

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة بيداغوجية في مادة

الإحصاء 02

موجهة لطلبة السنة الأولى ليسانس

من إعداد الأستاذة

تواني خديجة

أستاذة محاضرة "أ"

السنة الجامعية: 2026/2025

جدول المحتويات

الصفحة	العنوان
01	مقدمة
	المحاضرة الأولى: نظرية المجموعات
04	1-تعريف المجموعة
04	2-طرق تعريف المجموعة
04	3-أنواع المجموعات
06	4-تمثيل المجموعات
06	5-العمليات على المجموعات
08	6-قوانين نظرية المجموعات (خواص)
09	تمارين محلولة
	المحاضرة الثانية: التجربة والحدث
15	1-تعريف التجربة
16	2-فراغ العينة (فضاء التجربة)
17	3-الحدث
20	تمارين محلولة
	المحاضرة الثالثة: التحليل التوافقي
26	1-المبدأ الأساسي في العد (طرق العد)
28	2-التبديلة
30	3-الترتيبية
31	4-التوفيقية
32	5-صيغة نيوتن
35	تمارين محلولة
	المحاضرة الرابعة: نظرية الاحتمالات
43	1-تعريف الاحتمال
46	2-خواص الاحتمال
48	3-الاحتمال الشرطي
49	4-خواص الاحتمال الشرطي

52	5-الاحتمال الكلي
54	6-قانون بايز
56	تمارين محلولة

المحاضرة الخامسة: المتغيرات العشوائية المتقطعة

66	1-تعريف المتغير العشوائي
67	2-أنواع المتغيرات العشوائية
67	1-2-المتغير العشوائي المتقطع
68	2-2-المتغير العشوائي المستمر
68	3-التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع
70	4-التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع
70	5-دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع
71	6- التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع
72	7-المميزات العددية لمتغير عشوائي متقطع
72	1-7-التوقع الرياضي
73	2-7-التباين
73	3-7-الانحراف المعياري
75	تمارين محلولة

المحاضرة السادسة: المتغيرات العشوائية المستمرة

87	1-تذكير بالمتغير العشوائي المستمر
87	2-التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر
88	3-خواص دالة الكثافة لمتغير عشوائي مستمر
89	4-دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر
89	5-خصائص دالة التوزيع
91	6-قاعدة لايبنيثز
91	7-المميزات العددية لمتغير عشوائي مستمر
91	1-7-التوقع الرياضي
92	2-7-التباين
93	3-7-الانحراف المعياري

المحاضرة السابعة: التوزيعات الاحتمالية

- 102 I- التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة
- 102 1- توزيع برنولي
- 103 2- توزيع ثنائي الحد
- 105 3- توزيع بواسون
- 107 4- التوزيع المنتظم
- 108 II- التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة
- 108 1- التوزيع المنتظم
- 110 2- التوزيع الطبيعي
- 111 3- التوزيع الطبيعي المعياري
- 114 تمارين محلولة

المحاضرة الثامنة: العزوم والدالة المتجددة للعزوم

- 121 1- تعريف العزوم
- 122 2- خواص العزوم
- 124 3- الدالة المتجددة للعزوم
- 125 4- خواص الدالة المتجددة للعزوم
- 126 قائمة المراجع

مقدمة

لسنوات طويلة من الدراسة تم الاكتفاء بالقوانين الحتمية التي لا تدع مجالاً للشك أو الصدفة، ونظراً لوجود العديد من الظواهر في الحياة اليومية والعملية غير الممكن التنبؤ بنتائجها اعتماداً على القوانين العلمية المعروفة سابقاً، بدأ التفكير في كيفية دراسة هذه الظواهر ومحاولة تقدير احتمال حادثة أو ظاهرة معينة بعبارات وقوانين تدل على الصدفة، فظهرت عبارات وكلمات مثل من المحتمل، ربما، من المرجح وغيرها التعبير عن حادثة لم تصبح حقيقة بعد، أو نتيجتها خارج نطاق السيطرة والتحكم فيها، مما يدفع مباشرة الأفراد إلى حساب الاحتمال (الصدفة).

كلمة الاحتمال كانت تستخدم في الأوساط الارستقراطية في أوروبا في ألعاب الحظ (الورق والنرد) ولكن استخدام وحساب الاحتمال بالشكل المعروف اليوم لم يبدأ حتى منتصف القرن 17 بفضل (دو فيرما، باسكال، دوميريه، ديموافر)، وبرز في تلك الفترة علم رياضيات الاحتمال، وتطور هذا الاختصاص نظوراً واضحاً حتى أصبح يسيطر على مظاهر عديدة من مظاهر الحياة الحديثة.

أصبح لنظرية الاحتمال أسس رياضية علمية تمكن من تطبيقها على نطاق واسع، حتى أصبحت قادرة على التنبؤ بحدوث بعض الظواهر (التي تحدث مصادفة) والتي لا يمكن تفسيرها بطريقة أخرى، وبفضل هذا العلم أصبح من الممكن التمييز بين ما هو ممكن الحدوث مصادفة، وما هو مستحيل الحدوث بهذه الطريقة. تعد نظرية الاحتمالات إحدى فروع العلوم الرياضية التي تهتم بالظواهر التي يعبر عنها بمتغيرات عشوائية تتأثر بمعامل الصدفة، وخصص هذا المقياس لمعرفة أهم المبادئ، الأسس والنظريات العلمية المرتبطة بهذه التطرية (الاحتمالات)، مثل تقدير كمية البضائع الواجب تخزينها احتياطاً لتغطية الطلبات غير المتوقعة على المنتجات، الكشف عن الآثار الجانبية عن تصنيع الأدوية المجربة على بعض المتطوعين لدواء جديد، والتأكد مما إذا كانت آثار ذات قيمة إحصائية أم أنها مجرد صدفة.

تحتوي المطبوعة على تسع محاضرات، المحاضرة الأولى تعتبر كمدخل للإحصاء يتم فيها التعريف بالمجموعات وأنواعها، ثم تنتقل إلى المحاضرة الثانية أين يتم التعريف بالتجربة وفضاءها، أين يصبح الطالب قادر على التفريق بين مفهومي التجربة والحدث، المحاضرة الثالثة خصصت للتحليل التوافقي لتقديم طرق العد بكل أنواعها من تبديلة، ترتيبية وتوفيقية، ثم تنتقل إلى نظرية الاحتمالات في المحاضرة الرابعة ليصبح الطالب مبم بكل مفاهيم الاحتمالات منها الاحتمال الشرطي والاحتمال الكلي وقانون بايز، بينما خصصت المحاضرتين الخامسة والسادسة للمتغيرات العشوائية لنوعيتها المتقطعة والمستمرة، حيث يتم فيها تقديم كل من تعريف المتغيرات،

التوزيع الاحتمالي لهما، دالة التوزيع والمميزات العددية لكل منهما، في المحاضرة السابعة يتم التطرق لأهم التوزيعات الاحتمالية لكل من المتغير العشوائي المستمر والمتغير العشوائي المتقطع، في المحاضرة الثامنة يتم شرح العزوم والدوال المولدة للعزوم، مما يكسب الطالب قاعدة معرفية واسعة تعتبر أساس الإحصاء 03 والإحصاء 04 المبرمج خلال السنة الموالية.

المحاضرة الأولى: نظرية المجموعات

تمهيد

يستخدم مفهوم المجموعة بشكل كبير ومتكرر في الحياة اليومية، مثلاً: عند التكلم عن الطلبة (مجموعة طلبة)، الأساتذة المراقبين يوم الامتحان (مجموعة الأساتذة)، عند الذهاب إلى المكتبة نجد (مجموعة كتب).

1-تعريف المجموعة

يمكن تعريف المجموعة على أنها: "جملة من الأشياء، أو العناصر التي تشترك في صفة أو مجموعة من الصفات التي تمكن من تحديد انتماء أي عنصر إلى تلك المجموعة أم لا، لذلك يجب التحقق من دراسة أي مجموعة أنها معرفة تماماً". (بوحجلة، 2020/2019، صفحة 3)

يرمز عادة للمجموعة بحروف لاتينية كبيرة (A, B, C, Ω)، ورمز للعناصر المكونة للمجموعة بحروف صغيرة (a, b, c, ...)، وغالباً يستعمل الحرف x للتعبير عن عناصر المجموعة:

$$x \in A : x \text{ ينتمي إلى المجموعة } A$$

$$x \notin B : x \text{ لا ينتمي إلى المجموعة } B$$

2-طرق تعريف المجموعة

يتم تحديد المجموعة عادة إما: (مبارك أسبر، 2009/2008، صفحة 78)

2-1-طريقة العد (القائمة): بذكر كل عناصرها، وتستعمل هذه الطريقة لتعريف المجموعات القابلة للعد، مثلاً:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

2-2-طريقة القانون (الخواص): بذكر خاصية أو بعض الخواص التي تميزها، مثلاً:

$$A = \{x / x \text{ عدد فرد}, x < 11\}$$

3-أنواع المجموعات

من أهم المجموعات التي يجب معرفتها: (هاشمي، 2018، صفحة 2)، (بوحجلة، 2020/2019، صفحة 4)

3-1-المجموعة الجزئية: إذا كان كل عنصر من المجموعة A ينتمي بالضرورة إلى المجموعة B، في هذه الحالة نقول أن A محتواة في B، أي أن المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B، ويرمز لها بالرمز:

$$A \subset B$$

وعليه نقول:

- كل مجموعة محتواة في نفسها $A \subset A$

- إذا كانت $A \subset B$ و $B \subset A$ فإن $A = B$

- إذا كانت $A \subset B$ و $B \subset C$ فإن $A \subset C$

3-2- المجموعة الكلية: وتسمى أيضا بالفضاء، وهي المجموعة التي تحتوي على كافة المجموعات الجزئية

المدرسة، ويرمز لها عادة بالرمز Ω

3-3- المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر، ويرمز لها بالرمز ϕ وهي محتواة في أي

مجموعة $\phi \subset \Omega \wedge \phi \subset A$.

3-4- تجزئة المجموعة (مجموعة أجزاء المجموعة): وهي عبارة عن المجموعة التي عناصرها عبارة عن مجموعات،

إذا كانت E عبارة عن مجموعة فإن كل المجموعات الجزئية المكونة لـ E تسمى تجزئة المجموعة E ، ويرمز لها

عادة بالرمز: $P(E)$ ، وتكتب على الشكل التالي:

$$P(E) = \{x / \{x\} \subset E\}$$

ولتجديد عدد عناصر تجزئة المجموعة نعتمد على العلاقة (القانون) التالي:

$$\text{card}P(E) = 2^n$$

مثال: لدينا:

$$E = \{1,3,5\}$$

$$P(E) = 2^3 = 8$$

$$P(E) = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}, \phi\}$$

3-5- المجموعة المنتهية: هي المجموعة الخالية، أو المجموعة التي تحتوي على عدد محدود من العناصر (n عدد

عناصر المجموعة أو أصلي المجموعة)، ويكتب $\text{card}(A) = n$

مثال: لدينا:

$$A = \{1,3,5,7,9\}$$

$$\text{card}(A) = 5$$

$$\text{card}(\phi) = 0$$

3-6- المجموعة غير المنتهية: هي المجموعة التي تحتوي على عدد غير منتهى من العناصر مثل:

$$N = \{0,1,2,3,\dots,+\infty\}$$
 مجموعة الأعداد الطبيعية

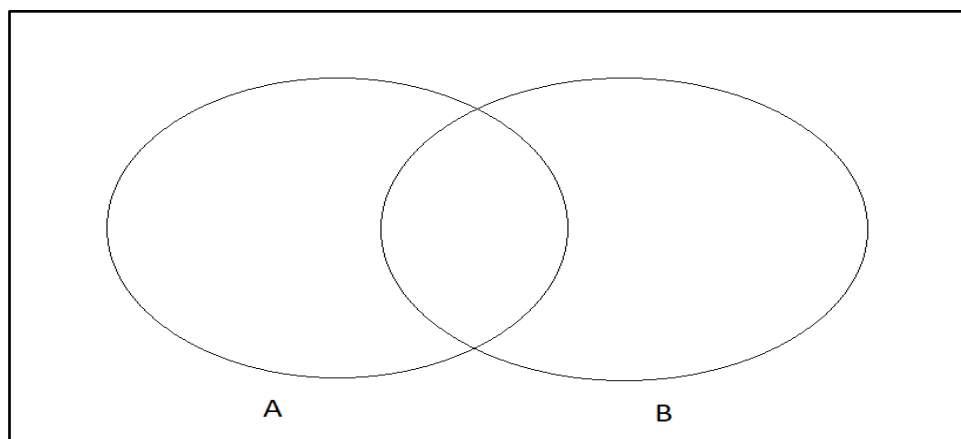
$$Z = \{-\infty,\dots,0,1,2,3,\dots,+\infty\}$$
 مجموعة الأعداد الصحيحة

- مجموعة الأعداد الحقيقية $R = \{-\infty, \dots, +\infty\}$

4- تمثيل المجموعات

يمكن تمثيل المجموعة الكلية Ω بمجموعة من النقاط الواقعة داخل مستطيل، ويتم تمثيل المجموعات الجزئية من Ω بمجموعة من النقاط الواقعة داخل دوائر، كما هي ممثلة في الشكل الموالي:

الشكل (01): مخطط VENN



المصدر: من إعداد أستاذة المادة

5- العمليات على المجموعات

من أهم العمليات التي يمكن تطبيقها على المجموعات: (امطير مفتاح، 2020، الصفحات 14-

16)

5-1- الاتحاد: اتحاد مجموعتين ولتكن A و B من الفضاء Ω هو مجموع العناصر المنتمية إلى المجموعتين A و B معاً، ويرمز لها بالرمز $A \cup B$ ، وتكتب على الشكل التالي:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

خواص

$$A \subset A \cup B -$$

$$B \subset A \cup B -$$

$$A \cup A = A -$$

$$A \cup \phi = A -$$

$$A \cup \Omega = \Omega -$$

$$B \cup \Omega = \Omega -$$

5-2- التقاطع

تقاطع المجموعتين A و B المنتميتان إلى الفضاء Ω هو مجموعة العناصر المنتمية إلى المجموعة A وفي نفس الوقت المنتمية إلى المجموعة B (العناصر المشتركة بين A و B)، ويرمز لها بالرمز $A \cap B$ ، وتكتب من الشكل:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

خواص

$$A \cap B \subset A -$$

$$A \cap B \subset B -$$

$$A \cap A = A -$$

$$A \cap \phi = \phi -$$

$$A \cap \Omega \subset A -$$

$$B \cap \Omega \subset -$$

- إذا كان $A \cap B = \phi$ فإن A و B منفصلتين متنافيتين والعكس صحيح

5-3- المتمم

متمم المجموعة A التي تنتمي إلى المجموعة الكلية Ω هي مجموع العناصر التي تنتمي إلى Ω ولا تنتمي إلى A ، ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$ وتكتب من الشكل:

$$\bar{A} = \{x / x \in \Omega \wedge x \notin A\}$$

خواص

$$A \cup \bar{A} = \Omega -$$

$$A \cap \bar{A} = \phi -$$

$$\overline{\bar{\Omega}} = \phi -$$

$$\bar{\phi} = \Omega -$$

$$\bar{\bar{A}} = \Omega - A -$$

$$\bar{\bar{B}} = \Omega - B -$$

$$A \subset B \Rightarrow \bar{A} \supset \bar{B} -$$

5-4- الفرق

الفرق بين المجموعتين A و B المنتميتان إلى المجموعة الكلية Ω ، هو مجموع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى المجموعة B في حالة التقاطع، ويرمز لها بالرمز $B - A$ وتكتب من الشكل التالي:

$$B - A = \{x / x \in B \wedge x \notin A\}$$

خواص

$$A - B = A - (A \cap B) = A \cap \bar{B} -$$

$$B - A = B - (A \cap B) = B \cap \bar{A} -$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) -$$

$$B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) -$$

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A) -$$

- العناصر التي لا تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B وتقع داخل المجموعة الكلية Ω هي $\bar{A} \cap \bar{B}$:

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \Omega - (A \cup B)$$

6-قوانين نظرية المجموعات (خواص)

من أهم خواص نظرية المجموعات ما يلي:

6-1-خاصية التبديل

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

6-2-خاصية التجميع

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

6-3-خاصية التوزيع

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6-4-قانون دي مورغان de morgans

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

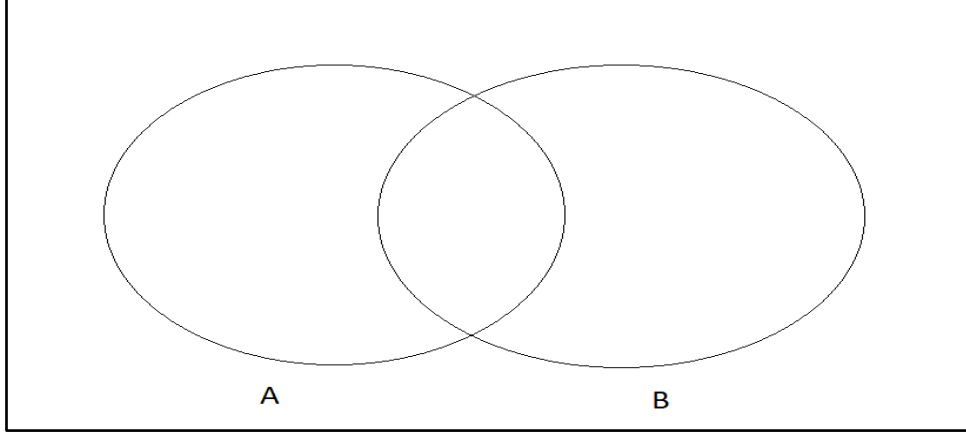
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

تمارين محلولة

تمرين 01

لدينا فضاء Ω يحتوي على مجموعتين جزئيتين A, B

- وضح حسب الشكل المقابل المجموعات التالية:



$$A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, \bar{A}, \bar{B}, \bar{A} \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap \bar{B}$$

تمرين 02

لتكن لدينا المجموعات التالية:

$$\Omega = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$$

$$A = \{2,6,10,14,18\}$$

$$B = \{4,6,8,12,14,16\}$$

$$C = \{2,6,10\}$$

- أوجد المجموعات التالية:

$$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, C \cap B, \overline{A \cap B}, \overline{A \cap C}, \overline{B \cup C}$$

تمرين 03

نقوم برمي حجر النرد مرة واحدة، إذا علمت أنه تم تشكيل المجموعات التالية:

A : الحصول على عدد زوجي؛

B : الحصول على عدد أقل تماماً من 5؛

C : الحصول على عدد فردي.

- أوجد ما يلي:

$$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, A \cap B, A \cup B, A - B, B - C, C \cap B, \overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}, \overline{B \cup C}$$

تمرين 04

لنفترض أن المجموعة A تتكون من 3 عناصر: $A = \{2, 4, 6\}$

1 - أوجد مجموعة أجزاء المجموعة A ؛

2 - إذا كان $Card A = 52$ أوجد $card P(A)$.

تمرين 05

لتكن A و B مجموعتان منتميتان إلى الفضاء Ω ، برهن أن:

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

الحل

تمرين 02

- إيجاد المجموعات:

$$\bar{A} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

$$\bar{B} = \{2, 10, 18, 20\}$$

$$\bar{C} = \{4, 8, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$A \cap B = \{6, 14\}$$

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$A - B = \{2, 10, 18\}$$

$$B - A = \{4, 8, 12, 16\}$$

$$C \cap B = \{6\}$$

$$\overline{A \cap B} = \{2, 4, 8, 10, 12, 16, 18, 20\}$$

$$\overline{A \cap C} = \{4, 8, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$\overline{B \cup C} = \{18, 20\}$$

تمرين 03

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$C = \{1, 3, 5\}$$

- تحديد المجموعات: $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, A \cap B, A \cup B, A - B, B - C, C \cap B, \overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}, \overline{B \cup C}$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

$$\bar{B} = \{5, 6\}$$

$$\bar{C} = \{2, 4, 6\}$$

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$A - B = \{6\}$$

$$B - C = \{2, 4\}$$

$$C \cap B = \{1, 3\}$$

$$\overline{A \cap B} = \{1, 3, 5, 6\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{5\}$$

$$\overline{B \cup C} = \{6\}$$

تمرين 04

$$A = \{2, 4, 6\}$$

1 - مجموعة أجزاء المجموعة A :

بما أن $CardA = 3$ فإن $CardP(A) = 2^3 = 8$ ، وبالتالي :

$$P(A) = \{\{\emptyset\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$$

2 - إذا كان $CardA = 52$ فإن $cardP(A) = 2^{52}$.

