ✓ اختبار مدى مناسبة الحل.
- ✓ تنفيذ خطة الحل المتوصل إليها .

و هي خطوات منهجية لا بد من المرور عبرها لحل أي مشكل علمي في الإدارة الاقتصادية للموارد.

4. مجالات استخدام بحوث العمليات في المؤسسات:

فيما يلي بعض المجالات التي استخدمت بحوث العمليات في المؤسسة :

-**التخطيط العام** : و شمل التخطيط للمشروعات و تنظيم هيكل المؤسسة وتخطيط السياسات الأفضل لها ووضع البرامج الممكنة لتطوير إمكانيات و موارد المؤسسة.

- **الإنتاج:** و يتطرق إلى توزيع الموارد و سلسلة الإنتاج، لتحقيق أقصى قدر ممكن من الإنتاجية و ترشيد النفقات للحصول على أقل التكاليف، والرقابة على الجودة على أساس التوازن بين الجودة المطلوبة و التكلفة المتضمنة.

- **التسويق:** و هذا بتحديد ميزانية التسويق وتوزيعها بين البيع الشخصي و الإعلان و ترويج المبيعات، ففي المبيعات الشخصية دراسة عدد رجال البيع و عدد الز بائن لكل رجل بيع و عدد مرات زيارة الزبون، وبالنسبة للإعلان دراسة إمكانية الوصول إلى الحل الأفضل للوسائل الإعلامية و تأثيره على المبيعات.

- **المنتجات الجديدة:** واستخدمت في مشاكل المنتجات الجديدة سواء كان من ناحية الاختيار أو التوقيت أو التنبؤ بالطلب.

- **التوزيع:** ساعدت بحوث العمليات في تحديد حجم و مكان المخازن الخاصة بالمنتجات و مراكز التوزيع و البيع وكيفية تقليل تكاليف نقل السلع من نقطة إلى نقطة.

- **الإدارة المالية :** استخدمت بحوث العمليات لتحليل التدفق النقدي ومتطلبات الاستثمارات و موارد رأسمال و سياسات توزيع الأرباح و قدمت نماذج رياضية في سياسات البيع بالأجل و مشاكل الحساب الغير مدفوعة.

- **الموارد البشرية:** قدمت دراسات على مجموعات السن والمهارات من ناحية الأداء الأفضل، و كذلك في مجالات التوظيف وتوزيع الأفراد على العمل وتقييم الحوافز لضمان الأداء الأفضل
- **المشتريات:** كما استعملت بحوث العمليات لتحديد سياسات الشراء من ناحية الوقت والكمية و كذلك في حالات اختلاف الأسعار وتغييرها و خصومات الكمية.

إن بحوث العمليات تؤثر بنماذجها وأنظمتها على اتخاذ القرارات، فعلى المسير أن يقوم بالتصرف المناسب طبقا للمعلومات الجديدة و على المسير تحديد مدى تناسب النماذج مع مشاكلهم، و مراقبتها للتأكد من أنها ما زالت معبرة عن واقع المشكلة و طبيعتها.

المحور الثاني:

البرمجة الخطية

1. تعريف البرمجة الخطية:

هي أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من المواد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثانية بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي أن يكون توزيعها مثاليا.

إن تعبير البرمجة يعني وضع خطوات لحل مسألة أو موضوع لبلوغ وتحقيق هدف معين.

أما تعبير خطية فيعني افتراض تغيير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع الى صياغة رياضية سهلة.

و الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول الى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات و المتباينا ت بالإضافة إلى دالة الصدق).

2. فرضيات استخدام البرمجة الخطية .

تعتمد نماذج البرمجة الخطية على مجموعة من الفرضيات, حيث ذكرنا فيما سبق أنه عند استخدام البرمجة الخطية في مجال الأعمال فإننا ننظر إليها باعتبارها أسلوبا رياضيا لتوزيع أو استخدام موارد محدودة على عدد من الاستخدامات البديلة ,بالطريقة التي تحقق أفضل استخدام ممكن لها ممثلا في شكل هدف محدود , هذا ما يبين لنا أن البرمجة الخطية تستند إلى مجموعة من الأفكار الرئيسية و التي تعتبر أساسا لتفهم التقنية , نلخصها في

فكرتين هما فكرة النشاط(Activity) , و فكرة البدائل (Alternatives) , و يقصد بفكرة النشاط في مجال الأعمال تلك الطريقة التي يمكن أن يتم الإنتاج بها , بينما يقصد بفكرة البدائل في هذا الصدد تلك الوسائل المختلفة التي يمكن أن تؤدي كل منها إلى تحقيق الهدف المحدد, و في هذه الحالة تقوم البرمجة الخطية في أساسها النظري على خمسة افتراضات رئيسية علمية , الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية يمكن تلخيصها كما يلي :

- فرضية التأكد التام (Certainty):

تعبر هذه الفرضية عن توفر عنصر التأكد , أي إن كافة عناصر المشكلة محدودة ومؤكدة , يمكن القول إذا أن تقنية البرمجة الخطية تقتصر في تطبيقها على تلك المشاكل التي تتضمن اتخاذ القرار في ظل التأكد التام, فالشخص القائم بتعريف المشكلة لا تواجهه عملية التنبؤ أو التخمين حيث أنه يفترض العلم التام بالظروف و العلاقات التي سوف تسود في المستقبل, هذا ما يتنافى مع حالة عدم التأكد الذي يميز الحياة العملية ,و منه يجب أن تكون الأرقام الموجودة في دالة الهدف (مساهمات العوامل) و المحددات أو القيود (احتياجات العوامل و المصادر المتوفرة) معروفة وثابتة و غير قابلة للتغيير أثناء فترة معالجة المشكلة موضوع البحث .

- التناسبية (Proportionatity):

و يعني ذلك أن كل نشاط قد يعتبر مستقلا عن الآخر , ذلك أن معيار الإنجاز هو حاصل جمع المساهمات العوامل المختلفة , كذلك فإن الكميات التي يتم استخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع احتياجات العوامل المختلفة من كل من هذه الموارد.

فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة من منتج معين , فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا المنتج, و هذا الافتراض هو أساس افتراض الإضافية .

- الإضافية (Additivity):

ويعني هذا الافتراض أنه لا يوجد تداخل بين الفعاليات أو الأنشطة المختلفة , وبناء على ذلك فإن هذا الإفتراض يتضمن ما معناه أنه لو أخذنا مستويات أو جوانب النشاط (X1,X2,……..Xn) , فإن الاستعمال الكلي و لكل مصدر و كذلك معيار الإنجاز الكلي الناتج عن هذه الأنشطة , يساوي مجموع الكميات المتولدة أو الناجمة عن كل النشاطات الفردية, و بشكل مستقل , فإذا كنا ننتج أربعة منتجات و كان الربح الناجم عن بيع وحدة واحدة من كل من هذه المنتجات هو : 10،20،25، 30 وحدات نقدية على التوالي , فإن إجمالي الربح الناجم عن إنتاج و بيع ثلاث وحدات من كل منتج هو 3(10+20+25+30) = 255 وحدات نقدية.

- **قابلية القسمة أو الكسرية (Divisibility or Fractionality)**

و المقصود هنا أن الحل لمشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة , و هذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار , و إذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى إستخدام البرمجة بالأعداد الصحيحة أو الرقمية Integer Programming .

- **اللاسلبية (Non–negativity) :**

وهذا يعني أن قيم عوامل أو متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة , غير سالبة فالقيم السالبة للكميات المادية حالة مستحيلة , فعلى سبيل المثال لا نستطيع إنتاج عدد سالب من الكراسي أو القمصان أو ....

خلاصة القول أنه توجد خمسة فرضيات أساسية يقوم عليها نموذج البرمجة الخطية في الحياة العملية , لذلك أجريت الدراسات للتخفيض من حدة الفروض , سوف نتناولها عند التطرق إلى الانتقادات والصعوبات تطبيق نموذج البرمجة الخطية .

3. متطلبات تطبيق أو استخدام البرمجة الخطية:

تتطلب مشكلة البرمجة الخطية خمس خصائص أساسية هي :

- **تحديد الهدف :** أي ما تسعى لتحقيقه و هو إما زيادة الأرباح أو تقليل التكلفة، معبر عنه بصيغة رياضية يطلق عليها حالة الهدف وتضاع دالة الهدف بالشكل التالي :

- **حالة التعظيم :** $Max\ (z) = 2x + 3y$
- **حالة تدنئة:** $Min\ (z) = 2x + 3y$

- **توفير عدد من البدائل:**

تستخدم البرمجة الخطية عندما تكون لدينا بدائل لحل المشكلة فإذا كان هناك بديل واحد لحل المشكلة أذا لا داعي لاستخدام البرمجة الخطية.

- **محدودية الموارد:**

نحتاج لاستخدام البرمجة الخطية عندما تكون الموارد محددة (نادرة) كالموارد البشرية، المواد، ساعات اشتغال الآلات، وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف، فإذا كان لدينا 300 ساعة في القسم الأول وكنا نحتاج لساعتين (02) لإنتاج المنتوج الأول وثلاثة (03) ساعات لإنتاج المنتوج التالي فيعبر عن المشكل كالاتي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 300$$

- **وجود علاقة خطية:**

الخطية في البرمجة يجب أن تتوفر في دالة الهدف وفي القيود (الموارد)، بحيث أن أي تغير في كميات الإنتاج يؤدي الى زيادة الأرباح أو تقليل التكاليف بشكل خطي (طردي) مع زيادة كمية الإنتاج، وكذلك الموارد .... بشكل خطي مع زيادة كمية الإنتاج.

- **القيود غير السالبة:**

أن هذا الشرط يلبي إحدى فرضيات البرمجة الخطية وهو شرط عدم السلبية، وكذلك لا تمكن أن يكون أحد القيود ينتج متغيرات سالبة كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq -300$$

4. مجالات استخدام البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية الى إيجاد أفضلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا، ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية هي مجالات العلوم الاقتصادية، المالية، التجارية وعلوم التسيير كما يلي:

- **<u>في حالة التعظيم:</u>**
- تعظيم الأرباح – تعظيم الإنتاج – طاقات التخزين،
- تعظيم استخدام رؤوس الأموال – تعظيم استخدام اليد العاملة
- **<u>في حالة التدنية:</u>**
- تدنية التكاليف – الخسائر – عدد الموظفين – الأجور الإجمالية.

للبرمجة الخطية تطبيقات عديدة لحل الكثير من مشكلات عالم الأعمال منها:

- التطبيقات التسويقية – التطبيقات المالية – التطبيقات إدارة الإنتاج – مشاكل المزج – مشاكل تخطيط المشروعات.

5. صياغة أو بناء النموذج الرياضي:

البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي حديث يستخدم كأداة لإيجاد **(أفضل استعمال)** للموارد المحددة للمنشأة وكلمة **البرمجة** تعني استعمال الأسلوب لإيجاد البرامج المختلفة لاستعمال الموارد المحددة لدى المنشأة في ظل عدد من القيود. أما **الخطية** فتعني أن العلاقة بين متغيرات المشكلة هي علاقة خطية.

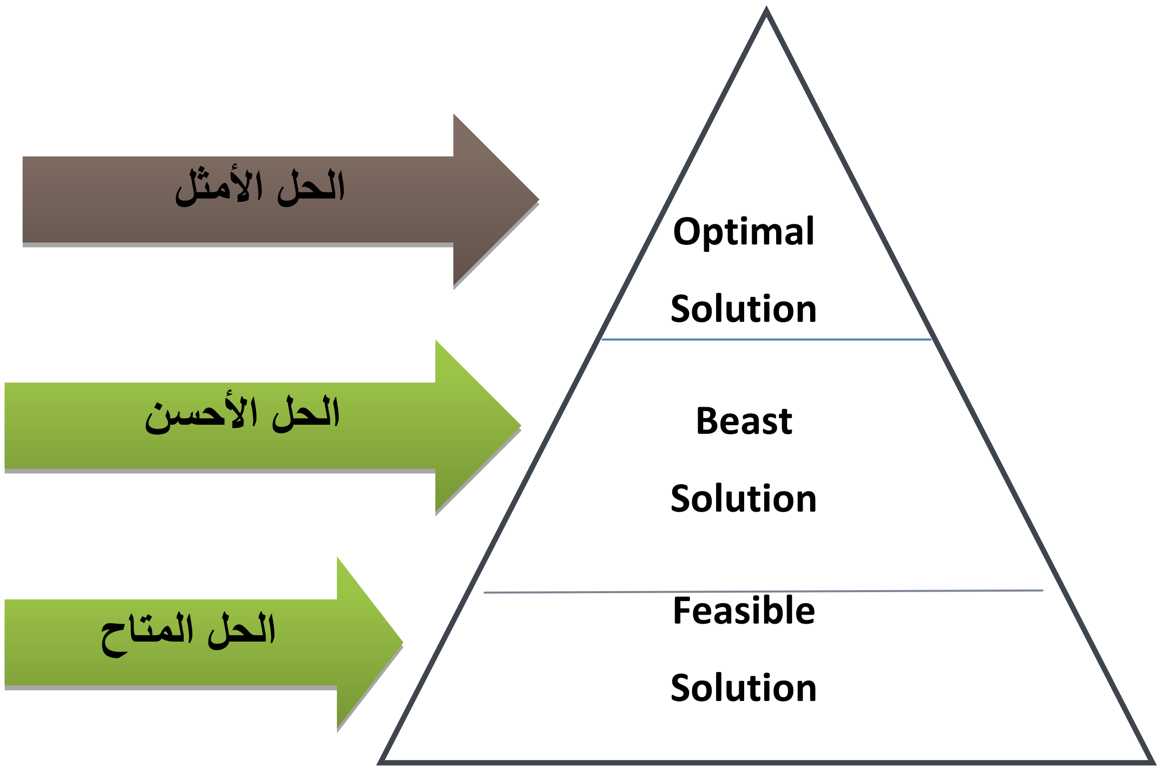
عند حل النموذج يكون هنالك دائما السعي لإيجاد الحل الأمثل لأنه توجد عدة أنواع من الحلول للمشكلة وهي :

1- الحل المتاح (Feasible Solution): وهو الحل الذي يمكن الوصول إليه في أي مجموعة من المعادلات .

