الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
جامعة عبد الحميد بن باديس – مستغانم
University Of Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
Faculty of Economic Sciences، Commerce and Management Sciences

رياضيات المؤسسة

مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس

"علوم تجارية"

إعداد الدكتورة: بسدات كريمة

السنة الدراسية: 2021 – 2022

قائمة المراجع	

المقدمة

تهدف هذه المطبوعة الموجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس علوم تجارية التعرف على مادة رياضيات المؤسسة التي تعتبر تطبيق علمي للطرق الرياضية و الإحصائية في المؤسسة، و التي تعمل على تسهيل اتخاذ القرارات المناسبة و المثلى عن طريق حل مختلف المشاكل التي تواجهها، و التي تمكن المؤسسة من تحقيق أهدافها بكفاءة عالية. تتنوع أساليب رياضيات المؤسسة المستعملة في حل مختلف المشاكل الإدارية نذكر منها: البرمجة الخطية، نماذج النقل.... إلخ

تضمنت المطبوعة مجموعة من المحاور بداية بالتعرف على مفهوم البرمجة الخطية، فرضيات التي تقوم عليها، و أهم شروط استعمالها و مجالات استخدامها، ثم التعرف على كيفية بناء و صياغة نموذج البرمجة و طرق حلها، حيث تم التطرق للطريقة البيانية و طريقة السمبلكس. إن لكل برنامج أصلي في البرمجة الخطية له برنامج ثنائيا، من خلال هذا المحور سنتعرف على كيفية صياغة النموذج الثنائي و لماذا يتم صياغته و كيفية استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، أما المحور الذي يليه يتعلق بتحليل الحساسية حيث تتميز البيئة التي تعمل فيها المؤسسة بأنها بيئة متغيرة و هذا ينعكس على الشكل العام للبرنامج الرياضي حيث يمكن أن تتغير بعض المعاملات مما يستدعي تحليل حساسية الحل الأمثل في حالة تغير إحدى هذه العوامل، أما المحور الأخير فخصص لمسائل النقل، و قد احتوى كل محور على مجموعة من الأمثلة و تمارين مقترحة حتى يتمكن الطالب من دعم و اختبار فهمه و ترسيخ معارفه.

I: البرمجة الخطية

1-البرمجة الخطية

تعد البرمجة الخطية احد الأساليب العلمية الحديثة لبحوث العمليات التي ساعدت وتساعد على اتخاذ القرار المناسب وقد أسهم كل من الاقتصاديين والرياضيين في تطوير هذا الأسلوب الذي بدأ ظهوره عام 1920 من طرف الاقتصادي الشهير(ليونتيف)في تطويره لتحليل المدخلات و المخرجات
ثم تابع تطوره في عام 1947 على ايدي الرياضي الانكليزي(دانتزك) اذ اكتشف طريقة السمبلكس والتي هي احد طرق البرمجة الخطية.

خلال الحرب العالمية الثانية، وبنتيجة محدودية الموارد العسكرية، كلَفت الحكومة البريطانية فريقاً من كبار العلماء دراسة مسائل كيفية توزيع مواردها العسكرية، وما يتناسب مع أفضل وضع دفاعي جوي وبري، ولقد أطلق على دراسات هذا الفريق اسم بحوث العمليات أو البحث العملياتي. ثم أخذت هذه التسمية تطلق على كافة الأبحاث والدراسات التي تتعامل مع مسائل البرمجة أو التوزيع ومسائل اتخاذ القرار. وقد حثَت النتائج المشجعة لفريق بحوث العمليات البريطاني الإدارة العسكرية الجوية الأمريكية على تكوين فريق مشابه للقيام بالدراسات اللازمة في هذا المجال. فقد وجدت هذه الفرق أن أساليب مسائل التفضيل التقليدية، كطريقة مضاريب لاغرانج مثلا، ليست ذات فائدة كبيرة في حل مسائل البرمجة الخطية، مما استوجب إيجاد أساليب أكثر فاعلية في عام 1947 م حين طور جورج دانتزغ عضو الفريق الأمريكي لبحوث العمليات الطريقة المبسطة (السمبلكس) لحل مسألة البرمجة الخطية؛ لكن لم تنشر تفاصيل هذه الطريقة إلا في عام 1956م. وبعد نشر الطريقة المبسطة (السمبلكس) حدث تسارع كبير في استخدام وتطوير البرمجة الخطية. ومن المشاركات التطويرية المهمة في ذلك المجال أعمال جال Gal التي قام بها وحده أو بمشاركة آخرين معه، إذ قاموا بصَوْغ المسألة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية. وحاليا، تستخدم البرمجة الخطية في مختلف المجالات الصناعية والاقتصادية والخدمية والعسكرية، وحيثما توجد عدة موارد محدودة الكمية مشتركة في تشكيل أو إنتاج سلعة أو تقديم خدمة معينة.