تمرين 05

برهان :

$$\begin{aligned} 1. A - B &= \{x / x \in A \wedge x \notin B\} = \{x / x \in A \wedge x \in \bar{B}\} = A \cap \bar{B} \\ 2. \overline{A \cup B} &= \{x / x \in \overline{A \cup B}\} = \{x / x \notin A \cup B\} = \{x / x \notin A \vee x \notin B\} = \\ &= \{x / x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}\} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ 3. \overline{A \cap B} &= \{x / x \in \overline{A \cap B}\} = \{x / x \notin A \cap B\} = \{x / x \notin A \wedge x \notin B\} = \\ &= \{x / x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}\} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ 4. A \cap (B \cup C) &= \{x / x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} = \\ &= \{x / (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

برهان أن :

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

بتطبيق خاصية التوزيع على الطرف الثاني : حيث نعلم أن :

$$A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

يصبح لدينا :

$$A = A \cap (B \cup \bar{B})$$

ونعلم أن :

$$(B \cup \bar{B}) = \Omega$$

بالتعويض في الطرف الثاني يصبح :

$$A = A \cap \Omega$$

ونعلم أن :

$$A \cap \Omega = A$$

بالتعويض في الطرف الثاني نجد أن :

$$A = A$$

وبالتالي العبارة:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

صحيح

المحاضرة الثانية: التجربة والحدث

تمهيد

معظم ميادين النشاط العلمي وحتى في الحياة اليومية توجد مشاهدات ومظاهر يمكن أن تتكرر عدة مرات تحت ظروف مشابهة، وقد تكون نتائج هذه التجارب (المظاهر) كمية، فنسجل نتيجة كل مشاهدة على شكل عدد، وقد تكون نتائجها كمية فنسجل صفة معينة (لون/ جنس/ وقوع وعدم وقوع أمر ما). في بعض الأحيان نكون على دراية دقيقة بالقوانين التي تتحكم في الظاهرة المدروسة، فيمكننا معرفة النتيجة مسبقا وبدقة عند إجراء تجربة ضمن ظروف ثابتة (مثلا: عند قياس شدة التيار الكهربائي في دائرة كهربائية، فرق الجهد بين قطبيها 150 فولط ومقاومتها الكلية 50 أوم، ستكون شدة التيار الكهربائي فيها 3 أمبير) وذلك بتطبيق القوانين الفيزيائية ونحصل على نفس النتيجة تحت نفس الظروف. وفي تجارب أخرى نلاحظ أن النتائج التي نحصل عليها عند تكرار التجربة تتغير بشكل غير منتظم من ملاحظة إلى أخرى، بصورة يستحيل التنبؤ معها بالنتيجة مسبقا (مثلا: تتبع جنس كل طفل يولد في مصلحة ولادة معينة نسجل نتيجة وصفية: ذكر/ أنثى، رمي قطعة نقدية: وجه/ كتابة)، وفي مثل هذه الحالات نقول أننا نقوم بتجربة عشوائية. (كونجو، 2000، الصفحات 128-129)

1-تعريف التجربة

يوجد نوعان من التجارب حسب ما تم التطرق إليه سابق:

1-1-تعريف التجربة العشوائية

هي كل تجربة قابلة للتكرار يمكن الانطلاق فيها بمعرفة كل النتائج الكلية الممكنة الحدوث، دون القدرة على تحديد النتيجة التي ستظهر كونها تخضع للعشوائية (الصدفة)
مثلا: عند فحص فصيلة دم لشخص ما، النتائج الممكنة: O, A, B, AB (موجب/ سالب)، لكن لا نعرف النتيجة (فصيلة الدم) مسبقا قبل ظهور نتائج التحليل. (بوحجلة، 2020/2019، صفحة 22)

1-2-تعريف التجربة النظامية

هي كل تجربة يمكن تحديد نتائجها مسبقا وفقا لقوانين علمية معروفة عند إجراء التجربة في نفس الظروف
مثلا: اتحاد ذرتي هيدروجين H_2 مع ذرة أكسجين O ينتج عنها ذرة ماء، وهذه نتيجة حتمية مهما كررنا التجربة (بوحجلة، 2020/2019، صفحة 22)

2- فراغ العينة (فضاء التجربة)

عبارة عن مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة عشوائية، ويرمز لها بالرمز Ω
 مثلاً: عند رمي قطعة نقدية، نتائج هذه التجربة إما ظهور الوجه F أو ظهور الكتابة T

$$\Omega = \{F, T\}$$

وعند رمي حجر النرد فإن فضاء التجربة يكتب من الشكل: (القبانجي و حمامة كمرجي،
 2012/2011، صفحة 59)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ويوجد نوعان من فراغ العينة: (محمد الخضيرى و مصطفى محمد السيد، صفحة 260)

2-1- فراغ العينة المحدود (نهائي)

هو الفراغ الذي يحتوي على عدد معين من ومحدود من العناصر

2-2- فراغ العينة غير المحدود (لانهاى)

هو الفراغ الذي يحتوي على عدد لانهاى من وغير محدود من العناصر

مثلاً

– إلقاء قطعة نقدية حتى تظهر الصورة

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$$

1: ظهور الصورة في الرمية الأولى؛

2: ظهور الصورة في الرمية الثانية؛

– تجربة اختيار نقطة داخل دائرة، فراغ العينة لهذه التجربة يتكون من جميع النقاط الواقعة داخل الدائرة

وعدها غي محدود (غير منته)

3- الحدث

هو أي مجموعة جزئية من فراغ العينة للتجربة Ω العشوائية، ويرمز له بالرمز المجموعة A, B,

C...، ويوجد عدة أنواع من الحوادث: (بشويوى، 2010، صفحة 13)

3-1- الحدث البسيط

هو الحدث الذي يحتوي على نتيجة واحدة فقط من النتائج الكلية لفراغ العينة، أي أنه مجموعة

جزئية من Ω تحتوي على عنصر واحد $cardA=1$

3-2- الحدث المركب

هو الحدث الذي يحتوي على أكثر من عنصر من عناصر فراغ العينة للتجربة العشوائية (مثلاً:

الحصول على عدد زوجي عند رمي زهرة النرد $(cardA=3)$

3-3- الحدث المؤكد

هو الحدث الذي يكون تحققه أكيد وحتمي، وعناصره تشكل من جميع عناصر فراغ العينة (المجموعة

الكلية) Ω للتجربة العشوائية.

مثلاً: A هو حدث ظهور عدد أقل تماماً من 7 عند رمي حجر النرد هو حدث أكيد

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

وفي نفس الوقت نجد

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

3-4- الحدث المستحيل

هو الحدث الذي لا يمكن أن يحدث أبداً، أي أنه الحدث الذي لا يحتوي على أي عنصر من عناصر

فراغ العينة Ω ، ويرمز له برمز المجموعة الخالية ϕ

مثلاً: A هو حدث ظهور عدد أكبر أو يساوي 7 عند رمي حجر النرد هو حدث مستحيل

$$A = \{ \} = \phi$$

3-5- الحوادث المتنافية وغير المتنافية

الحوادث المتنافية هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها في نفس الوقت، حيث وقوع أحدها ينفي وقوع

الآخر، وتقاطع حادثتين متنافيتين هو مجموعة خالية:

$$A \cap B = \{ \} = \phi$$

الحوادث غير المتنافية هي الحوادث التي يمكن أن تقع في نفس الوقت، حيث وقوع أحدها لا ينفي

وقوع الآخر، وتقاطع حادثتين غير متنافيتين لا يساوي المجموعة الخالية:

$$A \cap B \neq \{ \} \neq \phi$$

3-6-الحوادث المستقلة وغير المستقلة

الحوادث المستقلة هي التي لا يتأثر وقوع أحدهما بالآخر ولا يؤثر عليه، والعكس صحيح

مثلا

- رمي قطعة نقدية عدة مرات متتالية (حدث مستقل)؛
- سحب كرة من مجموعة كرات مع عدم إعادة الكرة يؤثر على عملية السحب الموالية (حدث غير مستقل)؛
- توقف آلة من مجموع آلات في مصنع لا يؤدي إلى توقف باقي الآلات أي عدم توقف الإنتاج (حدث مستقل)، والعكس صحيح.

مثال

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، لدينا الحوادث التالية:

A: ظهور العدد 3

B: ظهور عدد فردي

C: ظهور عدد أكبر من 6

D: ظهور العدد 2 على الأقل

E: ظهور العدد 4 على الأكثر

F: ظهور عدد أولي

G: ظهور عدد من قواسم 6

H: ظهور عدد زوجي أو فردي

1 - عين فراغ العينة لهذه التجربة؛

2 - أكتب الحوادث على شكل مجموعات وحدد نوعها

الحل

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad - \quad 1$$

2 - كتابة الحوادث على شكل مجموعات مع تحديد نوعها

الحدث	نوعه	شكله الرياضي
A: ظهور العدد 3	بسيط	$A = \{3\}$
B: ظهور عدد فردي	مركب	$B = \{1,3,5\}$
C: ظهور عدد أكبر من 6	مستحيل	$C = \{ \}$
D: ظهور العدد 2 على الأقل	مركب	$D = \{2,3,4,5,6\}$
E: ظهور العدد 4 على الأكثر	مركب	$E = \{1,2,3,4\}$
F: ظهور عدد أولي	مركب	$F = \{2,3,5\}$
G: ظهور عدد من قواسم 6	مركب	$G = \{1,2,3\}$
H: ظهور عدد زوجي أو فردي	مؤكد	$H = \{1,2,3,4,5,6\}$

تمارين محلولة

تمرين 01

في تجربة رمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين نقوم بتسجيل النتيجة:

1 - أكتب فضاء العينة

2 - عبر عن الحوادث التالية:

A: الحصول على الوجه مرة واحدة

B: الحصول على الكتابة في الرمية الثانية

C: الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل

D: الحصول على الوجه مرة واحدة على الأكثر

E: الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل وعلى الكتابة مرتين

تمرين 02

في تجربة رمي حجر نرد مرتين:

1 - أكتب فضاء العينة

2 - عبر عن الحوادث التالية:

A: الحصول على مجموع يساوي 7

B: الفرق بين العددين الناتجين يساوي 1 القيمة المطلقة لـ 1

C: الحصول على مجموع يساوي 9 على الأقل

D: الحصول على 1 في الرمية الأولى

E: الحصول على جداء يساوي 6 على الأكثر

F: الحصول على مجموع أقل من 2

تمرين 03

في عملية استطلاع للرأي تم اختيار شخصان، إذا كان إجابة كل منهما أما:

1: مع

0: محايد

-1: ضد

1 أكتب فضاء العينة لهذه التجربة

2 عبر كلاميا عن الحوادث التالية:

$$A = \{(1,1), ((1,0), (1,-1)\}$$

$$B = \{(-1,-1), (0,1,0), (1,1)\}$$

$$C = \{(-1,0), ((1,0), (0,-1), (0,1), (0,0)\}$$

3 عبر عن الحوادث التالية بمجموعات:

D: الشخص الثاني ضد القضية

E: واحد منهما على الأقل ضد القضية

F: واحد منها مع القضية والآخر ضدها

تمرين 04

في تجربة إلقاء عملة نقدية ثلاث مرات:

- أوجد الحوادث التالية مع تحديد عدد العناصر ونوع كل منها:

A: ظهور الصورة في الرمية الأولى

B: ظهور صورة في الرمية الثانية والثالثة

C: ظهور صورة واحدة على الأقل

D: ظهور صورة أو كتابة

E: ظهور ثلاث صور

F: ظهور أربع صور

G: عدم ظهور صورة في الرمية الأولى

تمرين 05

مجموعة بطاقات لعب تحتوي على أربعة ألوان مختلفة (الأحمر، الأسود، الأخضر، الأزرق) كل لون

مرقم من 1 إلى 13

- ابحث عن المجموعة الكلية في الحالات التالية:

1 - إذا أخذنا في الاعتبار الأرقام فقط

2 - إذا أخذنا في الاعتبار الألوان فقط

3 - إذا أخذنا في الاعتبار الأرقام والألوان معا

الحل

تمرين 01

1 - فضاء العينة

$$\Omega = \{(F, P), ((F, F), (P, P), (P, F))\}$$

2 - الحوادث

$$A = \{(F, P), (P, F)\}$$

$$B = \{(F, P), (P, P)\}$$

$$C = \{(F, P), ((F, F), (P, F))\}$$

$$D = \{(F, P), (P, P), (P, F)\}$$

$$E = \{ \}$$

تمرين 02

1 - فضاء العينة

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

2 - الحوادث

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (1,6)\}$$

$$B = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (4,3), (3,4), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$$

$$C = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$D = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$$

$$E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (5,1), (6,1)\}$$

$$F = \{ \}$$

تمرين 03

1 - فضاء العينة

$$\Omega = \{(1,1), (1,0), (1,-1), (0,1), (0,0), (0,-1), (-1,1), (-1,0), (-1,-1)\}$$

2 - التعبير عن الحوادث كلاميا

A: الشخص الأول مع القضية

B: للشخصان نفس الموقف

C: شخص واحد على الأقل محايد

3 - الحوادث

$$D = \{(1,-1), (0,-1), (-1,-1)\}$$

$$E = \{(1,-1), (0,-1), (-1,1), (-1,0), (-1,-1)\}$$

$$F = \{(1,-1), (-1,1)\}$$

تمرين 04

$$\Omega = \{(F, F, F), (F, F, P), (F, P, F), (F, P, P), (P, F, F), (P, F, P), (P, P, F), (P, P, P)\}$$

$$A = \{(F, F, F), (F, F, P), (F, P, F), (F, P, P)\}$$

$$\text{card}A = 4$$

$$B = \{(F, F, F), (P, F, F)\}$$

$$\text{card}B = 2$$

$$C = \{(F, F, F), (F, F, P), (F, P, F), (F, P, P), (P, F, F), (P, F, P), (P, P, F)\}$$

$$\text{card}C = 7$$

$$D = \{(F, F, F), (F, F, P), (F, P, F), (F, P, P), (P, F, F), (P, F, P), (P, P, F), (P, P, P)\}$$

$$\text{card}D = 8$$

$$E = \{(F, F, F)\}$$

$$\text{card}E = 1$$

$$F = \{ \}$$

$$\text{card}F = 0$$

$$G = \{(P, F, F), (P, F, P), (P, P, F), (P, P, P)\}$$

$$\text{card}G = 4$$

تمرين 05

1 - إذا أخذنا في الاعتبار الأرقام فقط

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$$

2 - إذا أخذنا في الاعتبار الألوان فقط

$$\Omega = \{R, N, V, B\}$$

3 - إذا أخذنا في الاعتبار الأرقام والألوان معا

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} 1R, 2R, 3R, 4R, 5R, 6R, 7R, 8R, 9R, 10R, 11R, 12R, 13R, \\ 1N, 2N, 3N, 4N, 5N, 6N, 7N, 8N, 9N, 10N, 11N, 12N, 13N, \\ 1V, 2V, 3V, 4V, 5V, 6V, 7V, 8V, 9V, 10V, 11V, 12V, 13V, \\ 1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, 8B, 9B, 10B, 11B, 12B, 13B \end{array} \right\}$$

المحاضرة الثالثة: التحليل التوافقي

تمهيد

في حالة البيانات الكبيرة، أي حالة التجارب العشوائية التي تكون نتائجها كبيرة جدا لدرجة يصعب أو يستحيل عدّها أو كتابتها مباشرة، يتم الاعتماد على صيغ رياضية يتم المفاضلة بينها على أساس ثلاثة معايير أساسية تطرح في شكل أسئلة كما يلي:

- 1 - هل تعتمد عملية العد على ترتيب جميع عناصر المجموعة أو جزء منها فقط؟
- 2 - هل عملية ترتيب العناصر مهم أم غير مهم؟
- 3 - هل يمكن استعمال عنصر من المجموعة أكثر من مرة واحدة (الإرجاع)؟ (طويطي، 2018/2017، الصفحات 12-13)

1-المبدأ الأساسي في العد (طرق العد)

إذا افترضنا أن الحدثين A و B لا مكن أن يقعا معا (حدثان متنافيان) و A يمكن أن يحدث ب n طريقة و B يمكن أن يحدث ب m طريقة، فإن وقوع A أو B يتم ب $(n+m)$ طريقة، وهذا يسمى طريقة الجمع، ووقوع A و B يتم ب $(n.m)$ طريقة، وهذا يسمى طريقة الضرب (كونجو، 2000، صفحة 206) وبصفة عامة، إذا افترضنا أن الحدث A_i ($i=1, n$) يمكن أن يقع ب k_i طريقة، فإن:

- عدد وقوع الحدث A_1 أو A_2 أو A_3 أو A_n يتم ب:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n \quad \text{حالة عامة لقاعدة الجمع}$$

- عدد وقوع الحدث A_1 و A_2 و A_3 و A_n يتم ب:

$$k_1.k_2.k_3.\dots.k_n \quad \text{حالة عامة لقاعدة الضرب (مبارك أسير، 2009/2008، الصفحات 86-87)}$$

مثال 01

إذا كان على الطالب التسجيل في إحدى الكليات وحظي بالقبول في 3 كليات في مستغانم، كليتين في وهران، و 3 كليات في غليزان.

- ما هو عدد الاختيارات التي تمكن الطالب في التسجيل في كلية واحدة فقط؟

الحل

عدد الطرق (الاختيارات) تحسب بطريقة الجمع وهي: $3+2+3=8$

مثال 02

إذا كان بالإمكان السفر من الموقع A إلى الموقع B بـ 5 طرق، ومن الموقع B إلى الموقع C بـ 3 طرق.

- بكم طريقة يمكن السفر من الموقع A إلى الموقع C

الحل

يمكن حساب عدد الطرق التي يمكن بها السفر من الموقع A إلى الموقع C بطريقة الضرب وهي:

$$5 \times 3 = 15$$

في حالة التجارب العشوائية التي تتم على عدد من المراحل تستعمل طريقة الشجرة، وذلك من أجل حساب عدد نتائج التجربة الممكنة

مثال 03

للتأكد من صلاحية المصاييح قبل الشراء يتم اختبار 3 مصاييح، لحساب النتائج الممكن الحصول

عليها في هذه الحالة نستخدم طريقة الشجرة:

D: مصباح تالف

N: مصباح غير تالف

		D	DDD
	D	N	DDN
D		D	DND
	N	N	DNN
		D	NDD
	D	N	NDN
N		D	NND
	N	N	NNN

$$2.2.2=8$$

مثال 02

إذا أردنا تصنيف مجتمع ما وفق الجنس:

F: أنثى

M: ذكر

ووفق الحالة العائلية:

A: أعزب

B: متزوج

C: مطلق

D: أرمل

F	A	FA
	B	FB
	C	FC
	D	FD
M	A	MA
	B	MB
	C	MC
	D	MD

$$2.4=8$$

2-التبديلة

هي عدد الحالات الممكنة لترتيب كل عناصر المجموعة التي عددها n ، وعند الحساب يتم مراعاة

إمكانية تكرار أو عدم تكرار العناصر ضمن المجموعة، ويرمز لها بالرمز P_n ، ونميز بين الحالات التالية:

2-1-دون تكرار العنصر

أي أن جميع العناصر المكونة للمجموعة مختلفة عن بعضها البعض، وتحسب رياضياً حسب العلاقة

التالية:

$$P_n = n!$$

مثال

بكم طريقة يمكن ترتيب 7 كتب على رف حيث كل كتاب يوضع في مكان واحد فقط (عدد الأماكن مساو لعدد الكتب):

$$P_n = n! = 7! = 5040 \quad \text{طريقة}$$

2-2- مع تكرار العنصر

أي أن المجموعة تحتوي على عناصر متشابهة (مكررة)، وتحسب رياضيا كما يلي:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

مثال

عدد التباديل المكونة لكلمة statistics

$$s = 3, t = 3, a = 1, i = 2, c = 1$$

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{10!}{3! 3! 1! 2! 1!} = 50400$$

2-3- التبديلة الدائرية

تستعمل عند تثبيت أحد العناصر ثم ترتيب بقية العناصر حوله، وتحسب رياضيا حسب العلاقة

التالية:

$$P_n = (n-1)!$$

مثال

بكم طريقة يمكن ترتيب عائلة مكونة من أم وأب و 5 أطفال للجلوس حول مائدة طعام يكون على رأسها الأب:

$$P_n = (n-1)! = (7-1)! = 720$$

3- الترتيبية

هي عملية اختيار وترتيب عدد من العناصر k من مجموعة كلية عدد عناصرها n ، من أجل ترتيبها وفق الحالات الممكنة (الترتيب مهم)، ويرمز لها بالرمز A_n^k ، وعند الحساب يتم مراعاة طريقة السحب (السحب بالإرجاع أو السحب دون إرجاع)

3-1- السحب دون إرجاع

تستعمل عند تشكيل مجموعات جزئية عدد عناصرها k من مجموعة كلية عدد عناصرها n مع السحب دون إرجاع، أي أن كل عنصر يستعمل مرة واحدة فقط، ويتم حسابها وفق العلاقة الرياضية التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال

كم كلمة سر يمكن تكوينها من 3 حروف غير مكررة مسحوبة على التوالي اعتمادا على الحروف التالية:

$$\Omega = \{a, b, c, d, e\}$$

الحل

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

3-2- السحب بالإرجاع (القائمة)