2- الحل الحسن (Beast Solution) : هو الحل الذي يمكن الحصول عليه بعد إيجاد الحل في الحالة الأولى وهو يحقق كافة القيود .

3-الحل الأمثل (Optimal Solution) : وهو الحل الذي يمكن الوصول إليه بعد إيجاد الحل الأفضل الذي يحقق كافة القيود. وكما موضح في الشكل التالي:

الشكل رقم (1):أنواع حلول المشكلة



حتى نتمكن من وضع برنامج خطي للمعطيات الاقتصادية أو الإدارية أو وضع صيغة رياضية لمسألة البرمجة الخطية، فإنه يجب توفر مجموعة من المتغيرات لها علاقة مباشرة بقيمة الهدف المراد تحقيقه ويحددها السؤال الذي نريد الإجابة عليه عند حل المسألة، وبصفة عامة فإن مسائل البرمجة الخطية تتكون من : مجموعة من المتغيرات، مجموعة معادلات أو متراجحات خطية وتسمى بالقيود، وكذا دالة تسمى بدالة الهدف .مع توفر شرط عدم السلبية .

ومنه فإن صياغة مشكلة إدارية معينة بشكل مسألة برمجة خطية تقتضي تطوير نموذج رياضي يمثل الحالة أو المشكلة الإدارية من خلال الخطوات التالية:

- **<u>الفهم الكامل والتدقيق للمشكلة الإدارية التي يوجهها المدير</u>**:

-تشخيص دالة الهدف والقيود المحددة.

-تحديد متغيرات القرار.

-استخدام متغيرات القرار في كتابة العبارات الرياضية لكل من دالة الهدف والقيود.

4-1- صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

من أجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توفر ثلاث مجموعات من العناصر الأساسي:

- **تحديد الهدف بصورة كمية:**

ويعبر عنه بدالة الهدف وهي عبارة عن دالة المطلوب تغطيتها أو تدنيتها وهي عادة ما تكون في صورة نقدية أو طبيعية، ويتوقف ذلك على طبيعة المشكلة المطلوب تحليلها، ويجب أن يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كمياَ، كأن يكون الهدف تحقيق أكبر ما يمكن من مربح أو تامين أصغر ما يمكن من التكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت والجهد.

- **تحديد القيود:**

يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة، كما يجب أن تكون تلك الموارد قابلة للقياس ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو معدلات، أو الخليط منها.

- **شرط عدم السلبية:**

إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة.

ويمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالأتي :

Max (z) or / Min (z) =$\sum_{j=1}^{1} c_j\ x_j$

$$\sum_{i=1}^{min}\sum_{j=1}^{1} a_{ij}\, x_j\ (\leq = \geq) b_1 (i = 1, 2, \ldots \ldots . . m)$$

$$x_j\ \geq 0 \qquad\qquad\qquad (\ j = 1, 2, \ldots \ldots . . n)$$

إذ أن : $b_c c_j\, a_{ij}$ ثوابت تحدد من سياق المشكلة.

z= تمثل دالة الهدف

X_j= المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بحقها.

b_i= تمثل الموارد المحددة .

a_{ij} = كمية الموارد المحددة من النوع i و اللازم تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

C_j= تمثل الربح أو الكلفة نتيجة تخصيص المورد i لإنتاج وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

مثال:

تنتج إحدى الشركات نوعين من السلع: نوع A ونوع B، تصنع كل سلعة على ثلاث مراحل، كل مرحلة في أحد الأقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فإذا كان تصنيع السلعة A يحتاج إلى ساعتين (02) عمل في القسم الأول و ساعة (01) عمل في القسم التالي وأربع (04) ساعات عمل في القسم الثالث.

ويحتاج تصنيع السلعة B الى ساعتين (02) عمل في كل قسم، كما أن عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي 160 سا عمل أسبوعيا وفي القسم الثاني 120 سا عمل أسبوعيا و في القسم الثالث 280 سا عمل أسبوعيا.

إذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو 2 دينار ومن السلعة Bهو 3 دينار.

1. **المطلوب:** نموذج البرمجة الخطية لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين، إذا كان هدف الشركة هو الحصول على أكبر ربح ممكن.

1. **الحل:**

السلعة	**الوقت اللازم للتصنيع**			**ربح الوحدة بالدينار**
	القسم 3	**القسم 2**	**القسم 1**	
A	2	1	4	2
B	2	2	2	3
ساعات العمل المتاحة	160	120	280	

2. **تكوين النموذج:**

- **تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية:**

نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو X_1

نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعةB هو X_2.

- **تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات:**

القيود هنا هي الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم.

3. القسم الأول: $2X_1 + 2X_2 \leq 160$

4. القسم الثاني: $X_1 + 2X_2 \leq 120$

5. القسم الثالث: $4X_1 + 2X_2 \leq 280$

- تحديد دالة الهدف:

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

تهدف إلى إنتاج كميات مثلى منx_2 , x_1 التي تجعل دالة الهدف أكثر ما يمكن.

البرنامج الخطي:

$$Max\ (z) = 2x1 + 3x2$$

s/c

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 \leq 160 \\ X_1 + 2\ X_2 \leq 120 \\ X_1 + 2X_2 \leq 280\ 4 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$$

المحور الثالث:

طرق حل نماذج البرمجة الخطية

بعد صياغة المشكلة على شكل نموذج رياضي فأن المرحلة التالية في محاولة الحصول على حل للمشكلة من النموذج الممثل لها حيث يعرف الحل انه مجموعة قيم المتغيرات المسيطر عليها والتي تؤدي إلى فعالية أفضل للنظام وفقا للظروف والقيود الموضوعة على المشكلة في بعض الأحيان لا يمكن الحصول على حل المشكلة من النموذج الممثل لها حيث يعرف الحل أنه مجموعة قيم المتغيرات المسيطر عليها والتي تؤدي إلى فعالية أفضل للنظام وفقا للظروف. والقيود الموضوعة على المشكلة. وفي بعض الأحيان لا يمكن الحصول على الحل بالطرق الرياضية الحتمية وهي التي سيتحصل منها تحت ظروف مؤكدة وفي مثل هذه الحالات يستخرج الحل بالطرق الاحتمالية أو بطرق المحاكاة

وهناك طريقتان أساسيتان لحل نماذج البرمجة الخطية :

-الطريقة البيانية

-الطريقة المبسطة simplex

1. الطريقة البيانية:

-تصلح هذه الطريقة لحل مشاكل البرمجة الخطية والتي تحتوي على متغيرين اثنين فقط من خلال الاعتماد على الأسلوب البياني .

-تستخدم هذه الطريقة إذا كانت المتغيرات مفيدة أو غير مقيدة بالإشارة

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفؤة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

الخطوات:

-تحول القيود من المتراجحات إلى معادلات

- إيجاد نقاط التقاطع لكل معادلة حيث نعوض بأحد المتغيرات في المعادلة الواحدة بقيمة صفر الاستخراج قيمة المتغير الثاني، ثم تكرر ذلك بالنسبة للمتغير الآخر، وبذلك تصبح لدينا نقطتين لكل معادلة (مستقيم) وبوساطة هاتين النقطتين يمكن رسم المستقيم الذي تمثله المعادلة

- رسم المستقيمات و إيجاد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة التي تحقق فيها متغيرات القرار جميع القيود في أن واحد).

- تحديد نقاط الأركان المنطقة الحلول الممكنة (إيجاد إحداثيات هذه النقاط).

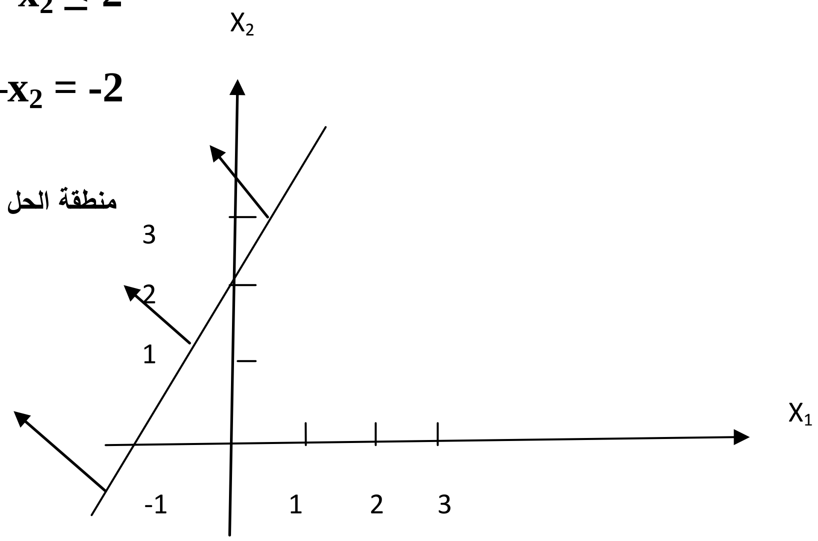
- التعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف واختيار النقطة التي تجعل دالة الهدف أكبر ما يمكن تكون هي التي تمثل الحل الأمثل إذا كانت دالة الهدف من نوع التعظيم Max والعكس بالعكس أي أن النقطة التي تجعل دالة الهدف اقل ما يمكن في حالة كون دالة الهدف من النوع المتدني Min هي التي تمثل الحل الأمثل.

مثال:

$$\mathbf{2x_1 - x_2 \leq -2}$$

$$\mathbf{2x_1 - x_2 = -2}$$

x_1	x_2
0	2
-1	0



2. طريقة التمثيل البياني في حالة عدم وجود حل:

مثال :

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

Min (ʒ) = $20x_1 + 15x_2$

S/C

$$\begin{cases} 5X_1 + 10X_2 \leq 25 \\ 5X_1 + 10X_2 \leq 25 \\ 5X_1 + 10X_2 \leq 50 \end{cases}$$

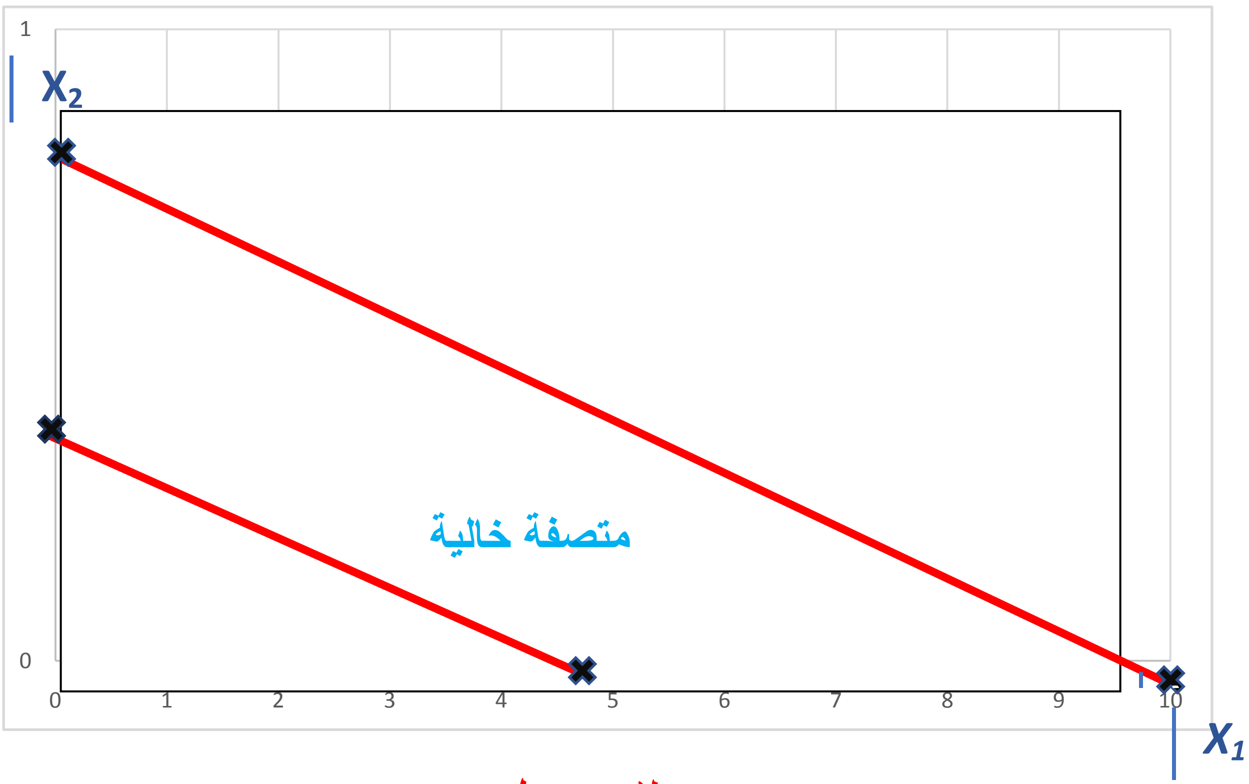
$5X_1 + 10X_2 = 25$

$5X_1 + 10X_2 = 50$

$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$

بالتعويض:

المستوى	2	المعادلة	1	المعادلة
	X_1	X_2	X_1	X_2
	0	2.5	0	5
	5	0	10	0



لا يوجد حل

3. طريقة السمبلكس :

1) **تحديد المتغير الداخل:**يدخل الأساس المتغير الذي يقابل أكبر قيمة موجة في الخط Cj – FJ إذا كان الهدف Max، وأصغر قيمة في خط Cj – FJ إذا كان الهدف Min (بمعنى في دالة الهدف).

تحديد معيار الخروج: هو المتغير الذي يغادر الأساس:

يجب قسمة رقم XBعلى القيم الموجودة في العمود المقابل المتغير الداخل Xj نضع هذه القيم المتحصل عليها في عمود جديدة.

المتغير الخارج هو المتغير الأساسي الذي يقابل أصغر قيمة في الاطار X.

2) **تحديد العنصر المحوري Pivot:**

هو تقاطع العمود المقابل للعنصر الداخل مع الخط المقابل للعنصر الخارج.