قبل التطرق لمفهوم البرمجة الخطية لا بد من التعرف على المفاهيم التالية:

النموذج (*Le modèle*):

يُعرف النموذج على أنه الطبيعة الرياضية لمشكل ما، هو صياغة المشاكل بمعادلات ومتباينات تمثل العلاقة الكمية لمختلف العوامل والظروف المحيطة بالمسألة بشكل معين يمكننا من إيجاد حل لها بالطرق الرياضية المعروفة

النمذجة (La modélisation):

النمذجة مجموعة من العمليات والمعالجات لبناء النماذج التي يراد بها تسهيل الظاهرة المعقدة

البرمجة (La programmation):

و نعني بها التخطيط لتحقيق هدف معين، يتمثل في الحل الأمثل.

الخطية (Linéaire):

نعني بها أن العلاقة بين متغيرات النموذج هي علاقة خطية، أي أن أس متغيرات النموذج يساوي الواحد.

1- البرمجة الخطية (La programmation Linéaire):

تعرف البرمجة الخطية بأنها :

- تعرف البرمجة الخطية بأنها تقنية رياضية تستعمل لحل مجموعة من المشاكل، فهي تبحث في الحل أو الحلول لمشكلة ما قد تكون إنتاجية، تخزينية، تسويقية...، و ذلك لإيجاد الطريقة المثلى لاستغلال موارد المؤسسة المحدودة و تحقيق أهدافها.
- كما يمكن تعريفها على أنها أسلوب رياضي أو أداة رياضية تسمح لنا بمعالجة المسائل التي تقوم على تحقيق هدف معين تحت مجموعة من القيود، هذا الهدف قد يكون تعظيم هامش الربح أو تخفيض التكاليف، أما القيود فتتمثل في محدودية الموارد المتاحة و التي عادة ما تكون مواد أولية، يد عاملة، رأس مال....
- البرمجة الخطية أداة أو أسلوب رياضي يقوم على التوزيع الأمثل للموارد البشرية و المادية التي تتصف بالندرة و المحدودية، بهدف تحقيق أعظم عائد أو أدنى تكلفة ضمن برنامج رياضي المتكون من دالة الهدف و القيود.

2- فرضيات استخدام البرمجة الخطية:

- **التأكد التام :**

تعبر هذه الفرضية عن توفر عنصر التأكد ، أي أن كافة عناصر المشكلة محدودة ومؤكدة و منه يجب أن تكون الأرقام الموجودة في دالة الهدف و

القيود معروفة وثابتة و غير قابلة للتغيير أثناء فترة معالجة المشكلة موضوع البحث .

- **التناسبية :**

و يعني ذلك أن الكميات التي يتم استخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع احتياجات العوامل المختلفة من كل من هذه الموارد.