تستعمل عند تشكيل مجموعات جزئية عدد عناصرها k من مجموعة كلية عدد عناصرها n عندما يكون السحب بالإرجاع مع إمكانية تكرار أي عنصر فيها، ويتم حسابها وفق العلاقة الرياضية التالية:

$$A_n^k = n^k$$

مثال

ما هي عدد كلمات السر الممكنة في حالة السماح بتكرار الأحرف في المثال السابق

الحل

$$A_n^k = n^k = 5^3 = 125$$

4- التوفيق

تعتبر أكثر طرق العد استخداما في نظرية الاحتمالات، وهي عدد الحالات الممكنة لتكوين مجموعات جزئية عدد عناصرها k من مجموعة كلية عدد عناصرها n دون الاهتمام بالترتيب (الترتيب غير مهم)، ويرمز لها بالرمز C_n^k ، وعند الحساب يؤخذ بعين الاعتبار إمكانية تكرار العناصر أولا، لذلك نميز بين الحالات التالية:

4-1- السحب دون إرجاع

عندما يتم تشكيل مجموعات جزئية عدد عناصرها k من مجموعة كلية عدد عناصرها n دون وجود عناصر مكررة، أو عند السحب دون إرجاع العنصر للمجموعة الكلية، ويتم استعمال الصيغة الرياضية التالية:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

مثال

ما هي عدد الحالات التي يمكن فيها تكوين ممثل طلبة ونائبه (2ممثلين) من مجموعة طلبة مكونة من

10 طلبة

الحل

في هذه الحالة نطبق قانون التوفيق لأن الترتيب غير مهم ودون إرجاع، لأنه بمجرد اختيار الطالب لا يمكن إعادته إلى المجموعة

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = 45$$

4-2- السحب بالإرجاع

عند تشكيل مجموعات جزئية عدد عناصرها k من مجموعة كلية عدد عناصرها n مع إرجاع العنصر كل مرة بعد تشكيل مجموعة جزئية إلى المجموعة الكلية، مما يتيح ظهور العنصر أكثر من مرة (في أكثر من مجموعة جزئية)، ويتم استعمال الصيغة الرياضية التالية:

$$C_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

مثال

لدينا مجموعة طلبة مكونة من 6 طلبة، إذا تم تشكيل عينات من 3 طلبة للتعرف على مستواهم في

مادة الإحصاء 2، فما هو عدد العينات الممكن تشكيلها إذا تم السحب بالإرجاع

الحل

$$C_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(6+3-1)!}{(6-1)!3!} = 56$$

5-صيغة نيوتن

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 - C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots - C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} a^{n-k} b^k$$

تمرين

أحسب في كل حالة من الحالات التالية عدد الطرق الممكنة مع الإشارة إلى نوع طريقة الحساب:

- 1 - ترتيب 3 كتب مأخوذة من بين 8 كتب مختلفة (ترتيبة دون ارجاع)
- 2 - تقسيم 7 دمي بين 3 أطفال على أن يأخذ الطفل الأول 3 دمي، والثاني 2 والثالث 2 (تبديلة مع التكرار)
- 3 - عدد الكلمات المؤلفة من 3 حروف مختلفة والمشكلة من حروف الأبجدية العربية (28 حرف) (ترتيبة دون ارجاع لأن الترتيب في العربية يشكل فرق)
- 4 - عدد طرق اختيار 3 لجان من 10 طلبة، حيث تضم اللجنة الأولى 5 طلبة، والثانية 3 والثالثة 2 (تبديلة مع تكرار)
- 5 - عدد التبديلات التي يمكن تشكيلها من حروف اسمك باللغة الإنجليزية (تبديلة)
- 6 - الطرق الممكنة للفوز بالمراتب الأربعة الأولى في سباق اشتركت فيه 8 جياذ (ترتيبة دون ارجاع)
- 7 - توزيع 8 هدايا على 8 طلبة الأوائل على الدفعة (تبديلة/ ترتيبة دون ارجاع)
- 8 - عدد المصافحات عندما يلتقي 3 أشخاص في آن واحد (توفيقه دون ارجاع)
- 9 - دعوة 5 زملاء فقط لمناسبة معينة من بين 8 زملاء (توفيقه دون ارجاع)
- 10 - اختيار لجنة مؤلفة من 3 طلبة و 4 طالبات من بين 5 طلبة و 6 طالبات (توفيقه دون ارجاع)

الحل

- 1 - ترتيبة دون ارجاع

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

- 2 - تبديلة مع التكرار

$$P = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

3 - ترتيبية دون ارجاع

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{28!}{(28-3)!} = 19656$$

4 - تبديلة مع التكرار

$$P = \frac{10!}{3!5!2!} = 2520$$

5 - تبديلة إما بالإرجاع أو دون ارجاع

6 - ترتيبية دون إرجاع

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$$

7 - تبديلة دون تكرار

$$P = n! = 8! = 40320$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{8!}{(8-8)!} = 40320$$

8 - توفيقية دون إرجاع

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

9 - توفيقية دون إرجاع

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{8!}{(8-5)!5!} = 56$$

10 - توفيقية دون إرجاع

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = 15$$

$$10.15 = 150$$

تمارين محلولة

تمرين 01

ما هي عدد الحالات الممكنة:

- 1 - لترتيب عناصر المجموعة $\Omega = \{A, B, C\}$
- 2 - لترتيب 10 أطفال قسم روضة في الصف
- 3 - من ترتيب حروف كلمة: recherche, statistique, comptabilité, finance

تمرين 02

إذا تم سحب كرتين من كيس يحتوي على 3 كرات بألوان مختلفة، حيث يتم السحب على التوالي مع إعادة الكرة إلى الكيس بعد كل سحبة (قبل السحب الموالي)

تمرين 03

يراد تركيب شبكة خطوط هاتف في مدينة معينة، فإذا علمت أن رقم الهاتف مكون من 6 أرقام أولها من اليسار 3 أو 4

- كم خط هاتفي يمكن تركيبه في هذه الشبكة؟

تمرين 04

في امتحان مقياس الاحصاء2، على الطلبة الإجابة على 8 أسئلة من بين 10

- 1 - كم من اختيار أمام الطلبة (بكم طريقة يمكن الإجابة على الامتحان)؟
- 2 - بكم طريقة يمكن للطلبة الإجابة على الامتحان إذا كانت الثلاث أسئلة الأولى إجبارية؟
- 3 - بكم طريقة يمكن للطلبة الإجابة إذا كان يجب الإجابة على 4 أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمسة الأولى؟

تمرين 05

فوج لأحد دفعات العلوم الاقتصادية يتكون من 20 طالب وتود الإدارة تكوين عدد من المجموعات من 5 طلبة لزيارة ميدانية لأحد المؤسسات الاقتصادية
بكم طريقة يمكن للإدارة تكوين هذه المجموعات

تمرين 06

أوجد قيمة N في كل حالة من الحالات التالية:

$$A_n^2 = 72 \quad - \quad 1$$

$$A_n^4 = 42A_n^2 \quad - \quad 2$$

تمرين 07

يراد اختيار لجنة مكونة من 5 أعضاء ينتخبون من بين 10 أساتذة و 30 طالب، بكم طريقة يمكن:

1 - اختيار اللجنة؟

2 - اختيار لجنة مكونة من 2 أساتذة و 3 طلبة؟

3 - اختيار لجنة من 4 أساتذة على الأقل؟

4 - اختيار لجنة من أساتذ على الأكثر؟

الحل

تمرين 01

1 - لا توجد عناصر مكررة (تبديلة دون تكرار):

$$P_n = n! = 3! = 6$$

(ABC), (ACB), (BAC), (BCA), (CAB), (CBA)

2 - تبديلة دون تكرار:

$$P_n = n! = 10! = 3628800$$

3 - تبديلة مع تكرار العنصر:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

recherche, $n = 9, n_r = 2, n_e = 3, n_c = 2, n_h = 2$

$$P = \frac{9!}{2!3!2!2!} = \frac{362880}{48} = 7560$$

statistique, $n = 11, n_s = 2, n_t = 3, n_a = 1, n_i = 2, n_q = 1, n_u = 1, n_e = 1$

$$P = \frac{11!}{2!3!1!2!1!1!1!} = \frac{39916800}{24} = 1663200$$

comptabilité, $n = 12, n_t = 2, n_i = 2$

$$P = \frac{12!}{2!2!} = 119750400$$

finance, $n = 7, n_n = 2$

$$P = \frac{7!}{2!} =$$

تمرين 02

يتم السحب على التوالي (الترتيب مهم)، مع إعادة الكرة (سحب بالإرجاع): ترتيبية بالإرجاع - قائمة:

$$A_n^k = n^k = 3^2 = 9$$

تمرين 03

الرقم 1	الرقم 2	الرقم 3	الرقم 4	الرقم 5	الرقم 6
3	فيه 10	فيه 10	فيه 10	فيه 10	فيه 10
4	أرقام	أرقام	أرقام	أرقام	أرقام

باقي الخانات يمكن ملئ كل منها بعشرة طرق (أرقام)، نطبق طريقة الضرب

$$2.10.10.10.10.10 = 2.10^5$$

تمرين 04

1 - الترتيب غير مهم ودون تكرار: توفيقه دون تكرار

$$n = 10, k = 8$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{10!}{(10-8)!8!} = 45$$

2 - عند الإجابة عن 3 أسئلة الأولى يتبقى للطالب 7 أسئلة اختيارية، عليه الإجابة على 5 أسئلة منها

(الترتيب غير مهم ودون تكرار): توفيقه دون تكرار

$$n = 7, k = 5$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{7!}{(7-5)!5!} = 21$$

3 - إذا أجاب الطالب على 4 أسئلة الأولى على الأقل معناه:

- يجب على 4 أسئلة (يختار من 5 أسئلة الأولى)

$$n = 5, k = 4$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{5!}{(5-4)!4!} = 5$$

ويتبقى له 4 أسئلة من الخمسة المتبقية

$$n = 5, k = 4$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{5!}{(5-4)!4!} = 5$$

ثم نطبق طرق العد (طريقة الضرب): $5 \cdot 5 = 25$

- أو يجب على 5 أسئلة (من 5 أسئلة الأولى) ويتبقى له 3 من بين 5 الأسئلة المتبقية

$$n = 5, k = 3$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$$

وبتطبيق طرق العد (طريقة الجمع): $25 + 10 = 35$

تمرين 05

الترتيب في المجموعة غير مهم (توفيقه)، ولا يمكن للطالب أن يكون في أكثر من فوج (دون إرجاع):

$$n = 20, k = 5$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{20!}{(20-5)!5!} = 15504$$

تمرين 06

يمكن أن تكون ترتيبية بالإرجاع أو دون إرجاع:

$$A_n^2 = 72 \quad - \quad 1$$

إذا كانت قائمة:

$$A_n^2 = 72 \Rightarrow A_n^2 = n^2 \Rightarrow n^2 = 72 \Rightarrow n = \sqrt{72} \Rightarrow n = 8,48$$

إذا كانت ترتيبية دون إرجاع:

$$A_n^2 = 72 \Rightarrow A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 72 \Rightarrow n! = (n-2)!72 \Rightarrow$$

$$n(n-1)(n-2)! = (n-2)!72 \Rightarrow n(n-1) = 72 \Rightarrow n^2 - n = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) = 1 + 288 = 289 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17$$

$$n' = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{1-17}{2} = -8$$

$$n'' = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{1+17}{2} = 9$$

$$A_n^4 = 42A_n^2 \quad - \quad 2$$

إذا كانت قائمة:

إذا كانت ترتيبية دون إرجاع:

$$A_n^4 = 42A_n^2 \Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = 42 \frac{n!}{(n-2)!} \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 42 \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$$

$$(n-2)(n-3) = 42 \Rightarrow n^2 - 3n - 2n + 6 = 42 \Rightarrow n^2 - 5n + 6 - 42 = 0 \Rightarrow n^2 - 5n - 36 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13$$

$$n' = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{5-13}{2} = -4$$

$$n'' = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{5+13}{2} = 9$$

تمرين 07

الترتيب غير مهم (توفيقية)، لا يمكن أن يظهر العضو مرتين في اللجنة (دون إرجاع):

$$1 - \text{اختيار اللجنة}$$

$$n = 40, k = 5, n_p = 10, n_e = 30$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{40!}{(40-5)!5!} = 658008$$

2 - في اللجنة 2 أستاذة و 3 طلبة

$$n = 40, k = 5, n_p = 10, n_e = 30$$

$$\begin{cases} C_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!2!} = 45 \\ C_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!3!} = 4060 \end{cases} \Rightarrow 45.4060 = 182700$$

3 - في اللجنة 4 أستاذة على الأقل (إما 4 أو 5)

حالة 4 أستاذة:

$$n = 40, k = 5, n_p = 10, n_e = 30$$

$$\begin{cases} C_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!4!} = 210 \\ C_{30}^1 = \frac{30!}{(30-1)!1!} = 30 \end{cases} \Rightarrow 210.30 = 6300$$

حالة 5 أستاذة:

$$n = 40, k = 5, n_p = 10, n_e = 30$$

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!5!} = 252$$

إذن بتطبيق طريقة الجمع في العد

$$6300 + 252 = 6552$$

4 - في اللجنة 4 أستاذ واحد على الأكثر (إما أستاذ أو لا يوجد أساس)

حالة أستاذ واحد:

$$n = 40, k = 5, n_p = 10, n_e = 30$$

$$\begin{cases} C_{10}^1 = \frac{10!}{(10-1)!1!} = 10 \\ C_{30}^4 = \frac{30!}{(30-4)!4!} = 27405 \end{cases} \Rightarrow 10.27405 = 274050$$

حالة عدم وجود ولا أستاذ:

$$n = 40, k = 5, n_p = 10, n_e = 30$$

$$C_{30}^5 = \frac{30!}{(30-5)!5!} = 142506$$

إذن بتطبيق طريقة الجمع في العد

$$274050 + 142506 = 416556$$

المحاضرة الرابعة: نظرية الاحتمالات

1-تعريف الاحتمال

مر الاحتمال على العديد من التعريفات منذ ظهوره، وتمثل في:

1-1-التعريف الكلاسيكي للاحتمال (الاحتمال النظري)

إذا كان لدينا فضاء تجربة Ω يحتوي على n عدد من العناصر كل منها له نفس الفرصة في الظهور، وكان لدينا حدث A يحتوي على k من العناصر المتماثلة، أي أن كل نتيجة من نتائجها متماثلة الفرص في الظهور أيضا، فإن احتمال وقوع الحدث A هو:

عدد الحالات الموافية لـ a

عدد الحالات الكلية الممكنة لـ Ω

ويرمز للاحتمال بالرمز $P(A)$ ، أي أن:

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{n}{k}$$

ومن أجل الاعتماد على الاحتمال بالأسلوب الكلاسيكي يجب توفر شرطين: (العمراوي، صفحة

(4)

1 - أن يكون عدد الإمكانات (النتائج) منته (نهائي)؛

2 - أن تكون الحوادث متكافئة الاحتمال (متكافئة فرص الحدوث)

مثال

في تجربة رمي زهرة نرد مع قطعة نقدية في آن واحد، ما هو احتمال ظهور عدد زوجي مع الوجه

الحل

$$\Omega = \{1F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F, 1P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P\} \text{card}\Omega = 12$$

$$A = \{2F, 4F, 6F\} \text{card}A = 3$$

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

1-2-التعريف الاحصائي للاحتمال (التجريبي)

هذا التعريف لا يشترط تساوي فرص ظهور النتائج، أي أن نتائج التجربة غير متكافئة الفرص، بل

هو مبني على إجراء التجربة عددا كبيرا من المرات في نفس الشروط مقداره n مرة، فإذا وقع الحدث A بمقدار

x مرة فإننا نسمي النسبة بالتردد النسبي (التكرار النسبي) للحدث A ، ونرمز له بالرمز f_n ، أي أن:

$$f_n = \frac{x}{n}$$

يعتمد هذا المدخل على الإجراء الفعلي للتجارب وتسجيل النتائج (المشاهدات) عن التجربة (الظاهرة) محل الدراسة، ومن ثم استنتاج (حساب) الاحتمال المقابل لذلك. (بشويوي، 2010، صفحة 22)

من أجل الاعتماد على حساب الاحتمال بالأسلوب التجريبي يجب توفر شرطين:

- 1 - إجراء التجارب في نفس الظروف؛
- 2 - إجراء التجارب بعدد كبير (التجارب بعدد قليل قد تخضع للصدفة).

مثال

في مؤسسة لصناعة المصابيح تريد مصلحة الجودة التأكد من جودة المصابيح، فوجدت أنه يوجد 60 مصباح غير صالح للاستعمال من بين 2000 مصباح

- 1 - ما هو احتمال الحصول على مصباح تالف؟
- 2 - ما هو احتمال الحصول على مصباح صالح؟

الحل

$$n = 2000, x = 1940 \quad - 1$$

$$P(A) = f_n = \frac{x}{n} = \frac{60}{2000} = 0,03$$

$$n = 2000, x = 60 \quad - 2$$

$$P(\bar{A}) = f_n = \frac{x}{n} = \frac{1940}{2000} = 0,97$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 0,03 + 0,97 = 1$$

1-3-التعريف الرياضي للاحتمال colmogorov

يشترط التعريف الكلاسيكي تساوي فرص ظهور النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، ويشترط التعريف التجريبي تكرار التجربة عددا كبيرا من المرات، وغالبا ما يتعذر تحقيق هذان الشرطان أو أحدهما. لتفادي هذه العيوب تم تطوير تعريف أدق للاحتمال يسمى التعريف الرياضي للاحتمال، وهو مبني على أسس (مسلمات) نظرية الاحتمالات: (مبارك أسير، 2009/2008، صفحة 103)

$$0 \leq P(A) \leq 1 \Rightarrow P(A) = [0,1] \quad - 1$$

$$P(\Omega) = 1 \quad - 2$$

3 - احتمال اجتماع متتالية قابلة للعد من الحوادث $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ المنتهية والمتنافية مثنى

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \text{ مثنى يساوي مجموع احتمالات هذه الحوادث:}$$

وهذه البديهيات تسمى بالبديهيات المعرفة للاحتمال

مثال

لدى الكلية 12 جهاز كمبيوتر في المخزن، 2 منها معطلة، تم تسليم قسم العلوم الاقتصادية 4 منها

1 - ما هو احتمال عدم وجود ولا جهاز معطل ضمن الأجهزة المستلمة من طرف القسم؟

2 - ما هو احتمال وجود جهاز واحد معطل ضمن الأجهزة المستلمة من طرف القسم؟

الحل

1 - احتمال عدم وجود ولا جهاز معطل ضمن الأجهزة المستلمة من طرف القسم

عدد الحالات المواتية لـ A

عدد الحالات الكلية الممكنة لـ Ω

$$C_{12}^4 = 495 \text{ عدد الحالات الممكنة}$$

$$C_{10}^4 = 210 \text{ عدد الحالات المواتية}$$

$$\frac{210}{495} = 0,40$$

2 - احتمال عدم وجود ولا جهاز معطل ضمن الأجهزة المستلمة من طرف القسم

عدد الحالات المواتية لـ a

عدد الحالات الكلية الممكنة لـ Ω

$$C_{12}^4 = 495 \text{ عدد الحالات الممكنة}$$

$$C_2^1 C_{10}^3 = 2.240 \text{ عدد الحالات المواتية}$$

$$\frac{480}{495} = 0,48$$

2-خواص الاحتمال

أهم خواص الاحتمال تتمثل فيما يلي: (طويطي، 2018/2017، الصفحات 16-18)

1. احتمال الحدث المستحيل

$$P(A) = 0$$

2. احتمال الحدث المتمم

$$\begin{aligned}
P(A) + P(\bar{A}) &= P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) \\
P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\
P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}$$

3. احتمال الحوادث المتنافية

إذا كان A و B حدثين متنافيين فإن:

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \phi \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B)
\end{aligned}$$

وبشكل عام تأخذ الصيغة العبارة التالية:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

4. احتمال الحوادث غير المتنافية

إذا كان A و B حدثين غير متنافيين فإن:

$$\begin{aligned}
A \cap B &\neq \phi \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

وبشكل عام تأخذ الصيغة العبارة التالية:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ k=2}}^n P(A_i \cap A_k) + \sum_{\substack{i=1 \\ k=2 \\ m=3}}^n P(A_i \cap A_k \cap A_m) - \dots + \dots - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

5. احتمال الحوادث المستقلة (قاعدة الضرب)

احتمال وقوع حدثين في نفس الوقت مع لأحدهما مستقلين عن بعضهما البعض يعبر عنه بالصيغة

التالية: (محمد الحضيرى و مصطفى محمد السيد، صفحة 287)

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

وبشكل عام نكتب الصيغة التالية:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right)$$

6. احتمال الحوادث غير المستقلة (قاعدة الضرب)

احتمال وقوع حدثين غير مستقلين في نفس الوقت، أي أن وقوع الحدث A يشترط وقوع الحدث

B، يكتب كما يلي:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} / P(B) \neq 0$$

7. احتمال عمليتي التقاطع والاتحاد

$$P[A \cup (B \cap C)] = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$P[A \cap (B \cup C)] = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

8. احتمال دي مورغان

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$$

ملاحظات

1 - التنافي: يكون لحدثين A و B متنافيين إذا كانت مجموعة التقاطع بينهما هي مجموعة خالية،

أي أن احتمال التقاطع يساوي 0، والعكس صحيح، وتكتب رياضيا بالعلاقة التالية:

$$(A \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0 \text{ متنافيين}$$

$$(A \cap B) \neq \emptyset \Leftrightarrow P(A \cap B) \neq 0 \text{ غير متنافيين}$$