3) **كتابة الجدول الجديد القواعد:**

1. قسمة الخط المحوري على العنصر المحوري للحصول على القيمة 1 مصفوفة الوحدة.
2. المتغيرات الأساسية يجب أن تحتفظ على أحادية الأعمدة.
3. بقية العناصر تحسب حسب القانون.

المحوريالعموديفيلهالمقابلالعنصرال[illegible]فيالمقابلالعنصر

العنصر الجديد = العنصر القديم −

1. الحل: X1هو المتغير الداخل لأنه يقع فوق أكبر رقم يقابله سالب.

المتغير الخارجي: أقل ناتج يحدد العنصر الخارج S3

S_3المتغير الخارج.

العدد المحوري : هو 2.

مثال :

Max $(z)= 50\ x_1+20\ x_2$

s/c

$$\begin{cases} x_1 +4x_2 \leq 400 \\ 3x_1+6x_2 \leq 250 \\ 2x_1 \qquad \leq 100 \end{cases}$$

$x_1,x_2 \geq 0$

- **تصفير دالة الهدف:**

Max $(z) -50\ x_1-20\ x_2=0$

s/c

$x_1 +4x_2+ S_1= 400$

$3x_1+6x2+S_2=250$

$2x_1 \qquad +S_3=100$

$x_1,x_2 \geq 0$

- **تحديد المتغيرات في الجدول :**

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	φ
Z	-50	-20	0	0	0	0
S_1	1	4	1	0	0	400
S_2	3	6	0	1	0	250
S_3	2	0	0	0	1	100

$\frac{400}{1} = 400$

$\frac{250}{3} = 83.33$

$\frac{100}{2} = 50$

العدد المحوري (2) +

لإيجاد الحل يجب إيجاد رقم الصفوف: من خلال:

1) تحديد الصف المحوري: القيمة المحور 2

الصف المحوري: $1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{2} \ 50$

العدد المقابل للصف المحوري

إيجاد قيم Z

$Z - (- 50) (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{2} \ 50)$

قاعدة ثابتة السالب

$$
\begin{array}{rl}
 & 5\,0 \ 0 \ 0\,0 \ 2\,5 \ 2\,5\,0\,0 \\
+ & -5\,0 \ -20\,0 \ 0\,0 \ 0 \\
\hline
 & 0 \ -20\,0\,0 \ 2\,5 \ 2\,5 \ 0 \ 0
\end{array}
$$

$S_1 - (1) (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{2} \ 50)$

$$
\begin{array}{l}
- 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{1}{2} \ -50 \\
+ 1 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 400 \\
\hline
\mathbf{1.} \ 4 \ 1 \ 0 \ -\frac{1}{2} \ 350
\end{array}
$$

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	φ
Z	0	-20	0	0	25	2500
S_1	0	4	1	0	-1/2	350
S_2	0	6	0	1	-3/2	100
X_1	1	0	0	0	1/2	50

$S_2 - 3\,(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ 50)$

$-3\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -\frac{3}{2}\ \ -150$

$+\ \ 3\ \ 6\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 250$

$0\ \ 6\ \ 0\ \ 1\ \ -\frac{3}{2}\ \ 100$

ليس الحل الأمثل:

Pivot : 06

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	φ	
Z	0	-20	0	0	25	2500	
S_1	0	4	1	0	-1/2	350	87.5
S_2	0	6	0	1	-3/2	100	16.66
X_1	1	0	0	0	1/2	50	-

$Z=-(-20)\ (\,0\,1\,0\ \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\,\frac{50}{3}\,)$

$+0\ 2\ 0\ \ 0\ 0\ -\frac{20}{6}\ 5\ \frac{1000}{3}$

$+\ 0\ -20\ \ 1\ \ 0\ \ \frac{1}{6}\ -9\frac{50}{3}$

$0 1\ \ 0\ \ \frac{21}{6} - 14\ \frac{1050}{3}$

الصف المحوري: $\frac{0}{6}\ \frac{6}{6}\ \frac{0}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{-3/2}{6}\ \frac{100}{6}$

$0\ \ 1\ \ \ 0\,{}^{1}/_{6}\ {-}^{1}/_{4}\ \frac{50}{3}$

$S_1 - (4)\ (\ 0\ 1\ 0\ \ {}^{1}/_{6}\ {}^{-1}/_{4}\ \frac{50}{3}\ )$

$0\ \text{-}4\ \ 0\ \ {}^{-4}/_{6}\ 1 - \frac{200}{3}$

$+$

$0\ 4\ 1\ \ 0\ {}^{-1}/_{2}\ \ \ 350$

$0\ \ 0\ \ 1\ \ {}^{-4}/_{6}\ +1/2\ \frac{850}{3}$

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	φ
Z	0	1	0	21/6	-14	350
S_1	0	0	1	-4/6	1/2	850/3
X_2	0	1	0	1/6	-1/4	50/3
X_1	1	0	0	0	-1/2	50

$X_1(-0)\ (\ 0\ 1\ 0\ \ {}^{1}/_{6}\ {}^{-1}/_{4}\ \frac{50}{3}\ )$

$0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ 0\ 0$

$+\ \ \ 1\ 0\ 0\ \ 0\ 0\ {}^{-1}/_{2}\ 50$

$1\ \ \ 000\ \ 0\ {}^{-1}/_{2}\ \ 50$

الحل الأمثل هو

Max (z) =350

المحور الرابع:

تمارين محلولة

- **التمرين1:**

تتعهد إحدى الشركات بتقديم 100 كلغ من مادة غذائية تتكون من مزيج ثلاث مواد:C.B.A بشرط أن يحتوي هذا المزيج على:

- 0.00% على الأقل و ليس أكثر من 1.2 % من الكالسيوم
- 22 % بروتين على الأقل.
- 50 % ألياف في أكثر الحدود.

فإذا كانت محتويات المواد الثلاثة من العناصر الغذائية و كلفة كل منها كالاتي :

المواد	**الكمية الموجودة في كل كلغ**			**الكلفة / كلغ**
	كالسيوم	**بروتين**	**ألياف**	
A	**0.380**	–	–	**0.164**
B	**0.001**			**0.0463**
C	**0.002**	**0.50**	**0.08**	**0.1250**

- **المطلوب:**

صياغة الحالة في شكل برمجة خطية، بحيث يتم تلبية المتطلبات الغذائية وتدنية الكلفة الى أدنى حد ممكن.

- **الحل :**

القرار هنا هو تحديد المزيج الأمثل من المواد الثلاث.

نفترض أن كمية =Y_1A، وكمية $X_2 = B$ وكمية $X_3 = C$ ومنه البرنامج الخطي للمسألة كالتالي:

$$\text{Min }(z) = 0.0164\, x_1 + 0.0463\, x_2 + 0.1250\, x_3$$

C/S

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 100 \\ 0.380\, x_1 + 0.001\, x_2 + 0.002\, x_3 \leq 0.012 \\ 0.0380\, x_1 + 0.001\, X_2 + 0.002\, x_3 \geq 0.0008 \\ 0.09\, X_2 + 0.50\, x_3 \geq 0.22 \\ 0.02\, X_2 + 0.08\, X_3 \leq 0.50 \end{cases}$$

$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$; $X_3 \geq 0$.

- **التمرين 2:**

تقوم ورشة صناعية بتجميع 03 لعب (. $J_1J_2J_3$.)وبتوة الإنتاج في هذه الورشة كالتالي:

تجميع 40 لعبة في الساعة بالنسبة لJ_1، 50 لعبة الساعة بالنسبة J_2 و 25 لعبة في الساعة بالنسبة لJ، عملية التجميع تقوم بها آلة واحدة طاقتها العملية القصوى هي 300 ساعة / الشهر. تتوقع الورشة أن لا تتعدى المبيعات الكميات التالية:

5000 – 6000 – 3000 وحدة / شهر: J_1J_2 J_3 على التوالي، من جهة أخرى فإن اللعب المنتجة تخضع لمراقبة الجودة من طرف 4 تقنين،ك لتقني يعمل 120 ساعة /

شهر. كل عملية مراقبة تستغرق في المتوسط 06 دقائق، 04 دقائق و 02 دقيقتين لكل وحدة من . $J_1J_2J_3$ على التوالي.

الربح الذي تحصل عليه الورشة من بيع كل وحدة من . J_1J_2 J_3هو50 ون، 30 ون، 70 ون على التوالي.

- **المطلوب:**

كون النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح للورشة بتعظيم أرباحها في حدود الإمكانيات المتوفرة لديها.

الحل:

$J_1 = X_1$ / $J_2 = X_2$ / $J_3 = X_3$

$$Max\ (z) = 50\ X_1 + 30\ X_2 + 70\ X_3$$

S/C

$$\begin{cases} \frac{X1}{40} + \frac{X2}{50} + \frac{X3}{25} \leq 300 \\ 6X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 28800 \\ X_1 \leq 5000\ ,\ X_2 \leq 6000\ ,\ X_3 \leq 3000 \\ X_J \geq 0 \end{cases}$$

(60 ثا × 4 عمال× 120 سا) = 28800 دقائق.

- **التمرين 3:**

ترغب إحدى الشركات للطباعة في شراء نوعين من المطابع هما A و B، و النوع Aيشغل مساحة قدرها 40 م^2 وتبلغ كلفة الوحدة الواحدة 20000 دج وتحتاج إلى 03 عمال يعملون لمدة 08 ساعات، أما النوع B في شغل مساحة قدرها 60م^{2}وتبلغ كلفة الوحدة 6000 دج وتحتاج الى 04 عمال لمدة 08 ساعات.

فإذا كانت المساحة المتاحة لدى الشركة هي 720 م^{2}والميزانية المتاحة لشراء المطابع هي 6000 دج، علما أن لدى الشركة 48 عامل، وتمكن المطبعةA ان تعمل بمعدل 100 ورقات في الدقيقة،والمطبعة B يمكنها أن تعمل بمعدل 300 ورقة في الدقيقة.

- **المطلوب :**

كون النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح بتحديد العدد اللازم شراؤه من النوعين من المطابع A و B لكي تتمكن الشركة من تحقيق أكثر إنتاج.

- **الحل:**

X_1 = عدد المطابع المفترض شراؤها من قبل الشركة ومن النوع A.

X_2= عدد المطابع المفترض شراؤها من قبل الشركة ومن النوع B.

ومنه البرنامج الخطي يكون كالأتي:

$$\mathrm{Max}(z) = 48000X_1 + 144\,000X_2$$

S/C

$$\begin{cases} 40X_1 + 60X_2 \leq 720 \\ 2000X_1 + 6000X_2 \leq 60\,000 \\ 3X_1 + 4X_2 \leq 48 \end{cases}$$

$X1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0$

- **التمرين 04:**

ربة بيت تريد تحضير طبق أكل انطلاقا من اللحم و الخضر الطازجة، وهذا الطبق يلزم أن يحتوي على الأقل على: 3000 حريرة ،2000 غ بروتين، 0.5 غ كالسيوم، 15 ملغ حديد و 10 وحدات من فيتامين A ، كما لا يجب أن تتعدى عدد الحريرات في الطبق 6000 حريرة الخصائص الغذائية اللحم والخضر معطاة كمايلي :

	01 الوحدة وزنية من اللحم	01 وحدة وزنية من الخضر
الحريرات	3000 ح	2000 ح
البروتين	350 غ	100 غ
الكالسيوم	2.5 غ	0 غ
الحديد	10 ملغ	30 ملغ
فيتامينA	50 وحدة	4 وحدات

مع العلم أن ثمن شراء كل وحدة وزنية من اللحم 10 ون وثمن شراء كل وحدة وزنية من الخضر 2 ون .

- **المطلوب:**

كون النموذج الخطي الذي يسمح لربة البيت بتحقيق برنامجها الغذائي بأقل تكلفة شراء ممكنة.

- **الحل:**

البرنامج الذي يسمح لربة البيت بتحقيق برنامجها الذاتي بأقل تكلفة على النحو التالي:

$$\text{Min}\ (z) = 10x_1 + 2000x_2 \geq 3000$$

s/c

$$\begin{cases} 3000x_1 + 2000x_2 \leq 6000 \\ 350x_1 + 100x_2 \geq 200 \\ 2.5x_1 \geq 0.5 \\ 10x_1 + 30x_2 \geq 15 \\ 50x_1 + 4x_2 \geq 10 \end{cases}$$

$$X_j \geq 0$$

- **<u>التمرين 05:</u>**

يقدم أحد المطاعم لزبائنه طبق أكل يتكون من03 أنواع من الأسماك (P_1–P_2 –P_3)، يستطيع المطعم أن يقدم إما طبق أكل ثمنه يقدر ب 08 ون يحتوي على 5 وحدات من P_1،5 وحدات منP_2و 1 وحدة من P_3 آو تقدم طبق أكل ثمنه06 ون يحتوي على 03 وحدات من P_1 و 01 وحدة من P_2 و 3 وحدات من P_3.

الكميات القصوى من الأنواع الثلاثة من الأسماك التي يستطيع المطعم توفيرها هي :

P_1 30وحدة، $P_2$24 وحدة ، و 18 P_3 وحدة.

- **<u>المطلوب:</u>**

كوّن النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح للمطعم بتعظيم مبيعاته ف حدود الإمكانيات المتاحة لديه.

- **الحل:**

النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح للمطعم بتعظيم مبيعاته في حدود امكانيته هو على النحو التالي :

$$\text{Max}(z) = 08x_1 + 6x_2$$

$X_1 = 1$ الطبق

$X_2 = 2$ الطبق

S/C

$$\begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \leq 30 \\ 5x_1 + x_2 \leq 24 \\ X_1 + 3x_2 \leq 18 \end{cases}$$

$X_j \geq 0$

- **التمرين 06:**

تقوم شركة إنتاج الآليات الصناعية بإنتاج نوعين من المنتجات السيارات و الشاحنات ،عملية الإنتاج تتم في أربعة مصانع ذات سعة (طاقة إنتاج) ثابتة هي : مصنع تجميع المحركات ومصنع تجميع الهياكل.

الجدول التالي يعطي القدرة الإنتاجية المستعملة في انتاج سيارة وشاحنة واحدة في ك لمصنع في الساعة الواحدة.