- **الإضافية :**

تعني أن مجموع كمية الموارد المستخدمة لكل الأنشطة يجب أن يساوي مجموع الموارد المستخدمة في كل نشاط على انفراد، أي عدم وجود تداخل في إنتاج سلعتين على نفس الآلة، بل الوقت الإجمالي للنشاط هو الوقت الخاص بإنتاج السلعة الأولى زائد الوقت الخاص بإنتاج السلعة الثانية وهكذا.

- **قابلية القسمة أو الكسرية :**

و المقصود هنا أن الحل لمشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة، و هذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار .

- **اللاسلبية :**

وهذا يعني أن قيم عوامل أو متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة ، غير سالبة فالقيم السالبة للكميات المادية حالة مستحيلة

3-شروط استخدام البرمجة الخطية:

لاستخدام البرمجة الخطية يجب توفر الشروط التالية:

-وضوح الهدف

-محدودية الموارد البشرية و المادية الخاضعة للبرمجة.

-أن تكون العلاقة بين المتغيرات الخاضعة لبرمجة علاقة خطية.

-إمكانية التعبير عن المتغيرات موضوع البرمجة بصورة كمية.

-أن تكون كل المتغيرات التي تدخل ضمن دالة الهدف و معدلات و متباينات نموذج البرمجة الخطية غير سالبة.

-4-مجالات استخدام البرمجة الخطية:

-مسائل الإنتاج

-مسائل المزيج الإنتاجي

-مسائل الدعاية و الإشهار

-مسائل النقل

-مسائل التخصيص

-مسائل تخطيط الاستثمار

5-طرق حل نماذج البرمجة الخطية .

يمكن تصنيف أساليب البرمجة الخطية إلى ثلاثة مجموعات رئيسية هي:

1- الأساليب العامة: تتمكن من حل جميع مشاكل البرمجة الخطية (وتعد الطريقة المبسطة (السمبلكس) من أكثر الطرق إستخداما)

2- الأساليب الخاصة : تستعمل لحل أنواع معينة من وسائل البرمجة الخطية (يعتبر أسلوب النقل من أفضل هذه الأساليب)

3- الأساليب التقريبية : لا تتمكن من الوصول إلى الحل الأمثل بدقة.

أهم أساليب يمكن إستخدامها لحل مشكلة البرمجة الخطية:

-أسلوب الحل البياني .