2 - الاستقلالية: إذا كان احتمال وقوع الحدث A لا يعتمد ولا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع

الحدث B، في هذه الحالة يكون الحدثين مستقلين، والعكس صحيح:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \text{ مستقلين}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A).P(B) \text{ غير مستقلين}$$

$$P(A \cap B) > 0, P(A) > 0, P(B) > 0$$

مثال

إذا كان احتمال غياب أستاذة الإحصاء عن المحاضرة الأولى يساوي 0,2، واحتمال غيابها عن

المحاضرة الثانية 0,15، واحتمال غيابها عن المحاضرتين معا 0,05

الحل

A: غياب الأستاذة عن المحاضرة 1

B: غياب الأستاذة عن المحاضرة 2

(A ∩ B): غياب الأستاذة عن المحاضرة 1 و 2

A و B حدثين غير متنافيين لأن (A ∩ B) ≠ ∅

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,15 - 0,05 = 0,3$$

3- الاحتمال الشرطي

عندما يكون احتمال وقوع حدث معين وليكن B مرتبط باحتمال حدوث حدث آخر وليكن A،

يسمى هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطي، ونرمز له بالرمز $P(B/A)$ ، ويحسب بالعلاقة التالية:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; P(A) \neq 0$$

مثال

نرمي حجر نرد مرة واحدة ونسجل الحوادث التالية:

A: ظهور عدد فردي $A = \{1,3,5\}$

B: ظهور مضاعفات العدد 3 $B = \{2,4,6\}$

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- ما هو احتمال الحصول على عدد فردي ومضاعف للعدد 3

الحل

$$A \cap B = \{3\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4- خواص الاحتمال الشرطي

$$1- 0 \leq P(A/B) \leq 1$$

$$2- P(\Omega/B) = 1, P(B/B) = 1$$

$$3- P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

$$4- P(A \cap B) = P(B).P(A/B) \\ P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

$$5- P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B).P(C/A \cap B) = P(A).P(B/A).P(C/A \cap B)$$

$$6- P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A \cap B/C)$$

ملاحظات

1 - إذا كان A و B حدثين مستقلين فإن:

- A و $\bar{B}$ حدثين مستقلين

- $\bar{A}$ و B حدثين مستقلين

- $\bar{A}$ و $\bar{B}$ حدثين مستقلين

2 - من خلال علاقة الاحتمال الشرطي لدينا:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \dots\dots\dots 1$$

وبما أن A و B حدثين مستقلين فإن:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \dots\dots\dots 2$$

وبتعويض العلاقة الأخيرة في العلاقة الأولى نحصل على:

$$P(A/B) = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A)$$

ونجد أيضا:

$$P(B/A) = \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = P(B)$$

3 - التنافي لا يعني الاستقلالية، أي أنه يمكن أن:

- يكون الحدثين A و B متنافيين ولكنهما غير مستقلين

- يكون الحدثين A و B مستقلين ولكنهما غير متنافيين

مثال

نرمي حجر النرد مرتين متتاليتين، ونسجل الحوادث التالية التي تمثل الحصول على

A : الرقم 6 في الرمية الأولى

B : مجموع رقمين يساوي 6

C : الرقم 1 في الرمية الثانية

1 - هل الحدثين A و B متنافيين؟ مستقلين؟

2 - هل الحدثين A و C متنافيين؟ مستقلين؟

الحل

$$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\}$$

$$P(B) = \frac{5}{36}$$

$$C = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$$

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

نقول أن الحدثين متنافيين إذا كان تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية

$$A \text{ و } B \text{ حدثين متنافيين } (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$A \text{ و } C \text{ حدثين غير متنافيين } (A \cap C) = \{(6,1)\}$$

نقول أن الحدثين مستقلين إذا تحققت أحد الشروط التالية:

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(B/A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

أولاً: بالنسبة للحدثين A و B

بما أن:

$$\begin{cases} P(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{\frac{5}{36}} = 0 \\ P(A) = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow P(A/B) \neq P(A)$$

فإن: الحدث A غير مستقل عن الحدث B

بما أن:

$$\begin{cases} P(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{\frac{1}{6}} = 0 \\ P(B) = \frac{5}{36} \end{cases} \Rightarrow P(B/A) \neq P(B)$$

فإن: الحدث B غير مستقل عن الحدث A

ثانياً: بالنسبة للحدثين A و C

بما أن:

$$\begin{cases} P(A/C) = \frac{p(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A/C) = P(A) \\ P(A) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

فإن: الحدث A مستقل عن الحدث C

بما أن:

$$\begin{cases} P(C/A) = \frac{p(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(C/A) = P(C) \\ P(C) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

فإن: الحدث C مستقل عن الحدث A

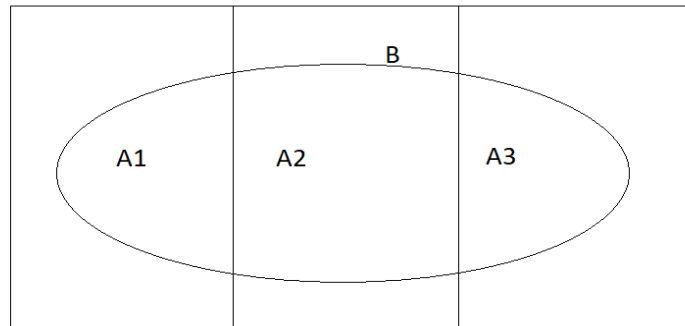
$$P(A \cap C) = P(A)P(C) \Leftrightarrow \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{36} = \frac{1}{36}$$

5- الاحتمال الكلي

إذا كانت الحوادث A_1, A_2, A_3 حوادث متنافية وتمثل تجزئة لفضاء العينة Ω ، وكان الحدث B

ينتمي إلى فضاء العينة كما هو موضح في الشكل:

الشكل (02): فضاء تجربة الاحتمال الكلي



المصدر: من إعداد أستاذة المادة

من خلال الشكل نلاحظ أن الحدث هو اتحاد الحوادث $A_3 \cap B$, $A_2 \cap B$, $A_1 \cap B$

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$$

وبالتالي تكتب علاقة احتمال تحققه على الشكل التالي:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) \dots\dots 1$$

ولدينا علاقة الاحتمال الشرطي:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

وبالتالي يمكن إعادة كتابة الصيغة 1 على الشكل التالي:

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3)$$

وبتعميم العلاقة نحصل على علاقة الاحتمال الكلي: (كونجو، 2000، الصفحات 212-213)

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i).P(B/A_i)$$

مثال

مصنع لصناعة الكراسي يحتوي على 3 آلات تنتج بالشكل التالي:

الآلة الأولى تنتج 30% ونسبة العيب بها 1%

الآلة الثانية تنتج 36% ونسبة العيب بها 2%

الآلة الثالثة تنتج 34% ونسبة العيب بها 2%

1 - إذا اخترنا كرسي بشكل عشوائي، ما هو احتمال أن يكون هذا الكرسي معاب؟

2 - إذا كان الكرسي معاب، ما هو احتمال أن يكون من إنتاج الآلة الأولى؟

الحل

A_1 : الكرسي من إنتاج الآلة الأولى

A_2 : الكرسي من إنتاج الآلة الثانية

A_3 : الكرسي من إنتاج الآلة الثالثة

B : الكرسي معاب

نلاحظ أن الحوادث الثلاثة الأولى A_1, A_2, A_3 تشكل مجموعات جزئية من فضاء العينة (الإنتاج

الكلي للمصنع):

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$$

$$30\% + 36\% + 34\% = 100\%$$

أي:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,3 + 0,36 + 0,34 = 1$$

ولدينا الحوادث A_1, A_2, A_3 متنافية مثنى مثنى، لأن الكرسي المنتج من طرف أي آلة لا يمكن أن يكون منتج من طرف آلة أخرى.

واحتمال العيب في كل آلة هو:

$$P(B / A_1) = 0,01$$

$$P(A_2) = 0,02$$

$$P(A_3) = 0,02$$

إذن: الاحتمال الكلي للحصول على كرسي معاب هو:

$$P(B) = P(A_1).P(B / A_1) + P(A_2).P(B / A_2) + P(A_3).P(B / A_3)$$

$$P(B) = (0,3.0,01) + (0,36.0,02) + (0,34.0,02) = 0,017$$

ويمكن حلها بالشجرة الاحتمالية:

$P(B)$	$P(A_1)=0,3$	$P(B/A_1)=0,01$	0,003
	$P(A_2)=0,36$	$P(B/A_2)=0,02$	0,0072=1
	$P(A_3)=0,34$	$P(B/A_3)=0,02$	0,0068

6- قانون بايز

إذا كان الحدث B الذي ينتمي إلى الفضاء يمكن أن يتحقق فقط إذا تحقق أحد الحوادث

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ المتنافية مثنى مثنى والمنتمية إلى نفس الفضاء، فحساب احتمال وقوع الحدث B بسبب

أحد الحوادث $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ يعني حساب الاحتمال الشرطي

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \dots \dots \dots 1$$

ومن قاعدة الجداء للاحتتمالات غير المستقلة نعلم أن:

$$P(A_i \cap B) = P(B / A_i).P(A_i) \dots \dots \dots 2$$

بتعويض 2 في 1 نحصل على:

$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i).P(A_i)}{P(B)}$$

ومن قاعدة الاحتمال الكلي نعلم أن:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B / A_i) \cdot P(A_i) \dots\dots\dots 4$$

بتعويض 4 في 3 نحصل على ما يسمى بقاعدة بايز: (كونجو، 2000، صفحة 216)

$$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B / A_i) \cdot P(A_i)}$$

مثال (تابع للمثال السابق)

3 - إذا كان الكرسي معاب ما هو احتمال أن يكون من إنتاج الآلة الأولى؟

الحل

بتطبيق قانون بايز

$$P(A_1 / B) = \frac{P(B / A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{i=1}^n P(B / A_i) \cdot P(A_i)} =$$

$$\frac{P(B / A_1) \cdot P(A_1)}{P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + P(B / A_3) \cdot P(A_3)} =$$

$$\frac{0,01 \cdot 0,3}{0,0017} = 0,176 = 0,18$$

تمارين محلولة

تمرين 01

يحتوي كيس على 6 كرات حمراء و 4 كرات بيضاء و 5 كرات زرقاء، نسحب كرة بشكل عشوائي، ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

- 1 - حمراء
- 2 - بيضاء
- 3 - ليست حمراء
- 4 - حمراء أو بيضاء

تمرين 02

يحتوي كيس على 40 كرة تحمل ألوان مختلفة (الأسود، الأبيض، الأحمر، الأخضر) كل 10 كرات من نفس اللون مرقمة من 1 إلى 10، أحسب احتمال سحب كرة:

- 1 - تحمل الرقم 1
- 2 - سوداء تحمل الرقم 7
- 3 - خضراء تحمل الرقم 9 أو بيضاء تحمل الرقم 3
- 4 - ليست حمراء
- 5 - لا تحمل الرقم 5 ولا اللون الأسود

تمرين 03

تمتلك الكلية 20 جهاز كمبيوتر، يوجد منها 7 معطوبة، استلم قسم العلوم الاقتصادية 4 منها بشكل عشوائي، ما هو احتمال:

- 1 - أن تكون جميع الأجهزة المستلمة معطوبة
- 2 - جهازان من الأجهزة المستلمة معطوبة
- 3 - جهازان على الأقل معطوبان

تمرين 04

إذا كان احتمال نجاح محمد في مادة الإحصاء 0,6، واحتمال نجاح سليم 0,3، واحتمال نجاحهما معا هو 0,1، أوجد احتمال:

- 1 - رسوب محمد
- 2 - نجاح محمد ورسوب سليم
- 3 - رسوب محمد ونجاح سليم
- 4 - نجاح أحدهما على الأقل

تمرين 05

لتكن لدينا الأحداث العشوائية المعرفة على نفس التجربة A و B و C ، وليكن لدينا الحدثان:

$$E_1 = A \cup (B \cap C)$$

$$E_2 = A \cap (B \cup C)$$

إذا علمت أن:

$$P(A) = 0,6 / P(B) = 0,4 / P(C) = 0,3 / P(A \cap B) = 0,2 / P(B \cap C) = 0,1$$

$$P(A \cap C) = 0,1 / P(A \cap B \cap C) = 0,05$$

- 1 - أحسب الاحتمالين $P(E_1)$, $P(E_2)$
- 2 - إذا افترضنا أن: $P(E_1) = \frac{1}{12}$, $P(E_2) = \frac{1}{3}$ ، أحسب $P(E_1 \cup E_2)$ ، إذا كان:

أولاً: الحدثان $P(E_1)$, $P(E_2)$ مستقلان

ثانياً: الحدثان $P(E_1)$, $P(E_2)$ متنافيان

تمرين 06

في امتحان السداسي الثاني وجد أن 40% من الطلبة نجحوا في مادة الرياضيات، و 25% منهم

نجحوا في مادة الإحصاء 2، و 20% نجحوا في المادتين معاً، إذا تم اختيار طالب منهم بطريقة عشوائية، أوجد

احتمال:

- 1 - نجاح الطالب في الإحصاء إذا كان ناجح في الرياضيات
- 2 - نجاح الطالب الرياضيات في إذا كان ناجح في الإحصاء
- 3 - نجاح الطالب الرياضيات علماً أنه راسب في الإحصاء
- 4 - رسوب الطالب في الإحصاء علماً أنه راسب الرياضيات

تمرين 07

ثلاث مصالح طبية A, B, C في أحد المستشفيات تستقبل على التوالي 45%، 30%، 25% من مجموع المرضى الذين يدخلون هذا المستشفى، تفيد التقارير الطبية من السنوات الماضية أن نسب الوفيات في المصالح على التوالي 3%، 4%، 5%، إذا تم اختيار مريض من المستشفى بطريقة عشوائية، أحسب احتمال:

- 1 - وفاة المريض بالمستشفى
- 2 - شفاء المريض بالمستشفى
- 3 - أن يكون من المصلحة A أو B ويتوفي
- 4 - إذا توفي المريض، ما هو احتمال أن يكون من:

- المصلحة A

- المصلحة B

- المصلحة C

تمرين 08

مصنع لإنتاج العجلات المطاطية به 3 آلات تنتج على التوالي 40%، 30%، 30%، وتبلغ نسبة الخطأ في كل آلة على التوالي 1%، 2%، 3%، اخترنا عشوائياً عجلة من هذا المصنع بطريقة عشوائية.

- 1 - ما هو احتمال أن يكون هناك خطأ بالعجلة؟
- 2 - إذا كان بالعجلة خطأ، ما هو احتمال أن تكون من إنتاج الآلة الثالثة؟

تمرين 09

قسم سكان حي إلى ثلاث مجموعات حسب النسب التالية: 32%، 42%، 26%، وأظهرت نتائج استطلاع الرأي حول مشروع معين أن نسب الموافقة من طرف كل مجموعة كان على التوالي: 85%، 25%، 60%، سحبنا من هذا الحي شخص بشكل عشوائي.

- 1 - ما هو احتمال أن يكون هذا الشخص موافق على المشروع؟
- 2 - إذا كان هذا الشخص موافق على المشروع، ما هو احتمال أن يكون من المجموعة الثانية؟

الحل

تمرين 01

أولاً: نحدد الحوادث

A: الكرة المسحوبة حمراء

B: الكرة المسحوبة بيضاء

C: الكرة المسحوبة زرقاء

$A \cap B$: مجموعة خالية لأن الحدثين متنافيين

$A \cup B$: الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء

ثانياً: نحدد عدد الحالات الممكنة الكلية للتجربة

$$C_{15}^1 = 15$$

1 - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء

$$P(A) = \frac{C_6^1}{15} = \frac{6}{15}$$

2 - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء

$$P(B) = \frac{C_4^1}{15} = \frac{4}{15}$$

3 - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست حمراء

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15}$$

4 - احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15}$$

تمرين 02

أولاً: عدد الحالات الكلية الممكنة

$$C_{40}^1 = 40$$

أولاً: حساب الاحتمالات للكرات المسحوبة

1 - تحمل الرقم 1

$$P(1) = \frac{C_4^1}{40} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

2 - سوداء تحمل الرقم 7

$$P(N7) = \frac{C_1^1}{40} = \frac{1}{40}$$

3 - خضراء تحمل الرقم 9 أو بيضاء تحمل الرقم 3

$$P(V9) + P(B3) = \frac{C_1^1}{40} + \frac{C_1^1}{40} = \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = \frac{2}{40}$$

4 - ليست حمراء

$$P(R) = \frac{C_{10}^1}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

5 - لا تحمل الرقم 5 ولا اللون الأسود

$$P(\bar{5} \cap \bar{N}) = P(\overline{5 \cup N}) = 1 - P(5 \cup N) = 1 - [P(5) + P(N) - P(5 \cap N)] =$$

$$1 - \left(\frac{4 + 10 - 1}{40}\right) = \frac{27}{40}$$

تمرين 03

أولاً: تحديد عدد الحالات الكلية

7 أجهزة معطوبة

13 جهاز سليم

$$C_{20}^4 = 4845$$

ثانياً: حساب الاحتمالات

1 - أن تكون جميع الأجهزة المستلمة معطوبة

$$P(A) = \frac{C_7^4}{4845} = \frac{35}{4845} = 0,007$$

2 - جهازان من الأجهزة المستلمة معطوبة

$$P(B) = \frac{C_7^2 \cdot C_{13}^2}{4845} = \frac{21 \cdot 78}{4845} = \frac{1638}{4845} = 0,34$$

3 - جهازان على الأقل معطوبان

$$P(B) = \frac{C_7^2 \cdot C_{13}^2}{4845} + \frac{C_7^3 \cdot C_{13}^1}{4845} + \frac{C_7^4 \cdot C_{13}^0}{4845} = \frac{1638 + 455 + 35}{4845} = \frac{2128}{4845} = 0,44$$

تمرين 04

أولاً: تحديد الحوادث

A: نجاح محمد في مادة الإحصاء

B: نجاح سليم في مادة الإحصاء

إذا كان A و B يعبران عن النجاح فإن $\bar{A}$ و $\bar{B}$ يعبران عن الرسوب

ثانياً: حساب الاحتمالات

1 - رسوب محمد

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6$$

2 - نجاح محمد ورسوب سليم

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,1 = 0,5$$

3 - رسوب محمد ونجاح سليم

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,1 = 0,2$$

4 - نجاح أحدهما على الأقل

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,3 - 0,1 = 0,8$$

تمرين 05

1 - حساب الاحتمالات

$$P(E_1) = P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - (A \cap B \cap C) =$$

$$0,6 + 0,1 - 0,05 = 0,65$$

$$P(E_2) = P(A \cap (B \cup C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - (A \cap B \cap C) =$$

$$0,2 + 0,1 - 0,05 = 0,25$$

2 - حساب الاحتمال

أولاً: إذا كان الحدثان مستقلان $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - [P(E_1).P(E_2)] =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12}\right) = \frac{5}{12} - \frac{1}{36} = \frac{14}{36}$$

ثانياً: إذا كان الحدثان متنافيان $P(E_1 \cap E_2) = 0$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - 0 =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

تمرين 06

A: نجاح الطالب في مادة الرياضيات $P(A) = 0,4$

B: نجاح الطالب في مادة الإحصاء $P(B) = 0,25$

$A \cap B$: نجاح الطالب في المادتين معا $P(A \cap B) = 0,2$

حساب الاحتمالات:

1 - نجاح الطالب في الإحصاء إذا كان ناجح في الرياضيات

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

2 - نجاح الطالب الرياضيات في إذا كان ناجح في الإحصاء

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,25} = 0,8$$

3 - نجاح الطالب الرياضيات علما أنه راسب في الإحصاء

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,4 - 0,2}{1 - 0,25} = 0,27$$

4 - رسوب الطالب في الإحصاء علما أنه راسب الرياضيات

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(A)} =$$

$$\frac{1 - (0,4 + 0,25 - 0,2)}{1 - 0,4} = 0,92$$

تمرين 07

A_1 : المريض من المصلحة A $P(A_1) = 0,45$ $P(B/A_1) = 0,03$

A_2 : المريض من المصلحة B $P(A_2) = 0,30$ $P(B/A_2) = 0,04$

A_3 : المريض من المصلحة C $P(A_3) = 0,25$ $P(B/A_3) = 0,05$

B: وفاة المريض في المستشفى

حساب الاحتمالات

1 - وفاة المريض بالمستشفى

$$P(B) = P(A_1).P(B / A_1) + P(A_2).P(B / A_2) + P(A_3).P(B / A_3)$$

$$P(B) = 0,45.0,03 + 0,3.0,04 + 0,25.0,05 = 0,038$$

2 - شفاء المريض بالمستشفى

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,038 = 0,962$$

3 - أن يكون من المصلحة A أو B ويتوفي

$$P(A_1 \cup A_2) \cap B = P(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$$

$$= P(A_1).P(B / A_1) + P(A_2).P(B / A_2)$$

$$= 0,45.0,03 + 0,3.0,04 = 0,025$$

4 - إذا توفي المريض، ما هو احتمال أن يكون من:

- المصلحة A

$$P(A_1 / B) = \frac{P(B / A_1).P(A_1)}{P(B)} = \frac{0,45.0,03}{0,038} = 0,35$$

- المصلحة B

$$P(A_2 / B) = \frac{P(B / A_2).P(A_2)}{P(B)} = \frac{0,3.0,04}{0,038} = 0,31$$

- المصلحة C

$$P(A_3 / B) = \frac{P(B / A_3).P(A_3)}{P(B)} = \frac{0,25.0,05}{0,038} = 0,33$$

تمرين 08

A₁: العجلة من إنتاج الآلة 1 P(A₁) = 0,40.....P(B / A₁) = 0,01A₂: العجلة من إنتاج الآلة 2 P(A₂) = 0,30.....P(B / A₂) = 0,02A₃: العجلة من إنتاج الآلة 3 P(A₃) = 0,30.....P(B / A₃) = 0,03

B: العجلة بها خطأ ما

1 - احتمال أن يكون هناك خطأ بالعجلة

$$P(B) = P(A_1).P(B / A_1) + P(A_2).P(B / A_2) + P(A_3).P(B / A_3)$$

$$P(B) = 0,40.0,01 + 0,3.0,02 + 0,30.0,03 = 0,019$$

2 - إذا كان بالعجلة خطأ، احتمال أن تكون من إنتاج الآلة الثالثة

$$P(A_3 / B) = \frac{P(B / A_3) \cdot P(A_3)}{P(B)} = \frac{0,3 \cdot 0,03}{0,019} = 0,47$$

تمرين 09

A_1 : المجموعة 1 $P(A_1) = 0,32$ $P(B / A_1) = 0,85$

A_2 : المجموعة 2 $P(A_2) = 0,42$ $P(B / A_2) = 0,25$

A_3 : المجموعة 3 $P(A_3) = 0,26$ $P(B / A_3) = 0,60$

B: الشخص موافق على المشروع

1 - ما هو احتمال أن يكون هذا الشخص موافق على المشروع؟

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B / A_1) + P(A_2) \cdot P(B / A_2) + P(A_3) \cdot P(B / A_3)$$

$$P(B) = 0,32 \cdot 0,85 + 0,42 \cdot 0,25 + 0,26 \cdot 0,60 = 0,53$$

2 - إذا كان هذا الشخص موافق على المشروع، ما هو احتمال أن يكون من المجموعة الثانية؟

$$P(A_2 / B) = \frac{P(B / A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{0,25 \cdot 0,42}{0,53} = 0,196$$

المحاضرة الخامسة: المتغيرات العشوائية المتقطعة

تمهيد

إذا كان لدينا تجربة عشوائية، فإن لهذه التجربة مجموعة من النتائج، وقد تكون هذه النتائج كمية أو كيفية، فمثلاً عند رمي قطعة نقود مرتين فإن فضاء التجربة يكون:

$$\Omega_1 = \{(F, F), (F, P), (P, P), (P, F)\}$$

هذا إذا كان الاهتمام بالنتيجة الظاهرة، إما صورة أو كتابة، أما في حالة كان الاهتمام بعدد الصور الظاهرة يصبح فضاء التجربة بالشكل:

$$\Omega_2 = \{0, 1, 2\}$$

ومن هنا نلاحظ أن نتائج التجربة العشوائية في الحالة الأولى هي بيانات كيفية، وفي الحالة الثانية هي بيانات كمية، وفي الكثير من الحالات نحتاج إلى تغيير البيانات الكيفية إلى بيانات كمية لتسهيل عملية الدراسة الإحصائية واستقراء النتائج، وذلك من خلال التعبير عن كل عنصر من فضاء التجربة بعدد يعبر عن صفة معينة في العنصر، ففي المثال السابق نربط كل عنصر من العناصر بعدد ظهور الكتابة.

1-تعريف المتغير العشوائي

هو دالة في فضاء تجربة عشوائية ما إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، حيث يقابل كل عنصر من فضاء التجربة عدداً حقيقياً هو قيمة المتغير العشوائي عن هذا العنصر، يرمز للمتغيرات العشوائية بأحرف لاتينية كبيرة $X, Y, W, \dots$ ويرمز لقيم هذه المتغيرات العشوائية بأحرف لاتينية صغيرة $x, y, z, \dots$ (القبايجي وحمادة كمرجي، 2012/2011، صفحة 106)

مثال

إذا كان لدينا عائلة مكونة من 3 أطفال

1 - أكتب فضاء العينة

2 - إذا كان X يعبر عن عدد الإناث، أذكر قيم هذا المتغير المقابلة لعناصر الفضاء

3 - أحسب احتمال الحدث $X \leq 2$

الحل

1 - فضاء العينة

نرمز للإناث بـ F وللذكور بـ G ، وللتطبيق قاعدة الجداء نجد $(2.2.2=8)$

$$\Omega = \{(FFF), (FFG), (FGF), (FGG), (GFF), (GFG), (GGF), (GGG)\}$$

		F	FFF (3)
	F	G	FFG(2)
F		F	FGF (2)
	G	G	FGG (1)
		F	GFF(2)
	F	G	GFG (1)
G		F	GGF (1)
	G	G	GGG (0)

2 - قيم المتغير العشوائي

$$X = \{0,1,2,3\}$$

3 - حساب الاحتمال

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{7}{8}$$

2-أنواع المتغيرات العشوائية

يكون فضاء العينة متقطع (منفصل) إذا كان يحتوي على عدد منتهى أو عدد غير منتهى من النقاط القابلة للعد، ونقول عنه أنه مستمر (متصل) إذا كان يحتوي على عدد لانهائي من النقاط غير القابلة للعد، وعلى هذا الأساس يمكن تقسيم المتغيرات العشوائية إلى نوعين: (كونجو، 2000، صفحة 234)

2-1- المتغير العشوائي المتقطع

يكون المتغير العشوائي متقطعا إذا كانت مجموعة قيمه الممكنة مجموعة منتهية أو لانهائية قابلة للعد، أي إذا كان فضاء العينة الذي يعرف هذا المتغير فضاء متقطع (بشويوى، 2010، صفحة 14)

2-2- المتغير العشوائي المستمر

يكون المتغير العشوائي مستمرا إذا كانت مجموعة قيمه الممكنة مجموعة لانهائية وغير قابلة للعد، أي إذا كان فضاء العينة الذي يعرف هذا المتغير فضاء مستمر (بشويوى، 2010، صفحة 14)

مثال

1 - المتغير العشوائي المتقطع

- عدد الأبناء الذكور في أسرة؛

- عدد مرات إلقاء قطعة نقدية حتى الحصول على صورة؛

- عدد المكالمات المستلمة في مركز شرطة خلال اليوم؛
- عدد الطلبة الحاضرين في محاضرة الإحصاء خلال السداسي.

2 - المتغير العشوائي المستمر

- مدة المكالمات الهاتفية المستلمة في مركز الشرطة؛
- عمر مواطن جزائري

3-التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع

إذا كان المتغير العشوائي X يمكن أن يأخذ القيم المتقطعة $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ فالتوزيع الاحتمالي والذي يسمى أيضا بدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X يعرف بأنه مجموعة الاحتمالات المناظرة لقيم المتغير العشوائي وتعرف بالطريقة التالية: (التميمي، 2024، صفحة 89)

$$f(x) = P(x) = P[X = x_i], x_i = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

والذي يحقق الشروط التالية:

$$0 \leq f(x_i) \leq 1 \dots \dots \dots 1$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = 1 \dots \dots \dots 2$$

يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية عندما يكون عدد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X محدودا

وصغيرا على صورة جدول كالتالي:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	Somme
$P(X)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	$\dots$	$P(x_n)$	1

مثال

صندوق يحتوي على 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء، سحبته منه دون ارجاع 3 كرات، والمتغير

العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء في العينة

- 1 - أحسب التوزيع الاحتمالي للمتغير لعشوائي X ومثله في جدول
- 2 - أوجد احتمال أن تحتوي العينة على كرة بيضاء واحدة على الأقل

الحل

1 - حساب التوزيع الاحتمالي

X : يمثل عدد الكرات البيضاء في العينة

$$X = \{0,1,2,3\}$$

لحساب التوزيع الاحتمالي يجب معرفة الاحتمالات المناظرة لقيم X

$$P(X = 0) = \frac{C_3^3 C_4^0}{C_7^3} = \frac{1.1}{35} = \frac{1}{35}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{4.3}{35} = \frac{12}{35}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{3.6}{35} = \frac{18}{35}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_3^0 C_4^3}{C_7^3} = \frac{1.4}{35} = \frac{4}{35}$$

ومنه يصبح التوزيع الاحتمالي كما يلي:

X	0	1	2	3	Somme
P(x)	1/35	12/35	18/35	4/35	1

2 - حساب الاحتمال

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$$

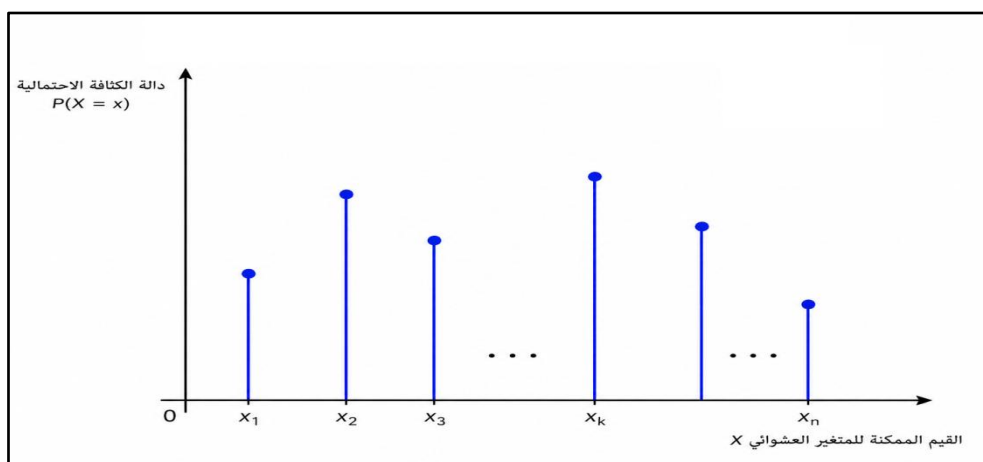
4- التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع

يمكن تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع بيانيا في معلم متعامد متجانس برسم

محورين، حيث يمثل المحور الأفقي (الفواصل) قيم المتغير العشوائي X والمحور العمودي (التراتب) يمثل

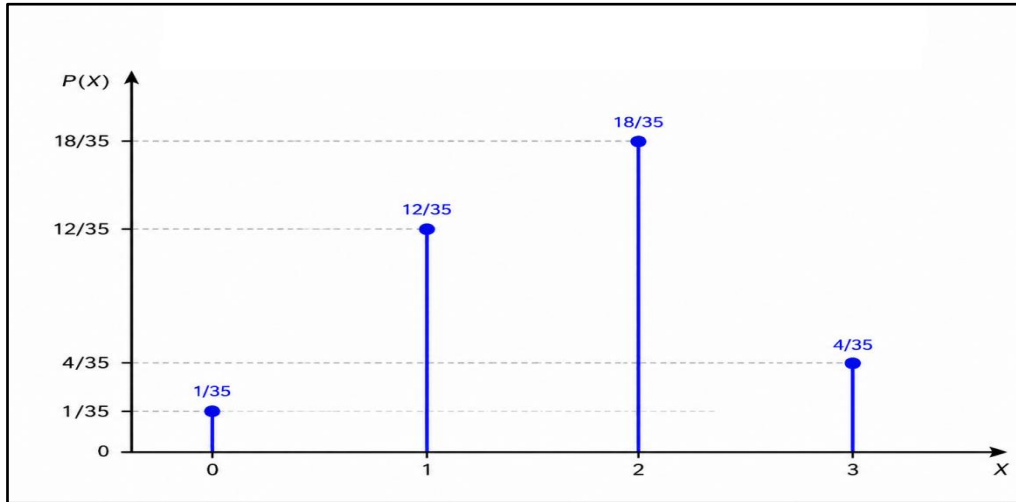
الاحتمالات، واسقاط كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مع ما يقابلها من قيم الاحتمال

الشكل (03): التمثيل البياني لدالة الكثافة لمتغير عشوائي متقطع



المصدر: من إعداد أستاذة المادة

مثال (تابع للمثال السابق)

3 - تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X 

5- دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع

إذا كان X متغير عشوائي متقطع، دالة كثافته الاحتمالية $f(x_i)$ ، فإن دالة التوزيع لهذا المتغير العشوائي هي احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ قيمة أقل من أو تساوي قيمة معينة x_i ويعبر عنها بالصيغة الرياضية التالية: (بوعافية و رحالي، الصفحات 30-31)

$$F(x) = P(X \leq x_i)$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum f(x_i)$$

إذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن يتم تعريفها كما يلي:

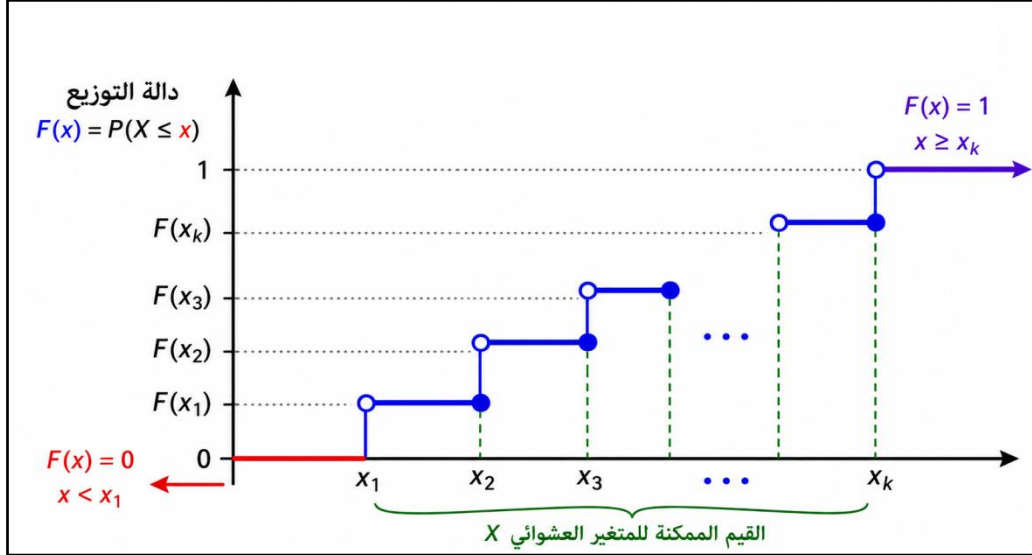
$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty \leq x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) & x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n) & x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

6- التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع

يمكن تمثيل التوزيع بيانيا بالمدراج الاحتمالي، حيث تكون القيم الممكنة لفترات تمتد بمقدار الواحد (نصف على يمين القيمة ونصف على يسارها) ونرسم فوق كل فترة مستطيل ارتفاعه يساوي الاحتمال الموافق

للقيمة، وبذلك يتم الحصول على مدرج الاحتمال، دالة التوزيع دالة سلمية غير تناقصية. (كونجو، 2000،
صفحة 236)

الشكل (04): التمثيل البياني لدالة التوزيع لمتغير عشوائي متقطع



المصدر: من إعداد أستاذة المادة

مثال

4 - حساب دالة التوزيع وتمثيلها بيانيا

$$F(x) = P(X \leq x_i)$$

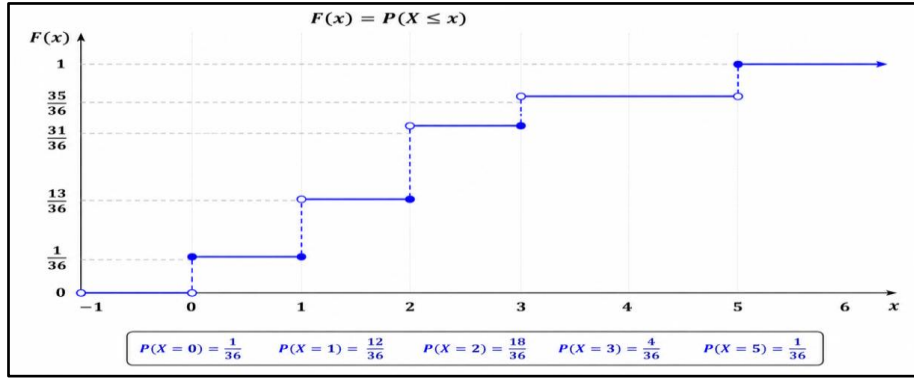
$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = \frac{1}{35}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} = \frac{13}{35}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} = \frac{31}{35}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{35}{35} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots -x < 0 \\ f(0) = \frac{1}{35} & \dots\dots\dots 0 \leq x < 1 \\ f(0) + f(1) = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} = \frac{13}{35} & \dots\dots\dots 1 \leq x < 2 \\ f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} = \frac{31}{35} & \dots\dots\dots 2 \leq x < 3 \\ f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1 & \dots\dots\dots x \geq 3 \end{cases}$$



6-1- خواص دالة التوزيع لمتغير عشوائي متقطع

- 1 - دالة التوزيع دائما تحقق العلاقة $0 \leq F(x) \leq 1$ ؛
- 2 - دالة التوزيع عبارة عن احتمالات تجميعية، وبالتالي هي دالة تصاعدية متزايدة دوماً؛
- 3 - قيمة دالة التوزيع عند النقطة $-\infty$ تساوي الصفر $F(-\infty) = 0$ ؛
- 4 - قيمة دالة التوزيع عند النقطة $+\infty$ تساوي الواحد $F(+\infty) = 1$ ، لأنها تكون قد شملت جميع القيم الممكنة؛

$$5 - \forall (a, b) \in R, a < b \Rightarrow P(a < X < B) = F(b) - F(a)$$

7- المميزات العددية لمتغير عشوائي متقطع

دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي ما تعطي وضعاً تاماً لهذا المتغير، ولكن في كثير من الأحيان نحتاج إلى وسطاء إحصائية تمكن من الوصول إلى رؤية واضحة لطبيعة المتغيرات العشوائية. ومن بين هذه المميزات العددية التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري (التغاير ومعامل الارتباط)

7-1- التوقع الرياضي

إذا كان X متغير عشوائي متقطع، دالة كثافته الاحتمالية هي $f(x)$ ، فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X يرمز لها بالرمز $E(x)$ وتعرف كما يلي:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

6-1-1- تعميم التوقع الرياضي

إذا كان X متغير عشوائي متقطع، دالة كثافته الاحتمالية هي $f(x)$ ، وكانت $g(x)$ دالة عددية في X ، فإن التوقع الرياضي للدالة $g(x)$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(g(x)) = \sum_{i=1}^n g(x_i) f(x_i)$$

2-1-6- خواص التوقع الرياضي

- 1 - التوقع الرياضي لعدد ثابت هو نفس العدد الثابت: $E(a) = a$
- 2 - إذا كان X متغير عشوائي و b عدد ثابت فإن: $E(ax) = aE(x)$
- 3 - إذا كان X متغير عشوائي و a و b ثوابت فإن: $E(ax + b) = a.E(x) + b$
- 4 - إذا كان:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

فإن:

$$E(g(x)) = E(g_1(x) + g_2(x)) = E(g_1(x)) + E(g_2(x))$$

2-7- التباين

يساعد التباين على معرفة العلاقة بين قيم المتغير العشوائي X والقيمة المتوقعة له. إذا كان X متغير عشوائي متقطع دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ وتوقعه الرياضي $E(x)$ ، فإن التباين الخاص به والذي يرمز له بالرمز $V(x)$ يحسب بالعلاقة التالية:

$$V(x) = E[x - E(x)]^2$$

وباستخدام خواص التوقع الرياضي يمكن الحصول على الصيغة الرياضية التالية:

$$V(x) = E[x - E(x)]^2 = E[x^2 - 2.x.E(x) + E(x)^2] = E(x^2) - 2E(x)^2 + E(x)^2 =$$

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

1-2-7- خواص التباين

- 1 - تباين عدد ثابت يساوي الصفر: $V(a) = 0$
- 2 - إذا كان X متغير عشوائي و b عدد ثابت فإن: $V(x + b) = V(x)$
- 3 - إذا كان X متغير عشوائي و a و b ثوابت فإن: $V(ax + b) = a^2.V(x)$

3-7- الانحراف المعياري

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي متقطع هو الجذر التربيعي للتباين، ويرمز له بالرمز $\sigma(x)$ ، وكتب

كما يلي:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

مثال

من المثال السابق الخاص بالعائلة المكونة من 3 أطفال:

1 - حساب التوقع الرياضي

X	0	1	2	3
F(x _i)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = (0 \cdot \frac{1}{8}) + (1 \cdot \frac{3}{8}) + (2 \cdot \frac{3}{8}) + (3 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{12}{8} = 1,5$$

2 - حساب E(x²)

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = (0^2 \cdot \frac{1}{8}) + (1^2 \cdot \frac{3}{8}) + (2^2 \cdot \frac{3}{8}) + (3^2 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{24}{8} = 3$$

3 - حساب E(3x + 2)

طريقة 01

X	0	1	2	3
3X+2	2	5	8	11
F(x _i)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = (2 \cdot \frac{1}{8}) + (5 \cdot \frac{3}{8}) + (8 \cdot \frac{3}{8}) + (11 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{52}{8} = 6,5$$