المصنع	**القدرة الإنتاجية في الساعة**	
تجميع السيارات	**0.05**	**0**
تجميع المحركات	**0.02**	**0.033**
تجميع الهياكل	**0.033**	**0.025**
تجميع الشاحنات	**0**	**0.04**

تحصل الشركة على ربح مقداره 300 ون لكل سيارة و 250 ون لكل شاحنة، تريد الشركة أن تحدد كميات الإنتاج المثلي من السيارات والشاحنات التي تسمح لها بتعظيم أرباحها.

- **المطلوب:**

كوّن النموذج الخطي الخاص بنشاط الشركة.

- **الحل:**

النموذج الخطي الخاص بنشاط الشركة هو:

X_1 السيارة

X_2 الشاحنة

$$Max\ (z) = 300x_1\ 250x_2$$

S/C

$$\begin{cases} 0.05X_1 \leq 01 \\ 0.02X_1 + 0.03X_2 \leq 01 \\ 0.033X_1 + 0.025X_2 \leq 01 \\ 0.04X_2 \leq 01 \end{cases}$$

$$X_j \geq 0$$

- **التمرين رقم 07 :**

شركة مواد غذائية تقوم بإنتاج نوعين من المواد A–B يتطلب إنتاج النوعين ثلاثة أنواع من المواد الأوليةI ; II ; III وهذا بالكميات المبنية في الجدول التالي :

A	B	
3	**2**	**I**
2	**1**	**II**
1	**3**	**III**

إن مقدار ما يتوفر من مواد أولية هو 40 كلغ من النوع I يوميا، و 20 كلغ من النوع التالي IIيوميا و 30 كلغ من النوع الثالث IIIيوميا، هامش الربح للوحدة الواحدة من A هو 20 ون وهامش الربح للوحدة الواحدة من B هو 25 ون.

- **<u>المطلوب:</u>**

أكتب البرنامج الخطي للمسألة.

الحل:

نفرض أن X_1 تمثل عدد الوحدات المنتجة A

نفرض أن X_2 تمثل عدد الوحدات المنتجة B

يكون البرنامج الخطي على النحو التالي:

$$Max(z)=20X_1 + 25X_2$$

S/C

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 40 \\ X_1 + 2X_2 \leq 20 \\ 3X_1 + X_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

- **التمرين رقم 08:**

تشتري مزرعة مواشي مادتين غذائيتين مختلفتين، ثم تقوم بمزجهما لصنع علف المواشي، وتحتوي كل مادة على ثلاث مكونات من العناصر الغذائية الأساسيةA , B , C وبالمقادير التالية : 5غ من A، 4غ من B، 0.5غ من C للمادة الأولى، وتدفع 30ون لهما لكلغ من المادة الثانية، وأن كل وجبة تعدها المزرعة يجب أن تحتوي على الأقل على 90غ من A، 48غ من B، 1.5 غ من C.

- **المطلوب :**

أوجد تركيبة الوجبة من المادتين بحيث تحقق الشروط أعلاه وبأقل تكلفة.

- **الحل:**

نفرض أن X1 لكمية المادة الأولى

نفرض أن X2 لكمية المادة الثانية

يكون البرنامج كالاتي :

$$\text{Min } (z) = 20X_1 + 3X_2$$

S/C

$$\begin{cases} 5X_1 + 10X_2 \geq 90 \\ 4X1 + 3X2 \geq 48 \\ 05X_1 \geq 1.5 \end{cases}$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

-التمرين رقم 09:

ينتج مصنع صغير صنفين من الحقائب المدرسية ذات الحجم الكبير وذات الحجم الصغير ويحقق ربحا مقداره 35، 30 وحدة نقدية على التوالي، فإذا كانت كل حقيبة تخضع إلى مرحلتين لإنتاجها و هي التقطيع و الخياطة و الجدول التالي يبين الوقت الذي تستغرقه كل عملية بالدقائق حسب حجم الحقيبة و الوقت الكلي المتاح بالساعات لكل عملية من العمليات:

	الحجم الصغير	**الحجم الكبير**	**الوقت الكلي الميسر**
التقطيع	**6**	**3**	**3 ساعات**
الخياطة	**4**	**6**	**4 ساعات**

- **<u>المطلوب:</u>**

- أوجد البرنامج الخطي.

- **الحل:**

نفترض أن X_1 يمثل عدد الحقائب صغيرة الحجم

نفترض أن X_2 يمثل عدد الحقائب كبيرة الحجم

فالبرنامج الخطي يكون على الشكل التالي:

$$\text{Max}(z)=30X_1 + 35X_2$$

S/C

$$\begin{cases} 6X_1 + 3X_2 \leq 180 \\ 4X_1 + 6X_2 \leq 240 \end{cases}$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

- **التمرين رقم 10:**

ترغب إحدى المدارس في تنظيم رحلة ل 120 من تلاميذها إلى منطقة أثرية ولأجل ذلك تحتاج استئجار عدد من المركبات تحت إشراف 12 مدرسا وقد عثرت المدرسة على نوعين من السيارات:

- النوع الأول: تحمل 8 ركاب وتكلف 110 وحدة نقدية.
- النوع الثاني : تحمل 20 راكبا وتكلف 305 وحدة نقدية

- **<u>المطلوب:</u>**

أكتب البرنامج الخطي الذي يجعل التكلفة أقل ما يمكن.

- **الحل:**

نفرض أن X_1 هي السيارة ذات 8 ركاب

نفرض أن X_2 هي السيارة ذات 20 راكب

فالبرنامج يكون على النحو التالي :

$$Min\ (z) = 110X_1 + 305X_2$$

S/C

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 12 \\ 8X_1 + 20X_2 \leq 120 \end{cases}$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

- **التمرين رقم 11:**

يريد أحد منتجي المثلجات تحضير مادة أولية مركبة من أجل استعمالها في إنتاج المثلجات و المرطبات، هذه المادة يجب أن تحتوي على 30 كلغ من الدهون، 20 كلغ من السكريات، 2 كلغ من البروتين و 60 كلغ من الماء (1 كغ = 1 لتر).

من أجل تحضير هذه المادة المركبة، يقوم بشراء بعض المواد من السوق بالإضافة إلى استعمال الماء، قائمة المواد المشتراة، ونسبة المواد المركبة فيها وكذلك ثمن شراء هذه المواد معطاة في الجدول التالي:

	الماء	**مستخلص السكر**	**صفار البيض مجمد محلا**	**الحليب**	**صفار بيض طازج**	**القشدة**
الدهون	–	–	%15	%10	%20	40
السكريات	–	%65	%10	%4	%1	0.5
البروتين	–	–	%45	%20	%40	3
الماء	100	%30	%15	%60	10%	45
ثمن الشراء		0.6 ون	4 ون	3 ون	7 ون	5 ون

- **المطلوب :**

كون النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح لهذا المنتج من تحقيق برنامجه الإنتاجي بأقل تكلفة.

- **الحل:**

نفترض أن : X_1تمثل مادة القشدة

X_2مادة صفار بيض طازج

X_3مادة الحليب

X_4 صفار بيض مجمد محلى

X_5مستخلص السكر

X_6الماء

فيكون البرنامج الخطي على النحو التالي:

$$Min(z)= 5X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 4X_4+ 0.6X_5$$

S/C

$$\begin{cases} 0.4X_1 + 0.2X_2 + 0.1X_3 + 0.15X_4 = 30 \\ 0.005X_1 + 0.01X_2 + 0.04X_3 + 0.1X_4 + 0.65X_5 = 20 \\ 0.03X_1 + 0.4X_2 + 0.2X_3 + 0.45X_4 = 2 \end{cases}$$

$$0.45X_1 + 0.1X_2 + 0.6X_3 + 0.15X_4 + 0.3X_5 + X_6 = 60$$

$X_j \geq 0$

- **التمرين رقم 12:**

طلبت إحدى التعاونيات الفلاحية من أحد منتجي الأعلاف الحيوانية أن يزورها بعلف الأبقار، يحتوي القنطار الواحد منه على الأقل على 30 % من البروتين و 6 % من الدهون.

من أجل عملية طلب زبونها، تقوم المزرعة بشراء ثلاث منتجات فلاحية (الشعير، نبات الصويا والذرة) ومزجها بطريقة معينة من أجل الحصول على العلف المذكور.

ثمن شراء القنطار الواحد من الشعير، الصويا و الذرة هو على التوالي : 20 ون، 30 ون، 25 ون، نسب العناصر الغذائية في المنتجات الفلاحية الثلاثة معطاة كالتالي:

العناصرالغذائية	الشعير	نباتالصويا	الذرة
البروتين	%14	%55	%45
الدهون	%4	%5	%15

- **المطلوب:**

تكوين النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح المزرعة بتوفير الطلب بأقل تكلفة.

- **الحل:**

نفترض أن :

X_1 هو منتوج الشعير

X_2 هو نبات الصويا

X_3 الذرة

فالبرنامج يكون على شكل التالي:

$$Min(z)=20X_1 + 30X_2 + 25X_3$$

S/C

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 25X_3 = 1 \\ 4X_1 + 5X_2 + 15X_3 \geq 6 \\ 14X_1 + 55X_2 + 45X_3 \geq 30 \end{cases}$$

$X_j \geq 0$

التمرين رقم 07 و08 – 09 و 10 السابقين

المطلوب : إيجاد الحل البياني الأمثل للبرنامج الخطي

- **التمرين رقم 07 :**

شركة مواد غذائية تقوم بإنتاج نوعين من المواد A–B يتطلب إنتاج النوعين ثلاثة أنواع من المواد الأوليةI ; II ; III وهذا بالكميات المبنية في الجدول التالي :

	B	A
I	**2**	**3**
II	**1**	**2**
III	**3**	**1**

إن مقدار ما يتوفر من مواد أولية هو 40 كلغ من النوع I يوميا، و20 كلغ من النوع التالي IIيوميا و 30 كلغ من النوع الثالث IIIيوميا، هامش الربح للوحدة الواحدة من A هو 20 ون وهامش الربح للوحدة الواحدة من B هو25 ون.

- **المطلوب:**

أكتب البرنامج الخطي للمسألة.

حل التمرين رقم 07 : التذكير بالبرنامج الخطي

نفرض أن X_1تمثل الوحدات المنتجة من A

نفرض أن X_2تمثل الوحدات المنتجة من B

1. البرنامج الخطي:

$$\text{Max } (\text{ز}) = 20x_1 + 25x_2$$

S/C

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 40 \\ X_1 + 2X_2 \leq 20 \end{cases}$$

$$3X_1 + X_2 \leq 30 \quad X_1, X_2 \geq 0$$

2. إيجاد الحل البياني :

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات:

$$2X_1 + 3X_2 = 40$$

$$X_1 + 2X_2 = 20$$

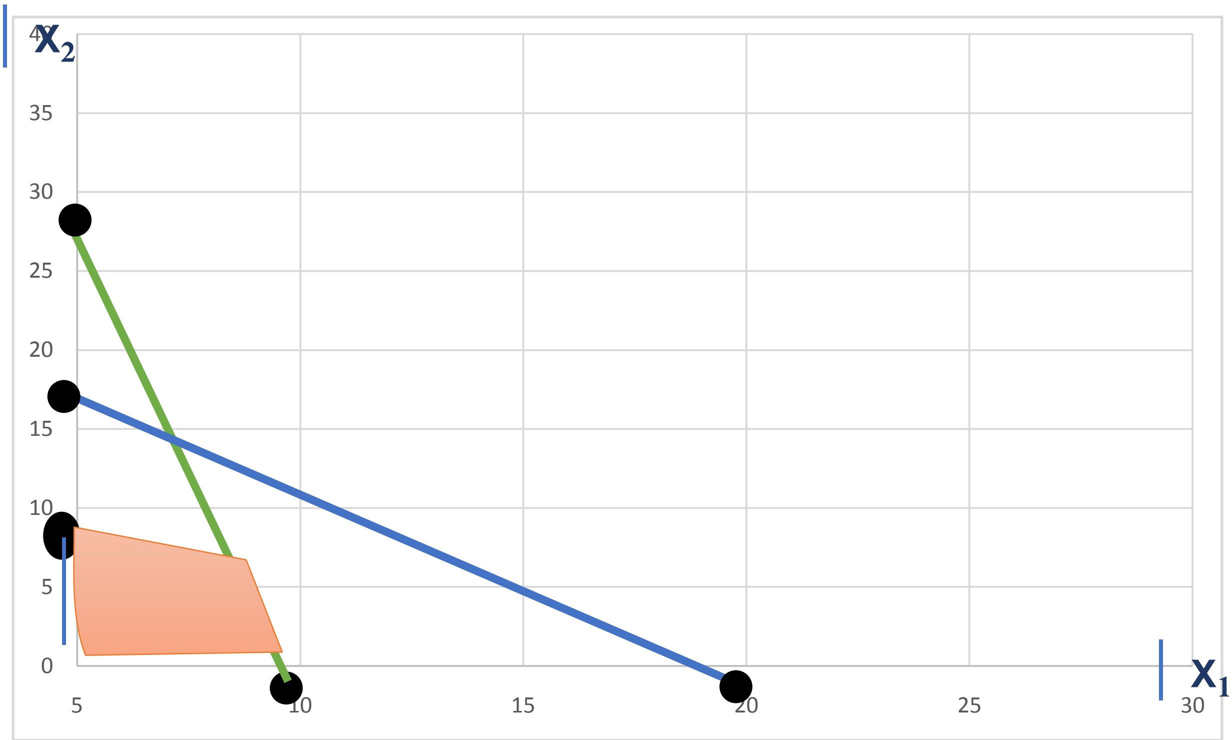
$$3X_1 + X_2 = 30$$

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم بإعطاء قيمة المتغير الأول ثم إيجاد

المتغير الثاني والعكس.

معادلة القيد الثالث		معادلة القيد الثاني		معادلة القيد الأول	
X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1
30	0	10	0		0
0	10	0	20	0	20

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أصغر أو يساوي (≤) و على يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي (≥).

حلول البرنامج موجودة في المضلع وتختصر رؤوس هذا المضلع للوصول إلى الحل الأمثل من بينها:

$$\begin{cases} (2X_1 \quad X_2) = (0 ،10) \\ (2X_1 \quad X_2) = (10 ، 0) \\ (2X_1 \quad X_2) = (8 ، 6) \end{cases}$$

$\text{Max } (z_1) = 20\ (0) + 25(10) = 250$

$\text{Max } (z_2) = 20\ (0) + 25(0) = 200$

$\text{Max } (z_3) = 20\ (8) + 25(6) = 310$

وبالتالي حلول البرنامج هي:

$X_1 = 8$ ، $X_2 = 6$ $\quad Z = 310$

الشركة تحتاج إلى إنتاج 8 وحدات من A و 6 وحدات من B لتحقيق ربح قدره 310 ون.

- **التمرين رقم 08:**

تشتري مزرعة مواشي مادتين غذائيتين مختلفتين، ثم تقوم بمزجهما لصنع علف المواشي، وتحتوي كل مادة على ثلاث مكونات من العناصر الغذائية الأساسيةA , B , C وبالمقادير التالية : 5غ من A، 4غ من B، 0.5غ من C للمادة الأولى، وتدفع 30ون لهما لكلغ من المادة الثانية، وأن كل وجبة تعدها المزرعة يجب أن تحتوي على الأقل على 90غ من A، 48غ من B، 1.5 غ من C.

- **<u>المطلوب :</u>**

أوجد تركيبة الوجبة من المادتين بحيث تحقق الشروط أعلاه وبأقل تكلفة.

حل التمرين رقم 08:

1. نقوم بكتابة البرنامج الخطي:

نفرض أن X_1 كمية المادة الأولى

نفرض أن X_2 كمية المادة الثانية

$$Min\ (z) = 20X_1 + 30X_2$$

S/C

$$\begin{cases} 5X_1 + 10X_2 \geq 90 \\ 4X_1 + 3X_2 \geq 48 \\ 0.5X_1 \geq 1.5 \end{cases}$$

$$X_1 + X_2 \geq 0$$

1. نقوم بتحويل المتراجحات إلى معدلات:

$$5X_1 + 10X_2 = 90$$

$$4X_1 + 3X_2 = 48$$

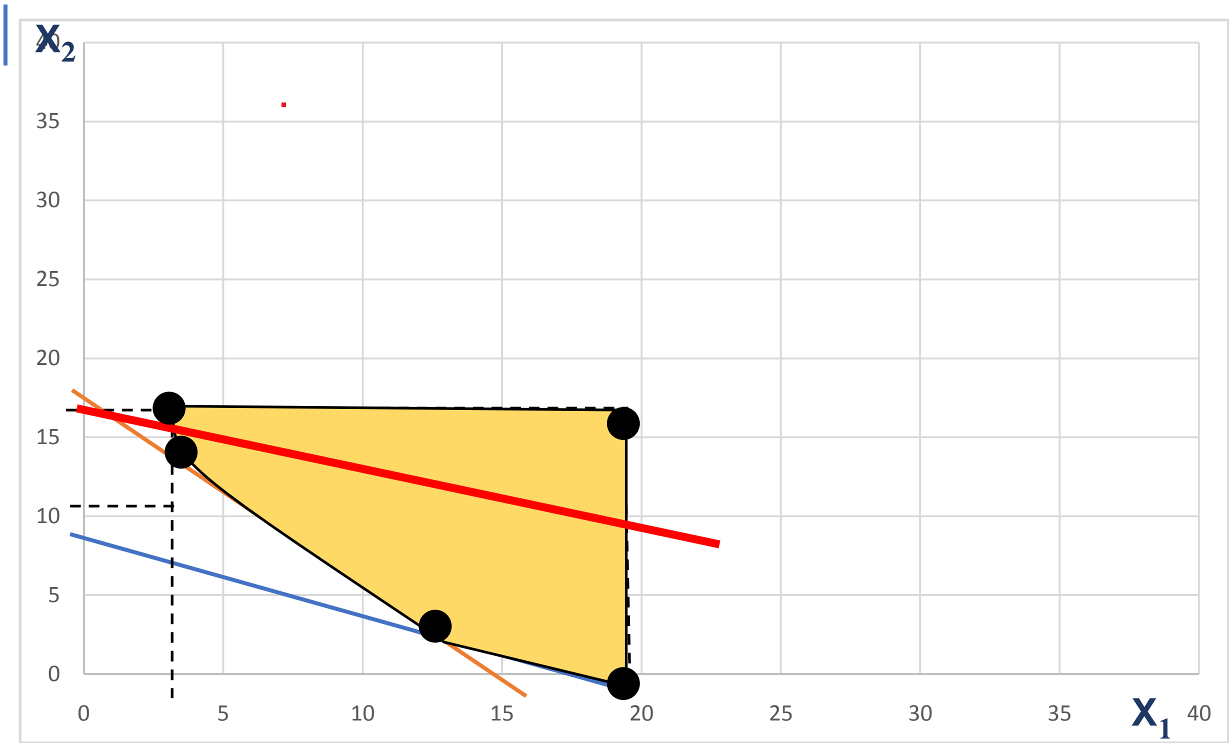
$$0.5X_1 = 1.5$$

$$X_1 + X_2 \geq 0$$

بالتعويض نوجد نقطتين لتمثيل كل معادلة مستقيم

المعادلة 03		المعادلة 02		المعادلة 01	
X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1
0	0	16	0	9	0
0	3	0	12	0	18

الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة أقل أو يساوي وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة أكبر أو يساوي لكي تتحصل على المضلع المضلل الذي يمثل الحل وهو غير محدود.

نقارن بين رؤوس المضلع الظاهرة:

$(X_1، X_2) = (18 ،0)$

$(X_1، X_2) = (8.4 ، 4.8)$

$(X_1، X_2) = (3 ، 12)$

$z_1 = 20\ (18) + 30\ (0) = 360$

$z_2 = 20\ (8.4) + 30(4.8) = 312$

$z_3 = 20\ (3) + 30(12) = 420$

المزرعة تبحث عن تقليل التكلفة، فتشتري 8.4 كلغ من المادة الأولى و4.8 كلغ من المادة الثانية لتكون التكلفة هي 312 وحدة نقدية.

التمرين رقم 09:

ينتج مصنع صغير صنفين من الحقائب المدرسية ذات الحجم الكبير وذات الحجم الصغير ويحقق ربحا مقداره 35، 30 وحدة نقدية على التوالي، فإذا كانت كل حقيبة تخضع إلى مرحلتين لإنتاجها و هي التقطيع و الخياطة و الجدول التالي يبين الوقت الذي تستغرقه كل عملية بالدقائق حسب حجم الحقيبة و الوقت الكلي المتاح بالساعات لكل عملية من العمليات:

	الحجم الصغير	**الحجم الكبير**	**الوقت الكلي الميسر**
التقطيع	**6**	**3**	**3 ساعات**
الخياطة	**4**	**6**	**4 ساعات**

- **<u>المطلوب:</u>**

- أوجد البرنامج الخطي.

حل التمرين رقم 09:

نفرض أن X_1 تمثل عدد الحقائب صغيرة الحجم المنتجة.

نفرض أن X_2 تمثل عدد الحقائب كبيرة الحجم المنتجة.

أولا نقوم بكتابة البرنامج الخطي:

$$\text{Max } (z) = 30X_1 + 35X_2$$

S/C

$$\begin{cases} 3X_1 + 6X_2 \geq 180 \\ 3X_1 + 6X_2 \geq 180 \\ 6X_1 + 4X_2 \geq 240 \\ X_1 ،X_2 \geq 0 \end{cases}$$

نحول المتراجحات إلى معادلات:

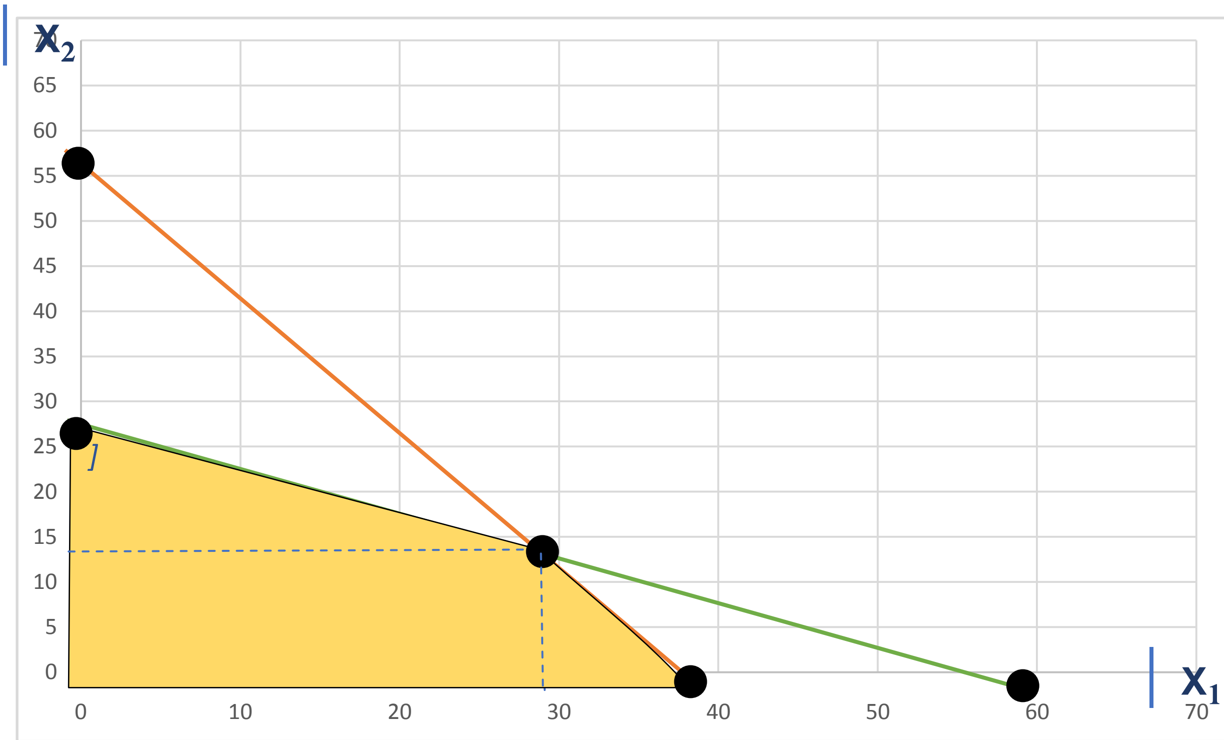
$$3X_1 + 6X_2 = 180$$

$$6X_1 + 4X_2 = 240$$

2. بالتعويض:

المعادلة 02		المعادلة 01	
X_2	X_1	X_2	X_1
60	0	30	0
0	40	0	60

3. الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي تحقق المتر اجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة ≤ وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة≥ كي نتحصل على المضلع الذي يمثل الحل الأمثل.

نقارن بين رؤوس في دالة الهدف نجد:

$(X_1, X_2) = (0, 30)$

$(X_1, X_2) = (30, 0)$

$(X_1, X_2) = (30, 15)$

$\text{Max}(z) = 30X_1 + 35X_2$

$z_1 = 30(0) + 35(30) = 1050$

$z_2 = 30(30) + 35(0) = 900$

$z_3 = 30(30) + 35(15) = 1425$

الحل الأمثل هو إنتاج 30 حقيبة صغيرة و 15 حقيبة كبيرة لنتحصل على ربح قدره 1425 ون.

- **التمرين رقم 10:**

ترغب إحدى المدارس في تنظيم رحلة ل 120 من تلاميذها إلى منطقة أثرية ولأجل ذلك تحتاج استئجار عدد من المركبات تحت إشراف 12 مدرسا وقد عثرت المدرسة على نوعين من السيارات:

- النوع الأول: تحمل 8 ركاب وتكلف 110 وحدة نقدية.
- النوع الثاني : تحمل 20 راكبا وتكلف 305 وحدة نقدية

- **المطلوب:**

أكتب البرنامج الخطي الذي يجعل التكلفة أقل مايمكن.

تمرين رقم 10:

نفرض أن X1هي السيارة ذات 8 ركاب

نفرض أن X2هي السيارة ذات 20 راكب.

1. **البرنامج الخطي:**

$$\text{Min } (z) = 110X_1 + 305X_2$$

S/C

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 12 \\ 8X_1 + 20\,X_2 \geq 120 \end{cases}$$

$$X_1 + X_2 \geq 0$$

.2 إيجاد الحل البياني:

تحويل المتراجحات إلى معادلات ثم تمثيلها بيانيا:

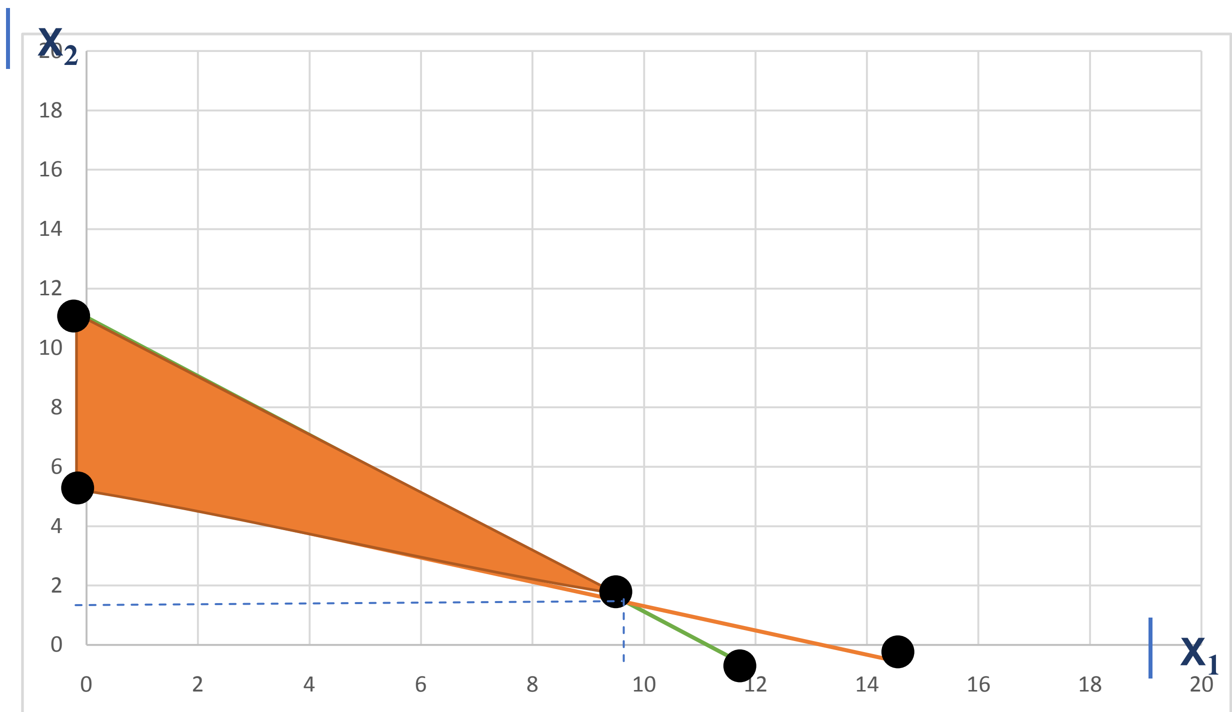
$$X_1 + X_2 = 12$$

$$8X_1 + 20X_2 = 120$$

بالتعويض نجد:

المعادلة 02		المعادلة 01	
X_2	X_1	X_2	X_1
6	0	12	0
0	15	0	12

.4 الرسم البياني:



نقوم بإقصاء المناطق التي لا تحقق المتراجحات على يمين المستقيم في حالة المتراجحة $\leq$ وعلى يسار المستقيم في حالة المتراجحة$\geq$ كي نتحصل على المضلع الذي يمثل الحل الأمثل.