طريقة 02

$$E(3x + 2) = 3E(x) + 2 = 3 \cdot 1,5 + 2 = 6,5$$

تمارين محلولة

تمرين 01

- صندوق به 10 مصابيح كهربائية به 2 تالفة، اشترى شخص مصباحين تم اختيارهما من الصندوق عشوائي، إذا كان X متغير عشوائي يدل على عدد المصابيح التالفة:
- 1 أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، ومثله بيانيا
 - 2 أوجد دالة التوزيع ومثلها بيانيا
 - 3 ما هو احتمال شراء مصباح واحد تالف على الأكثر
 - 4 أحسب كل من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري

تمرين 02

في تجربة رمي 3 قطع نقدية معا، نعرف المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد مرات ظهور الكتابة:

- 1 - حدد فضاء التجربة
- 2 - حدد دالة الكثافة الاحتمالية ومثلها بيانيا
- 3 - حدد دالة التوزيع الاحتمالية ومثلها بيانيا
- 4 - أحسب كل من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري

تمرين 03

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد السيارات المباعة أسبوعيا، حيث يمثل الجدول الموالي التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير:

X	0	1	2	3	4	5	
$f(x_i)$	0,02	0,08	0,1	0,3	0,4	0,1	1

- 1 - أوجد دالة التوزيع
- 2 - ما هو احتمال أن يكون عدد السيارات المباعة أسبوعيا لا يتعدى 3 سيارات
- 3 - مثل بيانيا كل من دالة الكثافة ودالة التوزيع لهذا المتغير

تمرين 04

يحتوي إناء على 5 كرات مرقمة من 1 إلى 5، نسحب منه كرتين الواحدة تلو الأخرى، إذا كان X متغير عشوائي يمثل أكبر عدد ظاهر: عين التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع لهذا المتغير في حالة:

- 1 - السحب دون إرجاع
- 2 - السحب مع الإرجاع

تمرين 05

محفظة بها 7 كتب، 4 منها تخصص إحصاء والباقي تخصص رياضيات، نسحب كتابين منها بطريقة عشوائية، ونعرف X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد كتب الإحصاء المسحوبة:

- 1 - حدد طبيعة هذا المتغير
- 2 - عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير ، وتأكد من أنه دالة كثافة احتمالية
- 3 - ما هو احتمال أن يكون كتابا واحدا على الأقل خاص بالإحصاء
- 4 - أحسب كل من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري
- 5 - عين دالة التوزيع الاحتمالية

تمرين 06

ليكن المتغير العشوائي التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & \text{.....} x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{.....} \text{sin on} \end{cases}$$

- 1 - أوجد دالة التوزيع $F(x)$
- 2 - مثل كل من دالة الكثافة $f(x)$ ودالة التوزيع $F(x)$

تمرين 07

نقوم برمي حجر نرج مرتين

- إذا كان X متغير عشوائي يعبر عن حاصل الفرق بين الرقمين الظاهرين في الرمية الأولى والثانية:

- 1 - أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ومثله في جدول، وبيانها
- 2 - أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X ومثله بيانها

- إذا كان Y متغير عشوائي يعبر عن حاصل مجموع بين الرقمين الظاهرين في الرمية الأولى والثانية:

1 - حدد مجال تعريفه وطبيعته

2 - أحسب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y ، وتأكد من أنها دالة كثافة احتمالية ومثلها بيانياً

3 - أحسب الاحتمالات التالية: $P(Y < 4), P(Y \leq 4), P(Y = 4), P(Y = 1)$

- إذا كان Z متغير عشوائي يعبر عن أكبر العددين الظاهرين:

1 - أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Z ومثله في جدول، وبيانياً

2 - أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي Z ومثله بيانياً

3 - أحسب الاحتمالات التالية: $P(1 < Z \leq 4), P(Z \leq 3), P(Z < 3), P(Z = 1)$

الحل

تمرين 01

1 تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، وتمثيله بيانيا

X : متغير عشوائي متقطع يعبر عن المصايح التالفة

8 مصايح صالحة 2 مصايح تالفة

$$X = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

x_i	0	1	2	Somme
$P(X = x_i)$	28/45	16/45	1/45	1

2 تحديد دالة التوزيع ومثلها بيانيا

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots x < 0 \\ \frac{28}{45} & \dots\dots\dots 0 \leq x < 1 \\ \frac{44}{45} & \dots\dots\dots 1 \leq x < 2 \\ 1 & \dots\dots\dots x \geq 2 \end{cases}$$

x_i	0	1	2	Somme
$F(x)$	28/45	44/45	45/45=1	/

3 حساب احتمال شراء مصباح واحد تالف على الأكثر

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{28}{45} + \frac{16}{45} = \frac{44}{45}$$

4 حساب كل من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري

- التوقع الرياضي

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = (0 \cdot \frac{28}{45}) + (1 \cdot \frac{16}{45}) + (2 \cdot \frac{1}{45}) = \frac{18}{45} = 0,4$$

- التباين

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - (0,4)^2 = (0^2 \cdot \frac{28}{45}) + (1^2 \cdot \frac{16}{45}) + (2^2 \cdot \frac{1}{45}) - (0,4)^2 = 0,44 - 0,16 = 0,28$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,04} = 0,53$$

تمرين 02

1 - تحديد فضاء التجربة

$$\text{card}\Omega = 2.2.2 = 8$$

$$\Omega = \{(FFF), (FFP), (FPF), (FPP), (PFF), (PFP), (PPF), (PPP)\}$$

2 - تحديد دالة الكثافة الاحتمالية وتمثيلها بيانيا

X: متغير عشوائي متقطع يدل على عدد ظهور الكتابة

$$X = \{0,1,2,3\}$$

x_i	0	1	2	3	Somme
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

3 - تحديد دالة التوزيع الاحتمالية وتمثيلها بيانيا

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots x < 0 \\ \frac{1}{8} & \dots\dots\dots 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & \dots\dots\dots 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \dots\dots\dots 2 \leq x < 3 \\ 1 & \dots\dots\dots x \geq 3 \end{cases}$$

x_i	0	1	2	3	Somme
$F(x)$	1/8	4/8	7/8	8/8=1	/

4 - حساب كل من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري

- التوقع الرياضي

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = (0 \cdot \frac{1}{8}) + (1 \cdot \frac{3}{8}) + (2 \cdot \frac{3}{8}) + (3 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{12}{8} = 1,5$$

- التباين

ين

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - (0,4)^2 = (0^2 \cdot \frac{1}{8}) + (1^2 \cdot \frac{3}{8}) + (2^2 \cdot \frac{3}{8}) + (3^2 \cdot \frac{1}{8}) - (1,5)^2 = 3 - 2,25 = 0,75$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,75} = 0,86$$

تمرين 03

1 - أوجد دالة التوزيع

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,02 & 0 \leq x < 1 \\ 0,1 & 1 \leq x < 2 \\ 0,2 & 2 \leq x < 3 \\ 0,5 & 3 \leq x < 4 \\ 0,9 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

X	0	1	2	3	4	5
F(x)	0,02	0,1	0,2	0,5	0,9	1

2 - حساب احتمال أن يكون عدد السيارات المباعة أسبوعيا لا يتعدى 3 سيارات

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,02 + 0,08 + 0,1 + 0,3 = 0,5$$

3 - التمثيل البياني لكل من دالة الكثافة ودالة التوزيع لهذا المتغير

تمرين 04

X: متغير عشوائي متقطع يمثل أكبر عدد ظاهري مقارنة مع الآخر

- عين التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع لهذا المتغير: بما أن السحب على التوالي نعلم على الترتيب

1 - السحب دون إرجاع

$$X = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A_2^5 = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

$$\Omega = \left\{ (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), \right. \\ \left. (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4) \right\}$$

x_i	2	3	4	5	Somme
$P(X = x_i)$	2/20	4/20	6/20	8/20	1
$F(x)$	2/20	6/20	12/20	20/20=1	

2 - السحب مع الإرجاع

$$X = \{1,2,3,4,5\}$$

$$A_2^5 = n^k = 5^2 = 25$$

$$\Omega = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), \right. \\ \left. (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5) \right\}$$

x_i	1	2	3	4	5	Somme
$P(X = x_i)$	1/25	3/25	5/25	7/25	9/25	1
$F(x)$	1/25	4/25	9/25	16/25	25/25=1	

تمرين 05

7 كتب: 4 إحصاء، 3 رياضيات

1 - طبيعة هذا المتغير

X: متغير عشوائي متقطع يعبر عن كتب الإحصاء

2 - تعيين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير ، وتأكد من أنه دالة كثافة احتمالية

$$X = \{0,1,2\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^2 \cdot C_4^0}{C_7^2} = \frac{3}{21}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^0 \cdot C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21}$$

x_i	0	1	2	Somme
$P(X = x_i)$	3/21	12/21	6/21	1

وهي دالة كثافة احتمالية لأنها تحقق الشرطين:

$$0 \leq f(x_i) \leq 1$$

$$\sum_{i=0}^2 f(x_i) = \frac{3}{21} + \frac{12}{21} + \frac{6}{21} = \frac{21}{21} = 1$$

3 - حساب احتمال أن يكون كتابا واحدا على الأقل خاص بالاحصاء

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{12}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21}$$

4 - حساب كل من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري

- التوقع

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = (0 \cdot \frac{3}{21}) + (1 \cdot \frac{12}{21}) + (2 \cdot \frac{6}{21}) = \frac{24}{21} = 1,14$$

الرياض

ي

- التباين

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - (1,14)^2 = (0^2 \cdot \frac{3}{21}) + (1^2 \cdot \frac{12}{21}) + (2^2 \cdot \frac{6}{21}) - (1,14)^2 = 1,71 - 0,41 = 1,30$$

الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1,30} = 1,14$$

5 - تعيين دالة التوزيع الاحتمالية

x_i	0	1	2	Somme
$F(x)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{15}{21}$	$\frac{21}{21}$	

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots x < 0 \\ \frac{3}{21} & \dots\dots\dots 0 \leq x < 1 \\ \frac{15}{21} & \dots\dots\dots 1 \leq x < 2 \\ 1 & \dots\dots\dots x \geq 2 \end{cases}$$

تمرين 06

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & \dots\dots\dots x = 1,2,3,4 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{sin on} \end{cases}$$

1 - تحديد دالة التوزيع $F(x)$

x_i	1	2	3	4	Somme
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1
$F(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{10}{10} = 1$	

2 - تمثيل كل من دالة الكثافة $f(x)$ ودالة التوزيع $F(x)$

تمرين 07

X : متغير عشوائي يعبر عن حاصل الفرق بين الرقمين الظاهرين في الرمية الأولى والثانية

1 - أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ومثله في جدول، وبيانيا

	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

$$X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

2 - أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X ومثله ا بيانيا

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

Y : متغير عشوائي يعبر عن حاصل مجموع بين الرقمين الظاهرين في الرمية الأولى والثانية

3 - تحديد مجال تعريفه وطبيعته

Y : متغير عشوائي متقطع كمي

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

4 - حساب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y ، والتأكد من أنها دالة كثافة احتمالية ومثلها بيانيا

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(Y=y)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

وهي دالة كثافة احتمالية لأنها تحقق الشرطين:

$$0 \leq f(y_i) \leq 1$$

$$\sum_{i=0}^2 f(y_i) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

5 - حساب الاحتمالات التالية

$$P(Y < 4) = P(Y = 2) + P(Y = 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(Y \leq 4) = P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$$

$$P(Y = 4) = \frac{3}{36}$$

$$, P(Y = 1) = 0$$

Z: متغير عشوائي يعبر عن أكبر العددين الظاهرين

6 - تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Z وتمثيلها في جدول، وبيانها

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

$$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Z	1	2	3	4	5	6
P(Z=z)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

7 - تحديد دالة التوزيع للمتغير العشوائي Z وتمثيلها ببيانها

Z	1	2	3	4	5	6
F(Z)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

8 - أحسب الاحتمالات التالية

$$P(1 < Z \leq 4) = P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4) = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} = \frac{15}{36}$$

$$P(Z \leq 3) = P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36}$$

$$P(Z < 3) = P(Z = 1) + P(Z = 2) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{4}{36}$$

$$P(Z = 1) = \frac{1}{36}$$

المحاضرة السادسة: المتغيرات العشوائية المستمرة

تمهيد

في حالة المتغير العشوائي المستمر، لا يمكن تخصيص أي احتمال مهما كان صغيرا لأي قيمة من قيم المتغير نظرا لكثرة القيم المختلفة، بسبب وجود نقاط لا نهائية غير قابلة للعد مهما كانت مجموعة التعريف صغيرة، لذلك نجد أن النموذج الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر مختلف تماما عن حالة المتغير العشوائي المتقطع (كونجو، 2000، صفحة 242).

1- تذكير بالمتغير العشوائي المستمر

المتغير العشوائي المستمر هو المتغير المعروف على مجال لا نهائي غير قابل للعد مثل مجموعة الأعداد الحقيقية أو جزء منها (أوزان وأطوال وأعمار الطلبة، كمية الأمطار المتساقطة سنويا على مدينة ما، درجة الحرارة،...)

2- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

X هو المتغير العشوائي الذي يأخذ عددا لا نهائيا من القيم داخل أي مجال (مجال تعريفه)، وبالتالي احتمال قيمة معينة هو احتمال يؤول إلى الصفر:

$$P(X = x_i) \rightarrow 0$$

وفي هذه الحالة يكون لكل متغير عشوائي مستمر تابع يسمى تابع الكثافة الاحتمالية، يستعمل لحساب احتمال مجال معين، يرمز له بالرمز $f(x)$ ويتم حساب الاحتمال في هذه الحالة بحساب المساحة تحت المنحنى $f(x)$ بين حدود المجال، أي تكامل دالة الكثافة الاحتمالية من a إلى b ($a < b$) يعني احتمال المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة في المجال a و b ، وبالتالي لن يكون معرفا خارج هذا المجال، ويمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية بالصيغة الرياضية التالية:

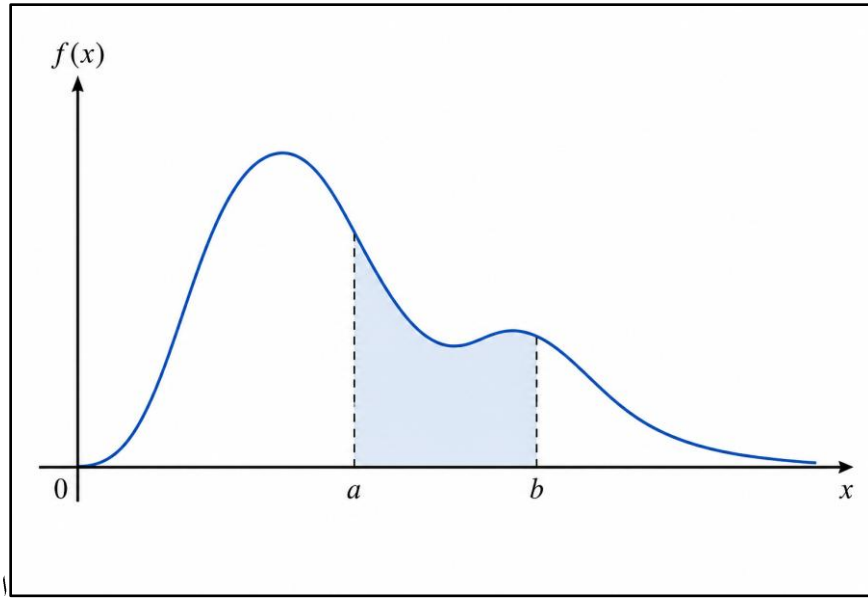
$$f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in [a, b] \\ 0, & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

ومنه يمكن حساب قيمة الاحتمالات لأي مجال جزئي من مجال التعريف $[a, b]$ ، فإذا كان $[x_1, x_2]$ مجال جزئي من $[a, b]$ و $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ فإن:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

ويمكن تمثيل هذا التوزيع بيانيا بالمساحة المحصورة بين $X = x_1$ و $X = x_2$ الواقعة تحت المنحنى $f(x)$:

الشكل (01): التمثيل البياني لدالة الكثافة لمتغير عشوائي مستمر



المصدر: من إعداد أستاذة المادة

المساحة الكلية الواقعة تحت المنحنى تساوي 1

3-خواص دالة الكثافة لمتغير عشوائي مستمر

1 - إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا معرفا في المجال $-\infty < X < +\infty$ فإن دالة الكثافة $f(x)$ تحقق الشروط التالية:

$$1. f(x) \geq 0$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

2 - إذا كان X معرف على المجال :

$$a < X < b$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

3 - الاحتمالات التالية لها نفس قيمة الاحتمال

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

4 - احتمال أن المتغير العشوائي المستمر X يأخذ قيمة معينة يساوي 0

$$P(X = a) = \int_a^a f(x) dx = 0$$

مثال

ليكن X متغير عشوائي تكتب دالة كثافته من الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} cx, & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

- أوجد قيمة الـ c حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية

الحل

حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشرطين:

$$1. f(x) \geq 0$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 cx dx = 1 \Rightarrow$$

$$c \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{2} (2^2 - 0^2) = 1 \Rightarrow \frac{4c}{2} = 1 \Rightarrow 4c = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

نعود للتحقق من الشرط 1:

$$1. f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}c \geq 0$$

$$\frac{1}{2}0 \geq 0$$

$$\frac{1}{2}2 \geq 0$$

4- دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر

إذا كان X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ ، فإن دالة التوزيع لهذا المتغير هي

الدالة $F(x)$ والتي يعبر عنها رياضيا بالصيغة التالية:

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx$$

5- خصائص دالة التوزيع

1 - تسمح دالة التوزيع بحساب أي احتمال

$$P(X \leq a) = P(X \prec a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$P(X \geq b) = P(X \succ b) = 1 - F(b) = 1 - \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \prec X \prec b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

2 - عندما تؤول دالة التوزيع إلى تكون معادلة للصفر

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

وعندما تؤول إلى تكون مساوية للواحد لأنها تكون قد شملت جميع القيم المحتملة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

3 - دالة التوزيع دالة تجميعية متزايدة (غير متناقصة)

4 - دالة التوزيع مستمرة على اليسار

مثال

لتكن لدينا دالة الكثافة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0, & \text{sin on} \end{cases}$$

- أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي X

الحل

أولاً: في المجال $x \leq 0$

$$F(x) = P(X \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx = 0$$

ثانياً: في المجال $0 < x < 3$

$$F(x) = P(0 < X < 3) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^x \frac{1}{9}x^2dx =$$

$$\frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^x = \frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{27}0^3 = \frac{1}{27}x^3$$

ثالثاً: في المجال $x > 3$

$$F(x) = P(X \geq 3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx + \int_3^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^3 \frac{1}{9}x^2dx + \int_3^{+\infty} 0dx =$$

$$\frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{27}3^3 - \frac{1}{27}0^3 = \frac{27}{27} = 1$$

إذن دالة التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{27} x^3 & 0 < x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

6- قاعدة لايبنيتز

تستعمل قاعدة لايبنيتز لتعميم قاعدة الضرب، حيث تساعد مشتقات الدوال في حساب التفاضل والتكامل ولدراسة هندسة المنحنيات وتحديد القيم المثلى للدوال وصياغة المعادلات التفاضلية التي توفر نماذج رياضية في العديد من المجالات.