نقارن بين رؤوس المضلع نجد:

$(X_1، X_2)= (0 ،12)$
$(X_1، X_2)= (0 ، 6)$
$(X_1، X_2) =(10 ، 2)$

بالتعويض في دالة الهدف:

$z_1 = 10\ (0) +305\ (12\ )=3660$
$z_2 = 110\ (0)\ +305(6)=1830$
$z_3 = 110\ (10) + 305(02)= 1710$

ومنه الحل الأمثل هو:

استئجار 10 سيارات ذات السعة 8 ركاب

و2 مركبة من ذات السعة 20 راكب لتكون تكلفة النقل هي 1710 ون.

تمرين رقم 13:

ليكن مشكل البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max }(z)= 3x_1 +2x_2+5x_3$$

s/c

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \leq 430 \\ 3x_1+2x_2 \quad \leq 460 \\ X_1+4x_2 \quad \leq 420 \end{cases}$$

$$X_1,x_2,x_3 \geq 0$$

الحل:

1. الصيغة الصفرية لدالة الهدف:

$$\text{Max } z -3x_1-2x_2-5x_3+0s_1+0s_2+0s_3=0$$

$$\begin{cases} X1 + 2X_2 + X_3 +S_1 = 430 \\ 3X_1 + \quad 2X_3 + S_2 = 460 \\ X_1 + 4X_2 \quad +S_3 = 420 \end{cases}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 0$$

العنصر الاساسي

B. V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	φ	φ pivot
Z	-3	-2	-5	0	0	0	0	
S_1	1	2	1	1	0	0	430	430/1
S_2	3	0	2	0	1	0	460	460/2
S_3	1	4	0	0	0		420	420/0

= 430

230

/

2. تحديد المحور المحوري أو عنصر الارتكاز من خلال تحديد العنصر الداخل المتغيرات الأساسية والعنصر الخارج.

العنصر الداخل هو أكبر قيمة في القيم غير الأساسية (X_1) في دالة الهدف Max.

العنصر الخارج هو المتغير الذي يغادر الأساس من خلال قسمة القيم φ على العمود المقابل للمتغير الداخل، وأصغر قيمة تقابل المتغير الأساس الخارج.

ومنه المتغير الداخل هو: $X_3 = -5$

المتغير خارج هو S_2 لأنه يقابل أصغر قيمة: 230.

عنصر الارتكاز هو 2 أو العدد المحوري.

محور الارتكاز أو الصف المحوري هو:

– الصف المحوري: $\frac{460}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{0}{2}\ \frac{2}{2}\ \frac{0}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{0}{2}$

$\frac{3}{2}\ 0\ 1\ 0\ {}^{1}/_{2}\ 0\ 230$

6. إعادة: ملاء الجدول لإيجاد الحل الأمثل

$z(--5)\ (\frac{3}{2}\ 010\ \ {}^{1}/_{2}\ 0230\ )$

قانون **الصف المحوري**

$z+\frac{5}{2}+\ 05\ \ 0\ \ \frac{5}{2}\ 0\ 1150$

$+-3\ \ -2\ -5\ 0\ \ 0\ 0\ \ \ \ 0$

$z\,{}^{9}/_{2}-2\ \ \ 0\ \ 0\frac{5}{2}\ 0\ \ 1150$

$S_1-\ (1)\ (\frac{2}{3}\ 010\ \ {}^{1}/_{2}\ 0230\ )$

$\frac{2}{3}\ \ 0\ -10\ -{}^{1}/_{2}\ 0-230$

$+\ \ \ \ \ \ 1\ 2\ \ 1\ 1\ \ \ \ 0\ \ \ 0\ \ \ \ 430$

$S_1-{}^{1}/_{2}2\ \ 0\ 1\ \ \ \ {}^{1}/_{2}\ 0\ \ \ 200$

$X_3\ (\frac{3}{2}\ \ 0\ 1\ 0\ \ {}^{1}/_{2}\ \ 0\ 230\ )$

$S_3-\ (0)\ (\frac{3}{2}\ 010\ \ {}^{1}/_{2}\ 0230\ )$

$0\ 000\ \ 00\ \ 0$

$+\ \ \ \ 1\ 4\ 00\ 0\ \ \ 1\ \ 420$

$S_3\ \ \ \ \ 1\ \ 4\ 00\ 0\ \ 1\ \ \ 420$

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	φ
Z	9/2	-2	0	0	5/2	0	1150
S_1	-1/2	2	0	1	-1/2	0	200
S_2	3/2	0	1	0	-1/2	0	230
S_3	1	4	0	0	0	1	420

$^{200}/_{2}$ =100

$^{230}/_{0}$ /

$^{420}/_{2}$ =105

مادام X_2 سالب فإنه ليس الحل الأمثل ونعيد العملية للحصول على الحل الأمثل.

ويصبح X2هو المتغير الداخل و S1هو المتغير الخارج.

Pivot = 2

محور الارتكاز يُصبح:

$$-^{1}/_{4} \quad 1 \quad 0 \quad -^{1}/_{4} \; ^{1}/_{2} 0 \quad 100$$

$$z-(-2)\ (-\tfrac{1}{4}\ 10\,^{1}/_{2} - ^{1}/_{4}\ 0\ 100\ )$$

$$-\tfrac{2}{4}2\ 01 - ^{1}/_{2} \quad 0\ \ 200$$

$$+ \qquad ^{9}/_{2}\ -2\ \ 00\,^{5}/_{2}01350$$

$$z \quad 4 \quad 0 \quad 0 \;\; 1 \quad 2 \qquad 0\ 1350$$

$X_2 - {}^{1}/_{4}\,1\;0\,{}^{1}/_{2} - {}^{1}/_{4}\,0\;100$

$X_3 - (0)(\,{}^{1}/_{4}\,1\;\;0\,{}^{1}/_{2} - {}^{1}/_{4}\;0\;100$

$0\;\;0\;\;0\;\;0\qquad 0\quad 0\;\;0$

$+\qquad {}^{3}/_{2}\,0\;\;1\;\;0\,{}^{1}/_{2}\;\;0\;230$

$X_3\,{}^{3}/_{2}\;\;0\;\;1\;0\qquad {}^{1}/_{2}\;\;0\;230$

$S_3 - (4)\;(-\frac{1}{4}\;10\,{}^{1}/_{2} - {}^{1}/_{4}\,0\;100\,)$

$+1-40-2\quad +1\;\;0\;-400$

$+\qquad 1\quad 4\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 420$

$S_3\quad +2\quad 0\quad 0\quad -2\quad +1\quad 1\quad +20$

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	φ
Z	4	0	0	1	2	0	1350
X_1	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
X_3	3/2	0	1	0	1/2	0	230
S_3	2	0	0	-2	+1	1	+20

ومنه حلول البرنامج الخطي هي :

$X1 = 0\quad X_2 = 100\quad X_3 = 230\;,\quad z = 1350$

تمرين رقم 14:

أوجد الصيغة النموذجية وجدول الحل الأساسي للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } (z) = 7x_1 + 5x_2$$

s/c

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 240 \end{cases}$$

$$X_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

$$\text{Max } (z) = 7X_1 + 5X_2$$

s/c

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 100 \\ 4X_2 + 3X_2 \leq 240 \end{cases}$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

$$\text{Max } (z) - 7X_1 - 5X_2 + OS_1 + OS_2 = 0$$

$$2X_1 + X_2 + S_1 = 100$$

$$4X_2 + 3X_2 + S_2 = 240$$

$$X_1 + X_2 \geq 0$$

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	φ	φ/Pivert
Z	-7	-5	0	0	0	-
X_1	2	1	1	0	100	100/2=50
X_3	4	3	0	1	0	200/4=60

–

–الخط المحوري :

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \quad 0 \quad \frac{100}{2}$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 50$$

ʒ $\quad - (-7) (\quad 0 \quad \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \quad 0 \quad 5 \quad 0)$

$\quad +7 \quad \frac{7}{2}\ \frac{7}{2} \quad 0 \quad 3 \quad 5 \quad 0$

$+ \quad -7 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

ʒ $\quad 0 \quad \frac{3}{2}\ \frac{7}{2} \quad 0 \quad 3 \quad 5 \quad 0$

$S_2 \quad - (4) (\quad 1 \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} \quad 0 \quad 5 \quad 0 \ )$

$\quad -4 \quad -2 \quad -2 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0$

$+ \quad 4 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 0$

$S_2 \quad 0 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 4 \quad 0$

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	φ	
z	0	3/2	7/2	0	350	
X_1	1	1/2	1/2	0	50	**50/1/2=100**
S_2	1	1	-2	1	40	40/1=40

نعيد العملية لإيجاد الحل الأمثل:

وتصبح:X2 العنصر الداخل

و S2 العنصر الخارج

عنصر الارتكاز Pivot = 1

محور الارتكاز: $\frac{0}{1}\frac{1}{1}\frac{-2}{1}\frac{1}{1}\frac{40}{1}$

0 1 -2 1 40

$$z \quad -\left(\tfrac{3}{2}\right)(\,0 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 4 \quad 0\,)$$

$$0 \quad \frac{-3}{2} \quad 3 \quad \frac{-3}{2} \quad 6 \;\; 0$$

$$0 \quad \frac{3}{2}\,\frac{7}{2} \quad 0 \quad 3 \;\; 5 \;\; 0$$

$$z \qquad 0 \quad 0 \quad \frac{13}{2}\,\frac{-3}{2} \quad 4 \;\; 1 \;\; 0$$

$$X_1 \quad -\left(\tfrac{1}{2}\right)(\,0 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 4 \quad 0\,)$$

$$0 \quad \frac{-1}{2} \quad +1 \quad \frac{-1}{2} \quad -20$$

$$+ \quad 1 \quad \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} \quad 0 \quad 5 \;\; 0$$

$$X_1 \qquad 1 \quad 0 \quad \frac{3}{2}\,\frac{-1}{2} \quad 3 \;\; 0$$

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	φ
Z	*0*	0	13/2	-3/2	410
X_1	1	0	3/2	-1/2	30
S_2	0	1	-2	1	40

ومنه الحل الأمثل هو :

$$X_1 = 30,\ X_2 = 40\ ,\ z = 410$$

تمرين رقم 15 :

حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمباكسSimplex

$$\text{Min } (з) = 2X_1 + 8X_2$$

S/C

$$\begin{cases} 5X_1 + 10X_2 = 150 \\ X_1 \leq 20 \\ X_2 \geq 14 \end{cases}$$

$X_{1,}x_2 \geq 0$

الحل:

$$\text{Min } (z) = 2X_1 + 8X_2$$

$$5X_1 + 10X_2 = 150$$

$$X_1 \leq 20$$

$$X_2 \geq 14$$

$X_j \geq 0$

لحل هذا النموذج الخطي بواسطة طريقة simplex لابد من تحويل قيود الفنية إلى شكل

معادلات أي:

نلاحظ أن القيد الفني الثاني و الثالث على شكل أصغر أو يساوي $\leq$ وأكبر أو يساوي $\geq$

ولتحويلها إلى شكلها القياسي نضيف الى الأول متغير الفرق (S_2) و نطرح من الثاني

متغير الفرق (S_3) فتصبح القيود كالأتي:

$$\begin{array}{lll} 5X_1 + 10X_2 = 150 & & 5X_1 + 10X_2 + oS_1 = 150 \\ X_1 \qquad \leq 20 & \xrightarrow{\text{يتحول إلى}} & X_1 \qquad +S_2 = 20 \\ \qquad X_2 \geq 14 & & \qquad X_2 - S_3 = 14 \\ X_j \geq 0 & & X_j \geq 0 \end{array}$$

بافتراض أن متغيرات (X_1 , X_2) تساوي 0، فإن متغيرات الحل الابتدائي و هي متغيرات الفرق لا تشكل مصفوفة الوحدة فيما بينها:

معامل S3 في القيد الثالث سالب ومعامل S1 في القيد الأول = 0 وبالتالي فإن هذا الحل غير مقبول، فنضطر لإضافة المتغيرات الاصطناعية ($R_3 - R_1$) إلى القيد الأول و الثالث ثم نضيفها أيضا إلى دالة الهدف بالكمية (n) فيصبح النموذج السابق كالتالي :

$$\text{Min } (z) = 2X_1 + 8X_2 + os_1 + os_2 + os3 + MR_1 + MR_3$$

$$5X_1 + 10X_2 + R_1 = 150$$

$$X_1 + S_2 = 20$$

$$X2 - S_3 + R_3 = 20$$

$$X_j \geq 0$$

إضافة المتغيرات الاصطناعية يمكننا من تكوين حل ابتدائي جديد بشكل من المتغيرات (R_1, R_2, R_3) ، هذه المتغيرات موجودة حاليا في قاعدة الحل و معاملاتها أحادية موجبة مصفوفة أحادية) فتعتبر أن هذا الحل الابتدائي مقبولا. تنقل هذه المعلومات إلى جدول الحل الابتدائي:

$$Min\ (z) = 2X_1 + 8X_2 + os_1 + os_2 + MR_1 + MR_3$$

$$Min\ (z) - 2X_1 - 8X_2 - os_1 - os_2 - MR_1 - MR_3 = 0$$

$R_1=150 \quad R_3=14$

$$Min\ (z) = -164m$$

B.V	X_1	X_2	S_3	R_1	S_2	R_3	φ
Z	-2	-8	0	-M	0	-M	-164m
R_1	5	10	0	1	0	0	150
S_2	1	0	0	0	1	0	20
R_3	0	1	-1	0	0	1	14

من ضمن شروط قبول الحل الابتدائي هو أن تكون دالة الهدف عند المستوى 0 لكن بالنظر

في الجدول السابق نلاحظ أن دالة الهدف حاليا تساوي $164-m$، لذلك نعتبر أن الحل

الابتدائي لازال غير مقبول ويجب التخلص من معاملات (R_1,R_2)لكي نجعل دالة الهدف

عند المستوى 0. من أجل ذلك نضرب كل من قيم الصف $\geq R_1 3$ و الصف 5 $\geq R_3$ في

$m+$ ونجمع النواتج مع قيم معاملات دالة الهدف:

$$R_1=+m_3(\ 5 \quad 10 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 150\ )$$

$$R_3=+m\ (0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 14\ )$$

$$R_1= 5m \quad 10m \quad 0 \quad m \quad 0 \quad 0 \quad 150\ m$$

$$R_3 = 0 \quad m \quad -m \quad 0 \quad 0 \quad m \quad 14 \quad m$$

$$5\ m \quad 11\ m \quad -m \quad m \quad 0 \quad m \quad 164m$$

$$+ \ -2 \quad -8 \quad 0 \quad -m \quad 0 \quad -m \quad -164m$$

$$z = -2+5m-8+11m \quad -m \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

رقم معاملات دالة الهدف

ومنه يصبح الجدول كالأتي:

B.V	X_1	X_2	S_3	R_1	S_2	R_3	φ		
Z	$-2+5m$	-8+11m	-m	0	0	0	0		
R_1	5	10	0	1	0	0	150	150/10	15
S_2	1	0	0	1	1	0	20	20/0	/
R_3	0	1	-1	0	0	1	14	14/1	14

نبدأ ألان البحث عن الحل الأمثل لهذا النموذج:

ومنه المتغير الداخل هو X_2 لأنه صاحب أكبر معامل موجب في صف دالة الهدف (-8+11m).

والمتغير الخارج هو R_3 لأنه يقابل أقل نسبة 14 غير سالبة.

$R_1 = R_1 - 10\,(\,0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 14\,)$

-الصف المحوري:

$X_2 = 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 14$

$R_1 = R_1 - 0 - \ 10 + \ 10 \ 0 \ 0 \ -10 \ -140$

$+ \quad 5 \quad 10 \quad 0 \ 1 \ 0 \ 0 \quad 150$

$R_1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \ 1 \ 0 \ -10 \quad 10$

$S_2 = S_2 \ -0 \ (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 4)$

$S_2 = \ 1 \quad 0 \ 0 \quad 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 0$

$z = z - (-8 + 11m)(0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 14)$

$+ \ 8 - 11m \quad (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 14)$

$0 \quad +8_{-11m} \quad -8_{+11m} \ 0 \quad 0 \ +8_{-11m} \quad 112 - 154m$

$+ \quad -2_{+5m} \quad -8_{+11m} \quad -m \quad 0 \ 0 \ 0 \quad 0$

$z \quad -2-5m \quad 0 \quad -8_{+10m} \ 0 \ 0 \ 8_{-11m} \quad 112 \ -154m$

دالة الهدف تحسنت بعد إدخال X2 إلى قاعدة الحل، وانخفضت قيمتها من 0 إلى 112− 154m، ومادام هناك قيم موجبة في صف المعاملات دالة الهدف فنستمر في محاولات البحث على الحل الأمثل. أكبر قيمة موجبة هي -8+10m وهي معامل S_3 في الجدول التالي:

B.V	X_1	X_2	S_3	R_1	S_2	R_3	φ	
Z	-2+5*m*	0	-8+10m	0	0	8-11m	112-154m	
R_1	5	0	10	1	0	-10	10/10	1
S_2	1	0	0	0	1	0	20/0	/
X_2	0	1	-1	0	0	1	14/-1	−14

-الصف المحوري:

$$\frac{1}{2} \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad -1 \quad 1$$

B.V	X_1	X_2	S_3	R_1	S_2	R_3	φ	
Z	2	0	0	4/5-m	0	-m	120-164m	/
S_3	1/2	0	1	1/10	0	-1	1	1/1/2=2
S_2	1	0	0	0	1	0	20	20/1=20
X_2	1/2	1	0	1/10	0	0	15	15/1/2 =30

$S_2 = S_2 \; -0 \; (\; {}^{1}/_{2} \;\; 0 \;\; 1 \;\; {}^{1}/_{10} \;\; 0 - 1 \;\; 1$

$S_2 = \quad 1 \quad 0 \quad 0 \;\; 0 \quad 10 \quad 20$

$X_2 = X_2 - (- 1) ({}^{1}/_{2} \;\; 0 \;\; 1 \;\; {}^{1}/_{10} \;\; 0 \;\; - 1 \;\; 1)$

$+ \quad 0 \quad 1 \;\; -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 14$

$X_2 \;\; {}^{1}/_{2} \;\; 1 \;\; 0 \;\; {}^{1}/_{10} \; 0 \;\; 0 \;\; 15$

$z = - (-8 + 10m) ({}^{1}/_{2} 0 \;\; 1 \;\; {}^{1}/_{10} \;\; 0 \;\; - 1 \;\; 1 \;)$

$+4 - 5m \quad 0 \quad +8_{-10m} {}^{4}/_{5} - m \;\; 0 \; - 8 + 10m \quad 8 -$

$10m$

$+ \quad 2 \;\; +5m \quad 0 \quad -8_{+10m} \;\; 0 \quad 0 \quad 8_{-11m} \quad 112 \; -$

$154m$

$z \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 4/5_{-m} \quad 0 \quad -m \quad 120 \quad -164m$

مازالت هناك قيمة موجبة في صف الدالة لهدف ومنه ليس الحل الأمثل.

المتغير الداخل هو X_1 ويخرج المتغير S_3 ويصبح الجدول كالأتي:

-الصف المحوري :

$$X_1 = 1 \quad 0 \quad 2 \quad {}^{1}/_{5} \quad 0 \quad -2 \quad 2$$

$$S_2 = -1\,(\,1 \quad 0 \quad 2 \quad {}^{1}/_{5} \quad 0 \quad -2 \quad 2\,)$$

$$-1 \quad 0 \quad -2 \quad {}^{-1}/_{5} \quad 0 \quad +2 \quad -2$$

$$+ \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 20$$

$$S_2 = \quad 0 \quad 0 \quad -2 \quad {}^{-1}/_{5} \quad 1 \quad 2 \quad 18$$

$$X_2 = -{}^{1}/_{2}\left(1 \quad 0 \quad 2 \quad {}^{1}/_{5} \quad 0 \quad -2 \quad 2 \right)$$

$$-{}^{1}/_{2} \quad 1 \quad 0 \quad {}^{1}/_{10} \quad 0 \quad 0 \quad 15$$

$$X_2 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 14$$

$$z = -(+2)\,(\,1 \quad 0 \quad 2\,{}^{1}/_{5} \quad 0 \quad -2 \quad 2\,)$$

$$-2 \quad 0 \quad -4 \quad {}^{-2}/_{5} \quad 0 \quad +4 \quad -4$$

$$+ \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{4}{5} - m \quad 0 - m \quad 120 - 164m$$

$$z = \quad 0 \quad 0 \quad -4 \quad {}^{2}/_{5} - m \quad 0 \quad 4 - m \quad 116 - 164m$$

B.V	X_1	X_2	S_3	R_1	S_2	R_3	φ
Z	0	0	-4	2/5-m	0	4-m	116-164m
X1	1	0	2	1/5	0	-2	2
S_2	0	0	**-2**	-1/5	1	2	18
X_2	0	1	-1	0	0	1	14

ومنه هذا يمثل الحل الأمثل لعدم وجود رقم موجبة لمعاملات دالة الهدف.

Min $z = 2X_1 + 8X_2$

$2(2) + 8(14) = \mathbf{116}$

تمرين رقم 16 :

حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\text{Min } (z) = 120X_1 + 150X_2 + 200X_3$$

S/C

$$\begin{cases} 50X_2 + 30X_3 \geq 20 \\ 10X_2 + 20X_3 \geq 10 \\ 40X_2 + 10X_3 \leq 20 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$$

$X_j \geq 0$

الحل :

$$\text{Min } z = 120X_1 + 150X_2 + 200X_3$$

$$50+30X_2 \geq 20$$

$$10X_2+20X_3 \geq 20$$

$$40X_2+10X_3 \leq 20$$

$$X1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$X_j \geq 0$$

$$z = 120X_1 + 150X_2 + 200X_3 + OS_1 + OS_2 - OS_3 + OS_4 + MR_1 + MR_2 + MR_4 = 0$$

$$50X_2 + 30X_3 - S_1 + R_1 = 20$$

$$10X_2 + 20X_3 - S_1 + R_2 = 10$$

$$40X_2 + 10X_3 + S_3 = 20$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + OS_4 + R_4 = 1$$

إن إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود الفنية يمكننا من الحصول على حل ابتدائي جديد الذي يتكون من المتغيرات $R_1=20$, $R_2=10$, $S_3=20$ ومنه يصبح الجدول الممثل لبيانات الحل الابتدائي هو:

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	φ
Z	*-120*	-150	-200	0	0	-m	-m	0	-m	-31m
R_1	0	50	30	−1	0	1	0	0	0	20
R_2	0	10	20	0	−1	0	1	0	0	20
S_3	0	40	10	0	0	0	0	1	0	20
R_4	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

نلاحظ أن معاملات المتغيرات الاصطناعية هي (−M) وبالتالي فدالة الهدف تساوي − 31M وليس 0 و بالتالي فهو لا يمثل حل ابتدائي مقبول ولتكون دالة الهدف صفرية لابد من التخلص من قيم M للمتغيرات الاصطناعية. وذلك بجمعها مع معكوسها. فنضرب قيم صف Mفي R1و R2 و صف R4 أيضا نضرب في M وتجمع مع صف دالة الهدف.

z - 120 − 150 − 200 + 0 + 0 − m − m + 0 − m = 31m

R_1 = M(0) + M(50) + M(30) + M(−1) + M(0) + M(01) + M(0) + M(0) + M(0) +M(20)

R_2 = M(0) + M(10) + M(20) + M(0) + M(−1) + M(0) + M(1) + M(0) + M(0) +M(10)

R_4= M(1) + M(1) + M(1) + M(0) + M(0) + M(0) + M(0) + M(0) + M(1) +M(01)

(−120+m) (−150+61m) (−200+51m) −m −m + 0 + 0 + 0 + 0 = 0

ومنه يصبح الجدول كالاتي:

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	φ	
Z	-120m	+150 +61m	-200+51m	-m	-m	0	0	0	0	0	
R_1	0	50	30	−1	0	1	0	0	0	20	$\frac{20}{5}$ $\frac{2}{5}$
R_2	0	10	20	0	−1	0	1	0	0	10	$\frac{10}{10}$ 1
S_3	0	40	10	0	0	0	0	1	0	20	$\frac{20}{40}$ $\frac{1}{2}$
R_4	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	$\frac{1}{1}$ 1

Pivot

نبدأ في البحث ما الحل الأمثل:

X2 هو المتغير الداخل : − 150 + 61 M

ومنه R1 هو الخارج و يصبح الصف المحوري كالأتي:

$$0 \quad 1 \quad \frac{3}{5} \quad \frac{-1}{50} \quad 0 \quad \frac{1}{50} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{5}$$

ويصبح الجدول كالاتي:

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	φ
Z	-120m	0	-110+72m/5	-3+11m/50	-m	+3(16m/50)	0	0	0	60-24.4m
X2	0	1	3/5	-1/50	0	1/50	[illegible]	0	0	2/5
R_2	0	0	14	1/5	-1	-1/5	[illegible]	0	0	6
S_3	0	0	-14	4/5	0	-4/5	0	[illegible]	0	4
R_4	1	0	2/5	1/50	0	-1/50	0	0	1	1/5

$\frac{2}{5} = \frac{2}{3}$

$\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

$\frac{4}{-14} = \frac{2}{-7}$

$\frac{3}{5\frac{2}{5}} = \frac{3}{2}$

نلاحظ أن الدالة الهدف انخفضت وانتقلت قيمتها من 0 الى $60-24.4m$ ومما إن توجد قيم موجبة

في دالة الهدف فإنه ليس بالحل الأمثل ومنه فالمتغير الداخل هو x3 بقيمة $-110 + \frac{72}{5}m$

و المتغير الخارج هو :R2

–الصف المحوري:

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{70} \; \frac{-1}{14} \; \frac{-1}{70} \; \frac{1}{14} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{3}{7}$$

ويصبح الجدول الجديد بالشكل التالي:

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	φ	
Z	$-120+m$	0	0	-10/7 + 5/70	-55/7 +m/35	10/7 - 71m/70	55/7 - 72m/70	0	0	750/7 -30.57m	
X2	0	1	0	-1/35	3/70	1/35	-3/70	0	0	1/70	$\frac{\frac{1}{7}}{0}$
X3	0	0	1	1/70	-1/14	-1/70	1/4	0	0	3/7	$\frac{\frac{3}{7}}{0}$
S_3	0	0	0	1	-1	-1	1	1	0	10	$\frac{10}{10}$
R_4	1	0	0	1/70	1/35	-1/70	-1/35	0	1	3/7	$\frac{\frac{3}{7}}{1}$

مازلنا لم نصل إلى الحل الأمثل وذلك لوجود قيم موجبة في معاملات دالة الهدف و منه فالمتغير الداخل هو $X1 = -120 + M$

ومنه فالمتغير الخارج هو R4:

-الصف المحوري:

$$\mathbf{1\ \ 0\ \ \ 0\ \frac{1}{70}\ \frac{1}{35}\ \frac{-1}{70}\ \frac{-1}{35}\ \ \ 0\ \ 1\ \ \ \frac{3}{7}}$$

ومنه يصبح الجدول كالاتي:

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	φ
Z	0	0	0	2/7	-31/7	-2/7 -*m*	31/7 -m	0	120-m	1110/7 -31
X2	0	1	0	-1/35	3/70	1/35	-3/70	0	0	1/7
X3	0	0	1	1/70	-1/14	-1/70	1/14	0	0	3/7
S_3	0	0	0	1	-1	-1	1	1	0	10
X1	1	0	0	1/70	1/35	-1/70	-1/35	0	1	3/7

نواصل البحث عن أقل قيمة z مادام هناك قيم موجبة في سطر معاملات دالة الهدف ومنه

S_1 يدخل إلى قاعدة الحل و S_3 يخرج ويصبح الصف المحوري ب:

0 0 0 1 −1 −1 1 1 0 10

ومنه يصبح الجدول كالاتي:

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	φ
Z	0	0	0	0	-29/7	- *m*	29/7- m	2/7	120- m	1090/7 -31m
X_2	0	1	0	0	1/70	0	-1	- 1/35	0	3/7
X_3	0	0	1	0	- 16.5/70	0	4/5	- 1/70	0	2/7
S_1	0	0	0	1	-1	1	14	1	0	10
X_1	1	0	0	0	3/70	0	-3/70	- 1/70	1	2/7

بهذا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل ، وذلك لاختفاء القيم الموجبة من السطر العلوي وتكون قيمة $z=\frac{1090}{7}$

بالتخلي عن قيمة -31m وهي معامل المتغير الاصطناعي نهملها بعد الوصول للحل الأمثل .