تنص قاعدة لايبنيتز على أنه إذا كان كل من f و g دوال قابلة للاشتقاق ومرفوعة بقوة n فإن الناتج fg يكون مرفوع أيضا بقوة n ، وتحسب المشتقة بالشكل التالي:

$$(fg)^n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^k(x)$$

مشتقة دالة التوزيع هي دالة الكثافة الاحتمالية

$$F'(x) = f(x)$$

دالة الكثافة الاحتمالية هي تفاضل دالة التوزيع

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

7- المميزات العددية لمتغير عشوائي مستمر

تتمثل المميزات العددية في التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري

7-1- التوقع الرياضي

إذا كان X متغير عشوائي مستمر، دالة كثافته الاحتمالية هي $f(x)$ ، فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X يرمز لها بالرمز $E(x)$ وتعرف كما يلي: (القبانجي و حمامة كمرجي، 2012/2011، صفحة 127)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

7-1-1-تعميم التوقع الرياضي

إذا كان X متغير عشوائي مستمر، دالة كثافته الاحتمالية هي $f(x)$ ، وكانت $g(x)$ دالة عددية في X ، فإن التوقع الرياضي للدالة $g(x)$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

7-1-2-خواص التوقع الرياضي

- 5 - التوقع الرياضي لعدد ثابت هو نفس العدد الثابت: $E(a) = a$
- 6 - إذا كان X متغير عشوائي و b عدد ثابت فإن: $E(ax) = aE(x)$
- 7 - إذا كان X متغير عشوائي و a و b ثوابت فإن: $E(ax + b) = a.E(x) + b$
- 8 - إذا كان:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

فإن:

$$E(g(x)) = E(g_1(x) + g_2(x)) = E(g_1(x)) + E(g_2(x))$$

7-2-التباين

يساعد التباين على معرفة العلاقة بين قيم المتغير العشوائي X والقيمة المتوقعة له. إذا كان X متغير عشوائي مستمر دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ وتوقعه الرياضي $E(x)$ ، فإن التباين الخاص به والذي يرمز له بالرمز $V(x)$ يحسب بالعلاقة التالية:

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

7-2-1-خواص التباين

- 4 - تباين عدد ثابت يساوي الصفر: $V(a) = 0$
- 5 - إذا كان X متغير عشوائي و b عدد ثابت فإن: $V(x + b) = V(x)$
- 6 - إذا كان X متغير عشوائي و a و b ثوابت فإن: $V(ax + b) = a^2.V(x)$

7-3-الانحراف المعياري

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي مستمر هو الجذر التربيعي للتباين، ويرمز له بالرمز $\sigma(x)$ ، وكتب

كما يلي:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

مثال

من المثال السابق الخاص بالمتغير العشوائي المستمر:

1 - حساب التوقع الرياضي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0dx + \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}x dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

2 - حساب $E(x^2)$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0dx + \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2}x dx + \int_2^{+\infty} x^2 \cdot 0dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{4} = \frac{16}{2} = 8$$

تمارين محلولة

تمرين 01

لدينا الدالة التالية المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} A \frac{x}{2} & \dots\dots\dots x \in [0,2] \\ 0 & \dots\dots\dots x \notin [0,2] \end{cases}$$

1 - أوجد قيمة الثابت A حتى تكون هذه الدالة دالة كثافة احتمالية

2 - أوجد دالة التوزيع

3 - أوجد قيمة الاحتمال $P(1 < X < 2)$

تمرين 02

ليكن X كتغير عشوائي مستمر يمثل حجم مبيعات أحد منتجات مؤسسة ما، أقصى قيمة مبيعات تحققها المؤسسة تقدر بـ 100 وحدة يوميا، ودالة الكثافة الاحتمالية لها معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5000} & \dots\dots\dots x \in [0,100] \\ 0 & \dots\dots\dots x \notin [0,100] \end{cases}$$

1 - تأكد من أن هذه الدالة دالة كثافة احتمالية

2 - ما هو احتمال أن تحقق المؤسسة حجم مبيعات يومي:

- يفوق 95 وحدة

- يقل عن 50 وحدة

- محصور بين 40 و 80 وحدة

3 - أحسب القيمة المتوقعة (الحجم المتوسط اليومي)، والانحراف المعياري

4 - أوجد دالة التوزيع، ثم أحسب الاحتمالات السابقة باستعمال هذه الدالة

تمرين 03

إذا كانت دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X تكتب من الشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots x < 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x-1) & \dots\dots\dots 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \dots\dots\dots x > 2 \end{cases}$$

– أوجد الاحتمالات التالية: $P(x \leq \frac{5}{3})$, $P(x > \frac{3}{2})$, $P(\frac{4}{3} < x < \frac{5}{3})$

الحل

تمرين 01

1 - تحديد قيمة الثابت A حتى تكون هذه الدالة دالة كثافة احتمالية

حتى تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب تحقق الشرط التالي:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 &\Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \\ \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^2 A \frac{x}{2} dx + \int_2^{+\infty} 0dx &= 1 \Rightarrow \frac{A}{2} \int_0^2 xdx = \frac{A}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 1 \Rightarrow \\ \frac{A}{2} \left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] &= 1 \Rightarrow \frac{4A}{4} = 1 \Rightarrow A = 1 \end{aligned}$$

2 - تحديد دالة التوزيع

أولاً: في المجال $]-\infty, 0]$

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx \\ \int_{-\infty}^0 0dx &= 0 \Rightarrow F(x) = 0 \end{aligned}$$

ثانياً: في المجال $[0, 2]$

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^x f(x)dx = \\ \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^x \frac{x}{2} dx &= \frac{A}{2} \int_0^x xdx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{x^2}{4} \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

ثالثاً: في المجال $[2, +\infty[$

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \\ \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^2 \frac{x}{2} dx + \int_2^{+\infty} 0dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 xdx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow F(x) = 1 \end{aligned}$$

3 - تحديد قيمة الاحتمال

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_1^2 xdx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] = \frac{3}{4}$$

تمرين 02

1 - التأكد من أن الدالة دالة كثافة احتمالية

- التحقق من الشرط الأول:

$$f(x) = \frac{x}{5000} = \frac{0}{5000} = 0 \text{ عند القيمة } 0$$

$$f(x) = \frac{x}{5000} = \frac{100}{5000} = 0,2 \text{ عند القيمة } 100$$

إذن: $0 \leq f(x) \leq 1$

- التحقق من الشرط الثاني:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &\Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{100} f(x)dx + \int_{100}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow \\ &\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{100} \frac{x}{5000} dx + \int_{100}^{+\infty} 0dx \Rightarrow \frac{1}{5000} \int_0^{100} xdx = \frac{1}{5000} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{100} \Rightarrow \\ &\frac{1}{5000} \left[\frac{100^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{10000}{10000} = 1 \end{aligned}$$

بما أن الدالة تحقق الشرطين، فإن هذه الدالة دالة كثافة احتمالية

2 - حساب احتمال أن تحقق المؤسسة حجم مبيعات يومي:

$$P(X > 95) = 1 - P(X \leq 95) = 1 - \int_{-\infty}^{95} f(x)dx = 1 - \left[\int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{95} f(x)dx \right] \Rightarrow$$

$$1 - \left[\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{95} \frac{x}{5000} dx \right] = 1 - \left[\frac{1}{5000} \int_0^{95} xdx \right] = 1 - \left[\frac{1}{5000} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{95} \right] \Rightarrow$$

$$1 - \left[\frac{1}{5000} \left[\frac{95^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] \right] = 1 - \frac{9025}{10000} = 1 - 0,9025 = 0,0975$$

$$P(X < 50) = \int_{-\infty}^{50} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{50} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{50} \frac{x}{5000} dx = \frac{1}{5000} \int_0^{50} xdx = \frac{1}{5000} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{50} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{5000} \left[\frac{50^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{2500}{10000} = 0,25$$

$$P(40 < X < 80) = \int_{40}^{80} f(x)dx = \int_{40}^{80} \frac{x}{5000} dx = \frac{1}{5000} \int_{40}^{80} x dx = \frac{1}{5000} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{40}^{80} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{5000} \left[\frac{80^2}{2} - \frac{40^2}{2} \right] = \frac{4800}{10000} = 0,48$$

3 - حساب القيمة المتوقعة (الحجم المتوسط اليومي)، والانحراف المعياري

- القيمة المتوقعة

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \Rightarrow \int_{-\infty}^0 xf(x)dx + \int_0^{100} xf(x)dx + \int_{100}^{+\infty} xf(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{100} x \frac{x}{5000} dx + \int_{100}^{+\infty} x \cdot 0 dx \Rightarrow \frac{1}{5000} \int_0^{100} x^2 dx = \frac{1}{5000} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{100} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{5000} \left[\frac{100^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{1000000}{15000} = 66,67$$

- التباين

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (66,67)^2 \Rightarrow \left(\int_{-\infty}^0 x^2 f(x)dx + \int_0^{100} x^2 f(x)dx + \int_{100}^{+\infty} x^2 f(x)dx \right) - (66,67)^2 \Rightarrow$$

$$\left[\int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 dx + \int_0^{100} x^2 \frac{x}{5000} dx + \int_{100}^{+\infty} x^2 \cdot 0 dx \right] - (66,67)^2 \Rightarrow \left[\frac{1}{5000} \int_0^{100} x^3 dx = \frac{1}{5000} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{100} \right] - (66,67)^2 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{5000} \left[\frac{100^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right] \right] - (66,67)^2 = \frac{100000000}{20000} - (66,67)^2 = 555,11$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{555,11} = 23,56$$

4 - تحديد دالة التوزيع، ثم حساب الاحتمالات السابقة باستعمال هذه الدالة

أولاً: في المجال $]-\infty, 0]$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^0 0 dx = 0 \Rightarrow F(x) = 0$$

ثانياً: في المجال $[0, 100]$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^x f(x)dx =$$

$$\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^x \frac{x}{5000} dx = \frac{1}{5000} \int_0^x xdx = \frac{1}{5000} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{5000} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{x^2}{10000} \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{10000}$$

ثالثا: في المجال $]100, +\infty[$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{100} f(x)dx + \int_{100}^{+\infty} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{100} \frac{x}{5000} dx + \int_{100}^{+\infty} 0dx = \frac{1}{5000} \int_0^{100} xdx = \frac{1}{5000} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{100} =$$

$$\frac{1}{5000} \left[\frac{100^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{10000}{10000} = 1 \Rightarrow F(x) = 1$$

رابعا: حساب الاحتمالات

$$P(X > 95) = 1 - P(X \leq 95) = 1 - F(95) = 1 - \frac{95^2}{10000} = 1 - 0,9025 = 0,0975$$

$$P(X < 50) = F(50) = \frac{50^2}{10000} = \frac{2500}{10000} = 0,25$$

$$P(40 < X < 80) = \frac{80^2}{10000} - \frac{40^2}{10000} = \frac{4800}{10000} = 0,48$$

تمرين 03

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots x < 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x-1) & \dots\dots\dots 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \dots\dots\dots x > 2 \end{cases}$$

- حساب الاحتمالات التالية

$$P(x \leq \frac{5}{3}) = F(\frac{5}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{5}{3} - 1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{2}{3}) = \frac{3+4}{9} = \frac{7}{9}$$

$$P(x > \frac{3}{2}) = 1 - F(\frac{3}{2}) = 1 - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{3}{2} - 1) \right] = 1 - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}) \right] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(\frac{4}{3} < x < \frac{5}{3}) = F(\frac{5}{3}) - F(\frac{4}{3}) = \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{5}{3} - 1) \right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{4}{3} - 1) \right] =$$

$$\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{2}{3}) \right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{1}{3}) \right] = \frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$$

المحاضرة السابعة: التوزيعات الاحتمالية

تمهيد

قد يكون المتغير العشوائي يتبع توزيعا احتماليا معينا بمعنى أن دالة كثافته الاحتمالية لها شكل معين، وتنقسم المتغيرات العشوائية إلى نوعين حسب نوع المتغير العشوائي الذي تصفه، ومنه نميز:

I- التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة

من بين أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة:

1-توزيع برنولي

توزيع برنولي من أبسط التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، ويعتبر حالة خاصة من التوزيعات الاحتمالية المنفصلة ويستخدم هذا التوزيع إذا كان هناك تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية: (محمد الخضيرى و مصطفى محمد السيد، صفحة 330)

- 1 - يمكن إجراء هذه التجربة مرة واحدة فقط؛
- 2 - التجربة لها نتيجتان فقط: إما ظهور حدث معين "نجاح" أو عدم ظهوره "فشل"؛
- 3 - احتمال النجاح مقدار ثابت، واحتمال الفشل مقدار ثابت أيضا، حيث:

$$p = P_{\text{النجاح}}$$

$$q = 1 - P_{\text{الفشل}}$$

$$p + q = 1$$

1-2-دالة الكثافة لتوزيع برنولي

إذا عرفنا X متغير عشوائي يمثل عدد مرات النجاح في فراغ العينة فإن:

$x=1$: ظهور حدث النجاح

$x=0$: ظهور حدث الفشل

$$x = 0,1$$

$$x \rightarrow \text{bernoulli}(p)$$

$$f(x) = p^x q^{1-x}$$

1-3-المميزات العددية لتوزيع برنولي

$$1 - \sum P(x) = 1$$

$$2 - E(x) = p$$

$$3 - V(x) = p.q$$

$$4 - \sigma(x) = \sqrt{p.q}$$

$$5 - F(x) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots x < 0 \\ q & \dots\dots\dots 0 \leq x < 1 \\ 1 & \dots\dots\dots x \geq 1 \end{cases}$$

2-توزيع ثنائي الحد

يدرس هذا التوزيع التجارب ذات الأهمية التطبيقية في مختلف العلوم، والتي يترتب عنها إحدى النتيجةين فقط، إما ظهور حدث معين (نجاح) أو عدم ظهوره (فشل)، ويمثل توزيع ثنائي الحد تعميما لتوزيع برنولي، بحيث يحقق توزيع ثنائي الحد الشروط التالية: (محمد الخضيرى و مصطفى محمد السيد، صفحة 335)

1 - كل تجربة لها نتيجتين فقط نجاح/ فشل؛

2 - يمكن تكرار التجربة n من المرات؛

3 - احتمال النجاح واحتمال الفشل مقدارين ثابتين (p احتمال النجاح، q احتمال الفشل)؛

4 - نتيجة كل تجربة مستقلة عن نتيجة التجربة الأخرى.

2-1-دالة كثافة توزيع ثنائي الحد

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد مرات النجاح في تجربة ذي الحدين، فإن هذا المتغير يتبع توزيع

ثنائي الحد ذي المعالم p، n، وتكتب دالة كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

$$x \rightarrow \text{binom}(p, n)$$

$$f(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

$$p + q = 1$$

2-2-المميزات العددية لتوزيع ثنائي الحد

$$1 - \sum P(x) = 1$$

$$2 - E(x) = n.p$$

$$3 - V(x) = n.p.q$$

$$4 - \sigma(x) = \sqrt{n.p.q}$$

مثال

إذا كانت نسبة المدخنين في أحد المجتمعات 60، وتم سحب عينة مكونة من 20 فرد، أحسب

الاحتمالات التالية:

- 1 - عدد المدخنين في العينة 2
- 2 - لا يوجد أي فرد مدخن
- 3 - يوجد فردين على الأكثر يدخنان

الحل

أي فرد يكون إما مدخن أو غير مدخن:

- التجربة تحتل نتيجتان فقط؛
- نتيجة كل فرد مستقلة عن الأخرى؛
- يوجد أكثر من مدخن في العينة

إذن نعتمد على توزيع ثنائي الحد

X : متغير عشوائي متقطع يمثل الأفراد المدخنين في العينة

n : عدد عناصر العينة 20

p : احتمال أن يكون الفرد مدخن 0,6

q : احتمال أن يكون الفرد غير مدخن 0,4

$$x \rightarrow \text{binom}(p, n)$$

$$f(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

- حساب الاحتمالات

- 1 - عدد المدخنين في العينة فردين

$$P(X = 2) = f(x) = C_{20}^2 p^2 q^{20-2} = C_{20}^2 0,6^2 0,4^{18} = 47.10^{-7}$$

- 2 - لا يوجد أي فرد مدخن

$$P(X = 0) = f(x) = C_{20}^0 p^0 q^{20-0} = C_{20}^0 0,6^0 0,4^{20} = 10^{-9}$$

- 3 - يوجد فردين على الأكثر يدخنان

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\
&C_{20}^0 p^0 q^{20-0} + C_{20}^1 p^1 q^{20-1} + C_{20}^2 p^2 q^{20-2} = \\
&C_{20}^0 0,6^0 0,4^{20} + C_{20}^1 0,6^1 0,4^{19} + C_{20}^2 0,6^2 0,4^{18} = 50,3 \cdot 10^{-7}
\end{aligned}$$

3-توزيع بواسون

يقدم توزيع بواسون نموذج المعلومات التي تأخذ شكل التعداد، وله القدرة على وصف الظواهر

النادرة الحدوث مثل: (محمد الخضيرى و مصطفى محمد السيد، صفحة 341)

- عدد حوادث السير خلال فترة محددة؛
- عدد الأخطاء المطبعية في صفحة ما؛
- عدد الولاول سنويا؛
- عدد المكالمات الهاتفية التي تصل مركز استقبال مشفى معين خلال اليوم؛
- عدد السلع التالفة التي ينتجها مصنع في فترة محددة.

3-1-دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد مرات النجاح التي تحدث في فترة زمنية معينة أو مكان محدد بمعدل λ فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون ذو المعلمة λ ودالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$\begin{aligned}
x &\rightarrow \text{Poisson}(\lambda) \\
f(x) &= \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}
\end{aligned}$$

حيث:

e : مقدار ثابت (الأساس الطبيعي للوغاريتم) ومقداره 2,7183

λ : متوسط عدد النجاحات في وحدة الزمن

3-2-المميزات العددية لتوزيع بواسون

$$\begin{aligned}
1 - \sum P(x) &= 1 \\
2 - E(x) &= \lambda \\
3 - V(x) &= \lambda \\
4 - \sigma(x) &= \sqrt{\lambda}
\end{aligned}$$

ملاحظة

في ثاني الحد عندما تكون n كبيرة (أكبر من 30)، واحتمال النجاح صغير (أقل من 5)، فإن توزيع

ثنائي الحد بمعالم n و p يتم تقريبه بتوزيع بواسون بمعلمة $\lambda = n.p$

مثال

إذا كان احتمال وجود طالب أعسر في الجامعة هو 0,01 وتم اختيار عينة مكونة من 400 طالب

عشوائيا من الجامعة، أحسب:

1 - احتمال وجود 4 طلبة على الأقل يستخدمون اليد اليسرى في هذه العينة

2 - العدد المتوقع من هذه الفئة في هذه العينة

الحل

أي طالب يكون إما أعسر أو لا:

- التجربة تحتل نتيجتان فقط؛

- نتيجة كل طالب مستقلة عن الأخرى؛

- يوجد أكثر من طالب في العينة

إذن نعتمد على توزيع ثنائي الحد، ولكن بما أن قيمة الاحتمال أقل من 5% وحجم العينة أكبر من 30 فإن

X يتبع قانون بواسون بمعلمة $\lambda = n.p = 400.0,01 = 4$

X : متغير عشوائي متقطع يمثل الطلبة الذين يستخدمون اليد اليسرى في العينة

n : عدد عناصر العينة 400

p : احتمال أن يكون الطالب أعسر 0,01

1 - حساب احتمال وجود 4 طلبة على الأقل يستخدمون اليد اليسرى في هذه العينة

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$1 - \left[\frac{e^{-4} \cdot \lambda^0}{0!} + \frac{e^{-4} \cdot \lambda^1}{1!} + \frac{e^{-4} \cdot \lambda^2}{2!} + \frac{e^{-4} \cdot \lambda^3}{3!} \right] = 1 - \left[e^{-4} \cdot \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} \right) \right] =$$

$$1 - (1 + 4 + 8 + 10,76) = 0,5665 \approx 0,57$$

2 - العدد المتوقع من هذه الفئة في هذه العينة

$$E(x) = \lambda = 4$$

4-التوزيع المنتظم

يتم استخدام التوزيع المنتظم عندما يأخذ المتغير العشوائي X قيما مختلفة باحتمالات متساوية .
(بوعافية و رحالي، الصفحات 52-54)

4-1-دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم

إذا كان X متغير عشوائي متقطع يتبع التوزيع المنتظم، فإن دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$x = 0,1,2,\dots,n$$

$$f(x) = P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

$$P(X = 1) = P(X = 2) + \dots = P(X = n)$$

4-2-المميزات العددية للتوزيع المنتظم

$$E(x) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(x) = \frac{n^2-1}{12}$$

مثال

عند رمي حجر نرد، نميز X متغير عشوائي يمثل عدد النقاط المسجلة على الجهة التي يستقر عليها

الحجر

1 - أوجد دالة الكثافة

2 - أحسب التوقع الرياضي والتباين بطريقتين

الحل

1 - دالة الكثافة الاحتمالية

$$x = 0,1,2,3,4,5,6$$

$$f(x) = P(X = x_i) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

2 - التوقع الرياضي والتباين

الطريقة 01:

$$E(x) = \sum_{i=1}^6 x_i f(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \sum_{i=1}^6 x_i^2 f(x_i) - E(x)^2 = \left[1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} \right] - (3,5)^2 = 2,92$$

الطريقة 02:

$$E(x) = \frac{6+1}{2} = 3,5$$

$$V(x) = \frac{6^2 - 1}{12} = 2,92$$

II-التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة

من بين أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة:

1-التوزيع المنتظم

يعتبر التوزيع المنتظم المستمر من أبسط التوزيعات الإحصائية، وتتميز دالة كثافته الاحتمالية بأنها

منتظمة أي ثابتة على طول مجال مغلق

1-2-دالة الكثافة للتوزيع المنتظم

إذا كان X متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[a, b]$ ، فإن دالة كثافته الاحتمالية

تعطى بمقدار ثابت كما يلي:

$$x \rightarrow \text{unifopm}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \dots\dots\dots x \in [a, b] \\ 0 & \dots\dots\dots x \notin [a, b] \end{cases}$$

1-3-المميزات العددية للتوزيع المنتظم

$$1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$2 - E(x) = \frac{b+a}{2}$$

$$3 - V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$4 - F(x) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \dots\dots\dots a \leq x < b \\ 1 & \dots\dots\dots x \geq b \end{cases}$$

مثال

إذا كان X متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[1,3]$ ، أوجد:

1 - احتمال أن يكون X محصور بين 1 و 2,6

2 - احتمال أن يكون X أكبر أو يساوي 2

الحل

بما أن X متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم، فإن دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$x \rightarrow \text{unifopm}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-1} & \dots\dots\dots x \in [1,3] \\ 0 & \dots\dots\dots x \notin [1,3] \end{cases}$$

ودالة توزيعه هي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots x < 1 \\ \frac{x-1}{3-1} & \dots\dots\dots 1 \leq x < 3 \\ 1 & \dots\dots\dots x \geq 3 \end{cases}$$

1 - احتمال أن يكون X محصور بين 1 و 2,6

$$P(1 \leq X \leq 2,6) = F(2,6) - F(1) = \frac{2,6-1}{3-1} - \frac{2,6-1}{3-1} = 0,8$$

2 - احتمال أن يكون X أكبر أو يساوي 2

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2-1}{3-1} = 0,5$$

2-التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعي من أكثر التوزيعات استخداما في المجال المالي والعلمي، وتستند إليه العديد من الطرق

الإحصائية، وله استنتاجات علمية كبيرة في نظرية المعاينة (التميمي، 2024، صفحة 103)

2-1-دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي

يكون المتغير العشوائي المستمر X يتبع التوزيع الطبيعي بمعالم (μ, σ^2) ونكتب: (التميمي،

2024، صفحة 103)

$$x \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

فإن دالة كثافته الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < x < +\infty$$

μ : التوقع الرياضي (الوسط الحسابي)

σ^2 : التباين

e : الأساس الطبيعي للوغاريتم

π : 3,1416

حيث تحقق دالة الكثافة الشرطين:

$$1 - f(x) \geq 0$$

$$2 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

2-2- خواص التوزيع الطبيعي

$$1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$2 - E(x) = \mu$$

$$3 - V(x) = \sigma^2$$

2-3- خواص منحنى التوزيع الطبيعي

- 1 - المساحة الكلية تحت منحنى الدالة $f(x)$ يساوي الواحد الصحيح؛
- 2 - منحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي تأخذ شكل الجرس (الناقوس)؛
- 3 - شكل المنحنى يتحدد تماما إذا علمنا قيمة الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ^2 ، لأن قيمة μ تحدد مركز المنحنى؛
- 4 - منحنى التوزيع متماثل حول الوسط μ ، أي أن قيمة الوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي تساوي الوسيط وتساوي المنوال؛
- 5 - منحنى التوزيع الطبيعي يصل إلى قيمته العظمى عند $x = \mu$ وتتوقف درجة تفلطح التوزيع على قيمته σ ؛
- 6 - القيمة الصغيرة لـ σ تعني أن لدينا جرسا طويلا مدببا بينما القيمة الكبيرة لـ σ تعني أن الجرس قصير ومفلطح؛

7 - بما أن المتغير الطبيعي متصل فإن هذا المتغير لا يأخذ قيمة معينة، ولكنه دائما يوجد في فترة، لذلك يحسب الاحتمال بتكامل دالة الكثافة بين حدي الفترة، أي حساب المساحة تحت منحني دالة الكثافة، وهذا التكامل صعب تعيينه، لذلك تم إيجاد حل لكيفية حساب الاحتمال للتوزيع الطبيعي.