وقيم عناصر الحل الأمثل:

$$X_1=\frac{2}{7},\ X_2=\frac{3}{7}\ ,\ X_3=\frac{2}{7}$$

نموذج الامتحان :

التمرين الأول :

يريد أحد منتجي المثلجات تحضير مادة أولية مركبة من أجل استعمالها في إنتاج المثلجات والمرطبات . هذه المادة يجب أن تحتوي على 30 كلغ من الدهون، 20 كلغ من السكريات ،2 كلغ من البروتين و 60 كلغ من الماء (1 كلغ =1 لتر).

من اجل تحضير هذه المادة المركبة يقوم بشراء بعض المواد من السوق بالإضافة إلى استعمال الماء. قائمة المواد المشتراة ونسبة المواد المركبة فيها وكذلك ثمن شراء هذه المواد معطاة في الجدول التالي:

	الماء	**مستخلص السكر**	**صفار بيض مجمد ومحلى**	**الحليب**	**صفار بيض طازج**	**القشدة**
الدهون	/	/	**15%**	**10%**	**20%**	**40%**
السكريات	/	**65%**	**10%**	**4%**	**1%**	**0.5%**
البروتين	/	/	**45%**	**20%**	**40%**	**3%**
الماء	**%100**	**30%**	**15%**	**60%**	**10%**	**45%**
ثمن الشراء	/	**0.6 ون**	**4 ون**	**3 ون**	**7 ون**	**5 ون**

المطلوب:

كون النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح لهذا المنتج من تحقيق برنامجه الإنتاجي بأقل تكلفة.

التمرين الثاني :

اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني :

$$\mathbf{Max(z)= 15\,X_1 + 12\,X_2}$$

$$\mathbf{S/C}$$

$$\begin{cases} 3X_1+6X_2 \le 54 \\ 6X_1+3X_2 \le 48 \\ 9X_1+9X_2 \le 90 \end{cases}$$

$$\mathbf{X_1 \ge 0 ; X_2 \ge 0}$$

التمرين الثاني :

اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة السمبلكس Simplex :

$$\mathbf{Max(z)= 4\,X_1 + 5\,X_2}$$

$$\mathbf{S/C}$$

2 $$\begin{cases} X_1+3X_2 \le 6 \\ 2X_1+2X_2 \le 5 \end{cases}$$

$$\mathbf{X_1 \ge 0 ; X_2 \ge 0}$$

الحل النموذجي

-التمرين الأول:

$$\text{Min } z = 5X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 4X_4 + 0.5X_5$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 0.4X_1 + 0.2X_2 + 0.1X_3 + 0.15X_4 = 30 \\ 0.005X_1 + 0.01X_2 + 0.04X_3 + 0.1X_4 + 0.65X_5 = 20 \\ 0.03X_1 + 0.4X_2 + 0.2X_3 + 0.45X_4 = 2 \end{cases}$$

$$0.45X_1 + 0.1X_2 + 0.6X_3 + 0.15X_4 + 0.3X_6 = 60$$

$$Xj \geq 0$$

-التمرين الثاني :

1. الصيغة الصفرية **Max** $(z) = 15X_1 + 12X_2$

S/C

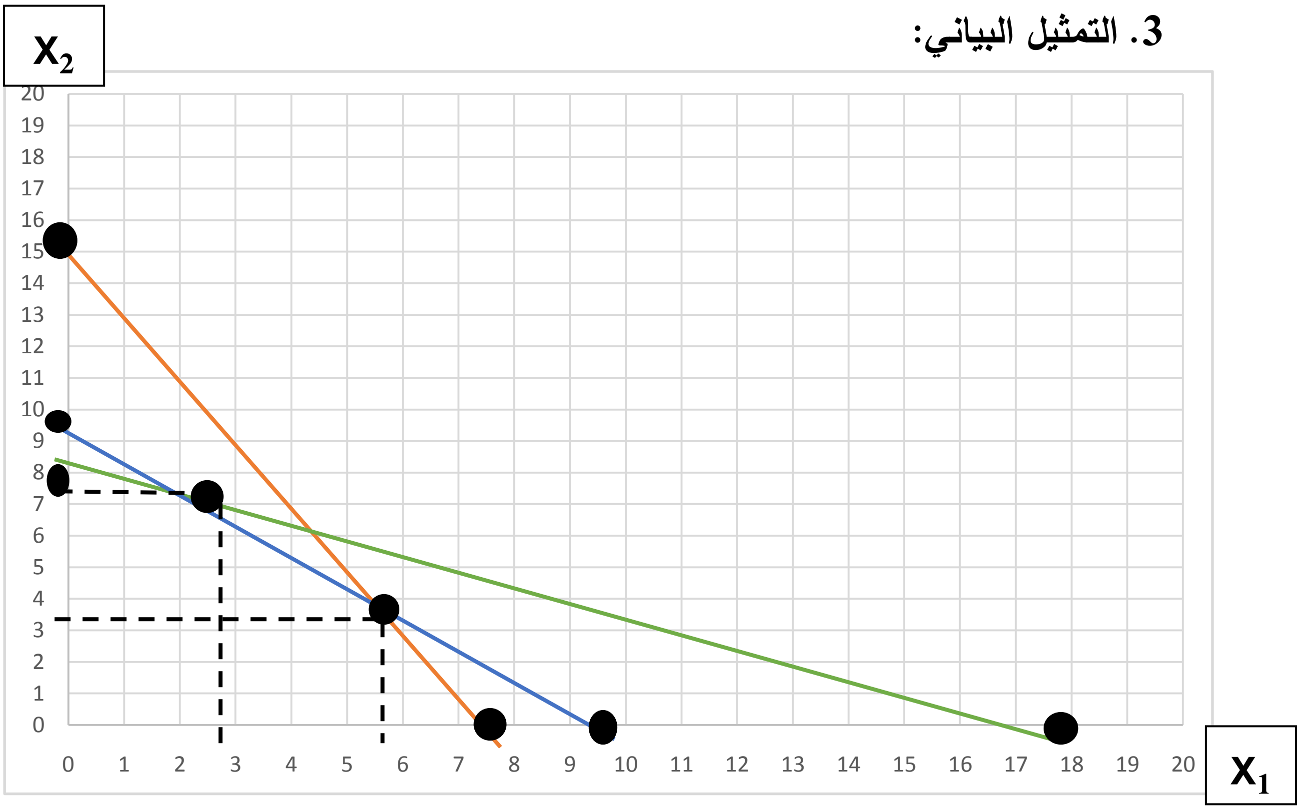
$$\begin{cases} 3X_1 + 6X_2 \leq 54 \\ 3X_1 + 6X_2 \leq 48 \\ 9X_1 + 9X_2 = 90 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} 3X1 + 6X_2 = 54 \\ 3X_1 + 6X_2 = 48 \\ 9X_1 + 9X_2 \leq 90 \end{matrix}$$

$$Xj \geq 0 \qquad\qquad Xj \geq 0$$

2. تحديد الإحداثيات:

1		2		3	
X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
0	9	0	16	0	10
18	0	8	0	10	0

3. التمثيل البياني:



-ومنه نتحصل على الإحداثيات التالية:

$(X_1 . X_2) = (0 , 9)$

$(X_1 , X_2) = (8 , 0)$

$(X_1 , X_2) = (3 , 8)$

$(X_1 , X_2) = (6 , 4)$

-نقوم بالتعويض في دالة الهدف:

$\text{Max } z_1 = 15 (0) + 6 (9) = 54$

$z_2 = 15 (8) + 6 (0) = 120$ **الحل الأمثل**

$z_3 = 15 (3) + 6 (8) = 93$

$z_4 = 15 (6) + 6 (8) = 114$

-ومنه الحل الأمثل هو: $X_1 = 8 , X_2 = 0$

-التمرين الثالث:

$\text{Max } z = 4X_1 + 5X_2$

S/C

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 2X_2 \leq 5 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

1. الصيغة الصفرية:

$\text{Max } z - 4X_1 - 5X_2 + OS_1 + OS_2 = 0$

$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 6$

$2X_1 + 2X_2 + S_2 = 5$

$X , X_2 \geq 0 , S_1 , S_2 \geq 0$

-الحل الابتدائي:

X2 الداخل

S1 الخارج

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	φ
z	-4	-5	0	0	0
S_1	2	3	1	0	6
S_2	2	2	0	1	5

$\frac{6}{3} = 2$

$\frac{5}{2} = 2.5$

الصف المحوري:

$$\frac{2}{3}\frac{3}{3}\frac{1}{3}\frac{0}{3}\frac{6}{3}$$

$$\boxed{\frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 2}$$

$$z = -(-5)\left(\frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 2\right)$$

$$\frac{10}{3} \quad 5 \quad \frac{5}{3} \quad 0 \quad 10$$

$$+ \qquad -4 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 10$$

$$\boxed{z \quad \frac{-2}{3} \quad 0 \quad \frac{5}{3} \quad 0 \quad 10}$$

$$S2 \quad -(2)\left(\frac{2}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 2\right)$$

$$\begin{array}{rccccc} + & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{= \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad \frac{-2}{3} \quad 1 \quad 1}$$

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	φ
z	-2/3	0	5/3	0	10
X_2	2/3	1	1/3	0	2
S_2	2/3	0	-2/3	1	1

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\frac{2}{2}}{3} = 3$$

و منه يصبح $X1$ هو الداخل و $S2$ هو المتغير الخارج و يصبح الحل على الشكل التالي :

الصف المحوري :

$$\frac{\frac{2}{3}}{2/3} \quad \frac{0}{\frac{2}{3}} \quad \frac{\frac{-2}{3}}{\frac{2}{3}} \quad \frac{1}{\frac{2}{3}} \quad \frac{\frac{1}{2}}{3}$$

$$\boxed{X_1 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad \frac{3}{2}\frac{3}{2}}$$

$$z = -\left(\frac{-2}{3}\right)\left(1 \quad 0 \quad -1 \quad \frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{2}{3} \quad 0 \quad \frac{-2}{3} \quad 1 \quad 1$$

$$\frac{-2}{3} \quad 0 \quad \frac{5}{3} \quad 0 \quad 10$$

$$\boxed{z \;=\; 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 11}$$

$$X_2 = -\left(\frac{-2}{3}\right)\left(1 \quad 0 \quad -1 \quad \frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{-2}{3} \quad 0 \quad \frac{2}{3} - 1 \quad -1$$

$$+ \quad \frac{2}{3}\,1\,\frac{1}{3}\,0 \quad 2$$

$$\boxed{X_2 \;=\; 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1}$$

و يصبح جدول الحل بالشكل التالي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	φ
z	0	0	1	1	11
X_2	0	1	1	-1	1
X_1	1	0	-1	2/3	3/2

ومنه فالحل الأمثل هو :

$$X_1 = \frac{3}{2} \;,\; X_2 = 1$$

Max $z = 11$

قائمة المراجع

1. محمد راتول "بحوث العمليات " ديوان المطبوعات الجامعية 2006
2. د.طلال عبود، طاهر حسن" بحوث العمليات" نشر الجامعة الافتراضية السورية 2021.
3. د. زهدي مصطفى خواجة " مدخل إلى بحوث العمليات والبرمجة الخطية" المكتبة الوطنية للمملكة الأردنية الهاشمية 2022
4. د. مسعود نصر الدين، د.عمارة البشير " بحوث العمليات " دروس ملخصة وتمارين محلولة ، النشر الجامعي الجديد تلمسان .
5. د.مولاي بوعلام مطبوعة محاضرات وتطبيقات في بحوث العمليات جامعة البويرة 2016-2017
6. محاضرات الأستاذ آيت زاوش " بحوث العمليات" جامعة وهران دفعة2003-2004.
7. أكرم محمد عرفان المهتدي، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات ، دار الصفاء للنشر والتوزيع ، عمان ط1 2004.
8. احمد حاتم عبد الله ، بحوث العمليات ، منشورات الجامعة الافتراضية السورية 2018.
9. مكيد علي، بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية، الجزء الأول : البرمجة الخطية دروس ومسائل محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر 2015.
10. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال ، بحوث العمليات دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ، الاردن 2008.