3-التوزيع الطبيعي المعياري

يمكن تحويل كل توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري من أجل تسهيل حساب الاحتمالات من خلال جداول تسمى جداول التوزيع الطبيعي المعياري. (التميمي، 2024، صفحة 104)

3-1-دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي المعياري

إذا كانت $\sigma^2 = 1$ و μ في التوزيع الطبيعي، فإن هذا التوزيع في هذه الحالة يسمى توزيع طبيعي معياري، وبالتالي فإن المتغير العشوائي Z الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، تكتب دالة كثافته الاحتمالية من الشكل: (التميمي، 2024، صفحة 104)

$$Z \rightarrow N(0,1)$$

$$\phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

حيث:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

النظرية

إذا كان X متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي μ وتوزيع معياري σ ، فإن المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط 0 وانحراف معياري 1، ونكتب:

$$X \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

$$Z \rightarrow N(0,1)$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

3-2-دالة التوزيع للتوزيع الطبيعي المعياري

دالة التوزيع للمتغير العشوائي Z تكتب من الشكل:

$$\phi(Z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \phi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

3-4- خواص دالة التوزيع

إذا كان a و b ثوابت فإن:

$$1 - P(Z \leq a) = \phi(a)$$

$$2 - P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \phi(a)$$

$$3 - P(a \leq Z \leq b) = \phi(b) - \phi(a)$$

$$\phi(-a) = 1 - \phi(a)$$

تمارين محلولة

تمرين 01

إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع دو الحدين بمعلم p, n وكان $0 < p < 1$ و $n > 0$ ، فما هو احتمال أن يكون من بين 1000 شخص الذين حقنوا بهذا الدواء:

تمرين 02

إذا كان احتمال أن يعاني شخص من آثار جانبية نتيجة الحقن بمحلول معين هو 0,002، فما هو احتمال أن يكون من بين 1000 شخص الذين حقنوا بهذا الدواء:

- 1 - 5 أشخاص فقط يعانون من آثار جانبية؛
- 2 - 5 أشخاص على الأكثر يعانون من آثار جانبية
- 3 - 5 أشخاص على الأقل يعانون من آثار جانبية

تمرين 03

إذا كان متوسط الحوادث الأسبوعية على الطريق مستغانم- غليزان هو 4 حوادث

- 1 - ما هو احتمال وقوع أكثر من حادثين أسبوعياً
- 2 - أوجد التوقع والانحراف المعياري لعدد الحوادث على الطريق مستغانم- غليزان

تمرين 04

إذا كانت نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام دواء ما هي 60%، وتم تجريبه على 5 مرضى مصابين بهذا المرض، ونعرف X المتغير العشوائي لعدد المرضى الذين تماثلوا للشفاء نتيجة الدواء (حالات الشفاء)

- 1 - حدد نوع المتغير العشوائي وقانون التوزيع الاحتمالي الذي يتبعه
- 2 - أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير X
- 3 - أحسب الاحتمالات التالية:
 - استجابة 3 مرضى لهذا الدواء
 - استجابة مريض واحد على الأقل
 - استجابة مريضين على الأقل
- 4 - أحسب التوقع والانحراف المعياري لعدد حالات الشفاء بطريقتين

تمرين 05

حسب معطيات السنوات الماضية، فإن نقاط طلبة السنة الأولى ليسانس في مادة الإحصاء 2 تتوزع

توزيع طبيعي بمتوسط قدره 7 وانحراف معياري 2

1 - ما هي طبيعة المتغير العشوائي ونوعه

2 - أكتب الصيغة الرياضية لهذا المتغير

3 - أحسب نسبة الطلبة الذين:

- تقل نقاطهم عن 3 نقاط

- تفوق نقاطهم 10 نقاط

- تكون نقاطهم محصورة بين 7 و 11

الحل

تمرين 01

$$\sigma^2 = 6 \Rightarrow n.p.q = 6 \Rightarrow n.p.(1-p) = 6 \Rightarrow np - np^2 = 6$$

$$E(X) = 10 \Rightarrow np = 10 \Rightarrow 10.(1-p) = 6 \Rightarrow (1-p) = \frac{6}{10} \Rightarrow$$

$$p = 1 - 0,6 \Rightarrow p = 0,4$$

$$np = 10 \Rightarrow n \cdot 0,4 = 10 \Rightarrow n = \frac{10}{0,4} \Rightarrow n = 25$$

تمرين 02

X: متغير عشوائي يمثل عدد الأشخاص الذين يعانون آثار جانبية

n: حجم العينة 1000

p: احتمال وجود آثار جانبية 0,002

بما أن $n > 50$ و p صغيرة فإن:

$$X \rightarrow \text{Poisson}(\lambda)$$

$$\lambda = n.p = 0,002 \cdot 1000 = 2 \text{ حيث}$$

ودالة الكثافة الاحتمالية

$$P(x) = p(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$P(X = 5) = \frac{e^{-2} 2^5}{5!} = 0,036$$

$$P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^5 \frac{e^{-2} 2^x}{x!} = e^{-2} \sum_{x=0}^5 \frac{2^x}{x!} =$$

$$e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} \right) =$$

$$(1 + 2 + 2 + 1.33 + 0.66 + 0.26) = 0.98$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - \sum_{x=0}^4 \frac{e^{-2} 2^x}{x!} = 1 - e^{-2} \sum_{x=0}^4 \frac{2^x}{x!} =$$

$$1 - e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} \right) =$$

$$1 - (1 + 2 + 2 + 1.33 + 0.66) = 0,054$$

تمرين 03

X : متغير عشوائي يمثل عدد الحوادث الأسبوعية على الطريق مستغانم-غليزان

$$X \rightarrow \text{Poisson}(\lambda)$$

$$\lambda = 4$$

$$P(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^2 \frac{e^{-4} 4^x}{x!} = 1 - e^{-4} \sum_{x=0}^2 \frac{4^x}{x!} =$$

$$1 - e^{-4} \left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} \right) = 0,61$$

$$E(X) = \lambda = 4$$

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4} = 2$$

تمرين 04

1 - نوع المتغير العشوائي

X : متغير عشوائي متقطع كمي يمثل عدد حالات الشفاء، يتبع توزيع ثنائي الحدين

$$X \rightarrow \text{Bino}, (n, p)$$

$$X \rightarrow \text{Bino}, (5, 0,6)$$

2 - دالة الكثافة

$$f(x) = P(X = x) = C_n^x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$P(X = 0) = C_5^0 \cdot p^0 \cdot q^{5-0} = 1 \cdot 1 \cdot (0,4)^5$$

$$P(X = 1) = C_5^1 \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^4$$

$$P(X = 2) = C_5^2 \cdot (0,6)^2 \cdot (0,4)^3$$

$$P(X = 3) = C_5^3 \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^2$$

$$P(X = 4) = C_5^4 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^1$$

$$P(X = 5) = C_5^5 \cdot (0,6)^5 \cdot (0,4)^0$$

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,01	0,077	0,23	0,34	0,26	0,078

3 - حساب الاحتمالات

$$P(X = 3) = 0,34$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,01 = 0,99$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - (0,01 + 0,077) = 0,913$$

4 - حساب التوقع والانحراف المعياري

$$E(X) = n.p = 5.0,6 = 3$$

$$V(x) = n.p.q = 5.0,6.0,4 = 1,2$$

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1,2} = 1,095$$

تمرين 05

1 - طبيعة ونوع المتغير

X: متغير عشوائي مستمر كمي

2 - الصيغة الرياضية للمتغير

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < x < +\infty$$

3 - حساب نسبة الطلبة

$$X \rightarrow N(7,2)$$

$$Z \rightarrow N(0,1)$$

$$Z = \frac{X-7}{2}$$

$$P(X < 3) = P\left(\frac{X-7}{2} < \frac{3-7}{2}\right) = P(Z < -2) = 1 - \phi(2) =$$

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - P\left(\frac{X-7}{2} \leq \frac{10-7}{2}\right) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - \phi(1,5) =$$

$$P(7 \leq X \leq 11) = P\left(\frac{7-7}{2} \leq \frac{X-7}{2} \leq \frac{11-7}{2}\right) = P(0 \leq Z \leq 2) = \phi(2) - \phi(0)$$

المحاضرة الثامنة: العزوم والذالة المتجددة للعزوم

تمهيد

يعتبر مفهوم العزوم لمتغير عشوائي تعميما لمميزاته العددية، وتستخدم العزوم في حساب عدد من المقاييس مثل معامل التماثل، معامل التفلطح، وغيرها. تعرف العزوم بدلالة التوقع الرياضي لمتغير عشوائي، وهي بالواقع تطبيقات مباشرة للتوقع الرياضي.

1-تعريف العزوم

يعرف العزم من الدرجة k لمتغير عشوائي X حول المتوسط الحسابي لهذا المتغير (أو حول قيمة معينة أخرى لهذا المتغير) بأنه القيمة المتوقعة للقوة k لانحراف المتغير عن وسطه الحسابي (أو عن قيمة معينة)، ويرمز له بالرمز M_k ويحسب بالعلاقة التالية: (امطير مفتاح، 2020، صفحة 220)

- إذا كان X متغير عشوائي متقطع

$$M_k = E[(X - \mu)^k] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^k \cdot f(x_i)$$

- إذا كان X متغير عشوائي مستمر

$$M_k = E[(X - \mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x) dx$$

نسمي القيمة M_k بالعزم المركزي من الدرجة k

- إذا كان $\mu = 0$ فإن:

$$M_k^* = E(X)^k = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot f(x_i)$$

$$M_k^* = E(X)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx$$

نسمي القيمة M_k^* بالعزم المركزي من الدرجة k

- إذا كان $\mu \neq 0$ فإن:

$$M_k = E[(X - \mu)^k] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^k \cdot f(x_i)$$

$$M_k = E[(X - \mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x) dx$$

يسمى العزم المركزي من الدرجة k

2-خواص العزوم

1 - إذا كان $\mu = 0$ و $k = 1$ فإن:

$$M_1^* = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(x_i)$$

$$M_1^* = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

2 - إذا كان $\mu \neq 0$ و $k = 2$ فإن:

$$M_2 = E(X - \mu)^2 = \sigma^2$$

3 - إذا رمزنا للعزم الأولي ب α والعزم المركزي ب μ فإن

$$\mu_0 = 1, \mu_1 = E(X), \mu_2 = E(X^2), \mu_3 = E(X^3)$$

$$\mu_0 = 1, \mu_1 = 0, \mu_2 = \sigma^2$$

وبالتالي العلاقة بين العزوم المركزية والعزوم الأولية يمكن أن تكتب بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} M_k &= E[(X - \alpha_1)^k] = \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha_1)^k \cdot f(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum C_n^k (-\alpha_1)^n \cdot x_i^{k-n} \right] f(x_i) = \sum (-1)^n \cdot C_n^k \cdot \alpha_1^n \cdot \left(\sum x_i^{k-n} \cdot f(x_i) \right) \\ &= \sum (-1)^n \cdot C_n^k \cdot \alpha_1^n \cdot \alpha_{k-n} \end{aligned}$$

α_{k-n} : العزم الأولي من الدرجة k-n وبالتالي بعد التبديل في العلاقة الأخيرة يمكن كتابة العلاقة التالية:

$$k = 0 \Rightarrow \mu_0 = \alpha_0 = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow \mu_1 = \alpha_1 - \alpha_1 = 0$$

$$k = 2 \Rightarrow \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \sigma^2$$

$$k = 3 \Rightarrow \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1 \cdot \alpha_2 + 2\alpha_1^3$$

مثال 01

أحسب العزوم المركزية من الدرجة 0، 1، 2 للمتغير العشوائي المتقطع الذي يمثل عدد مرات

الحصول على صورة في رميتين لقطعة نقدية

الحل

X	0	1	2
f(x _i)	1/4	2/4	1/4

$$E(x) = \sum_{i=0}^2 x_i \cdot f(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$\mu_0 = \alpha_0 = E(x^0) = \sum_{i=0}^2 x_i^0 \cdot f(x_i) = 0^0 \cdot \frac{1}{4} + 1^0 \cdot \frac{2}{4} + 2^0 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$\mu_1 = E(x-1)^1 = \sum_{i=0}^2 (x_i - 1)^1 \cdot f(x_i) = (0-1)^1 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^1 \cdot \frac{2}{4} + (2-1)^1 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\mu_2 = E(x-1)^2 = \sum_{i=0}^2 (x_i - 1)^2 \cdot f(x_i) = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{2}{4} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال 02

أحسب العزوم من الدرجة 0، 1، 2 للمتغير العشوائي المستمر ذو دالة الكثافة بطريقتين:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \dots\dots\dots x \in [0,2] \\ 0 & \dots\dots\dots x \notin [0,2] \end{cases}$$

الحل

طريقة 01

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{4} = 2$$

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{18-16}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{4}{3}\right)^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot f(x) dx = 1$$

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{4}{3}\right)^1 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{3} \cdot f(x) dx =$$

$$E(x) - \frac{4}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 - 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot x + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right) \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 - \frac{8}{3} \cdot x + \frac{16}{9}\right) \cdot \frac{x}{2} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{8}{6} x^2 + \frac{16}{18} x\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx - \frac{8}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx + \frac{16}{18} \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 - \frac{8}{6} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \frac{16}{18} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{4} - \frac{8}{6} \cdot \frac{8}{3} + \frac{16}{18} \cdot \frac{4}{2} = \frac{2}{9}$$

طريقة 02

$$\mu_0 = \alpha_0 = 1$$

$$\mu_1 = \alpha_1 - \alpha_1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = V(x) = \frac{2}{9}$$

3-الدالة المتجددة للعزوم

الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي X هي القيمة المتوقعة للدالة الأسية لمضاعفات المتغير X ويرمز لها بالرمز $m_x(t)$ ويعبر عنها بالعلاقة الرياضية التالية:

$$m_x(t) = E(e^{xt})$$

1 - إذا كان X متغير عشوائي متقطع وبافتراض أن العزوم من الدرجة k الابتدائية معلومة، فإن

الدالة المولدة لعزوم للمتغير X تكتب من الشكل

$$\begin{aligned} m_x(t) &= E(e^{xt}) = \sum_{x=1}^n e^{xt} \cdot f(x) = \\ &= \sum_{x=1}^n \left(1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \dots + \frac{(tx)^n}{n!} \right) \cdot f(x) = \\ &= \sum_{x=1}^n f(x) + t \sum_{x=1}^n x \cdot f(x) + \frac{t^2}{2!} \sum_{x=1}^n x^2 \cdot f(x) + \frac{t^3}{3!} \sum_{x=1}^n x^3 \cdot f(x) + \dots + \frac{t^n}{n!} \sum_{x=1}^n x^n \cdot f(x) \end{aligned}$$

ومنه

$$m_x(t) = 1 + t\alpha_1 + \frac{t^2}{2!}\alpha_2 + \frac{t^3}{3!}\alpha_3 + \dots + \frac{t^n}{n!}\alpha_n$$

ومنه نستنتج أن الدالة المولدة للعزوم هي عبارة عن دالة تضم كافة العزوم الأولية، وبالتالي يمكن

اشتقاق أي عزم من العزوم بتكرار عملية الاشتقاق للدالة المولدة للعزوم.

2 - إذا كان X متغير عشوائي مستمر، فإن الدالة المولدة للعزوم تعرف بالتكامل:

$$\begin{aligned} m_x(t) &= E(e^{xt}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} \cdot f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \dots + \frac{(tx)^n}{n!} \right) \cdot f(x) dx = \\ &= 1 + t \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx + \frac{t^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx + \frac{t^3}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f(x) dx + \dots + \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f(x) dx = \\ &= 1 + t\alpha_1 + \frac{t^2}{2!}\alpha_2 + \frac{t^3}{3!}\alpha_3 + \dots + \frac{t^n}{n!}\alpha_n \end{aligned}$$

4-خواص الدالة المتجددة للعزوم

1 - إذا كانت دالة في المتغير العشوائي X و k ثابت فإن:

$$m_{k\mu(x)}(t) = E(e^{tk\mu(x)}) = m_{\mu(x)}(kt)$$

$$m_{k+\mu(x)}(t) = E(e^{t\mu(x)+k}) = e^{tk} m_{\mu(x)}(t)$$

2 - إذا كان المتغيرات X و Y مستقلان، وكانت $\mu(x)$ و $\nu(x)$ دالتين في X و Y على الترتيب

فإن:

$$m_{\mu(x)+\nu(x)}(t) = m_{\mu(x)}(t).m_{\nu(x)}(t)$$

قائمة المراجع

1. انيس كونيخو. (2000). الإحصاء والاحتمال. مكتبة العبيكان، المملكة العربية السعودية.
2. جاسم التميمي. (2024). الإحصاء الحيوي باستخدام برنامج spss. مركز الكتاب الأكاديمي.
3. ديب مبارك أسير. (2009/2008). مبادئ في الاحتمالات والإحصاء. كلية العلوم، جامعة تشرين، وزارة التعليم العالي، سوريا.
4. سليم العمرأوي. (بلا تاريخ). محاضرات في مقياس الإحصاء2. الجزائر: كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة أم البواقي.
5. سمير بوعافية، و بلقاسم رحالي. (بلا تاريخ). محاضرات في مقياس الإحصاء2. الجزائر: كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة محمد البشير الابراهيمى برج بوعريرج.
6. عباسه هاشمي. (2018). محاضرات في الإحصاء2.
7. عبد الرحمن بن براهيم محمد الخضيرى، و عبد الفتاح مصطفى محمد السيد. (بلا تاريخ). مبادئ الإحصاء والاحتمالات وتطبيقاتها باستخدام spss. المملكة العربية السعودية: جامعة سلمان بن عبد العزيز.
8. عثمان امطير مفتاح. (2020). حساب الاحتمالات. مركز الكتاب الأكاديمي.
9. علاء الدين القبانجي، و حسام حمامة كمرجي. (2012/2011). سوريا: كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، منشورات جامعة دمشق.
10. لحسن عبد الله بشويوى. (2010). حساب الاحتمالات: المبادئ والتطبيق. لولو للنشر.
11. محمد بوحجلة. (2020/2019). مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك بعنوان محاضرات في الإحصاء2. كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير، جامعة البليدة2 علي لونيبي.
12. مصطفى طويطي. (2018/2017). محاضرات في الإحصاء2 دروس وتمارين محلولة. الجزائر: كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، فسم العلوم الاقتصادية، جامعة غرداية.