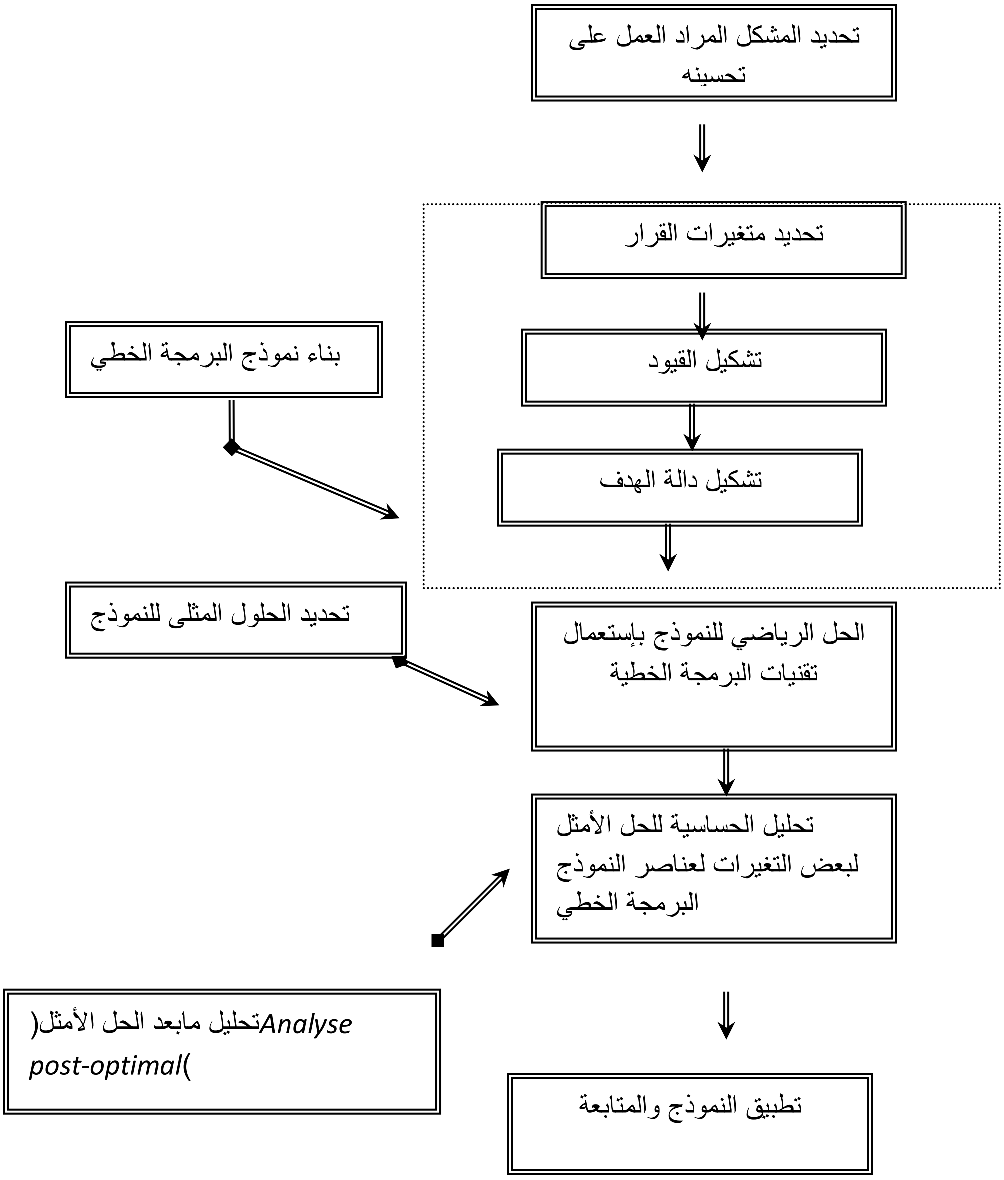
-الطريقة المبسطة أو السمبلكس .

-أسلوب النقل .

-أسلوب التخصيص(التعيين).

الشكل رقم (1) يلخص أهم خطوات النمذجة و الحل لنموذج البرمجة الخطي، حيث بعد تجميع البيانات و المعلومات اللازمة يتم بناء النموذج الرياضي للمسألة، مما يستوجب تحديد الهدف و المتغيرات ثم التعرف على كل الحلول البديلة الممكنة و دراستها للوصول إلى الهدف المراد تحقيقه.

شكل (1): طريقة النمذجة و التحليل في البرمجة الخطية.



SOURCE: Gérald .Baillageon، **Programmation Linéaire Appliquée Outil D'aide A La Décision**، op . cit ،1996 ،p06.

6-خطوات تكوين النموذج الرياضي

تتمثل هذه الخطوات فيما يلي:

-تحديد طبيعة المشكلة (الهدف): تحديد نوعها إما التعظيم Max (Maximisation)

أو التخفيض Min(Minimisation)

-تحديد نوع المتغيرات(y x) التي تمثل المجاهيل للظاهرة المدروسة.

-تحديد دالة الهدف: صياغة تأثير المتغيرات على الهدف في شكل رياضي (معادلة).

-تحديد القيود و الحدود أي شروط و ظروف المؤسسة في شكل متراجحات و معادلات.

-التكوين النهائي للمشكلة أي تلخيصها في شكل نموذج رياضي يشمل دالة الهدف القيود.

-شرط عدم السلبية.

1-1 صياغة نماذج البرمجة الخطية

1- النموذج الرياضي

لا يمكن حل مسائل بطريقة البرمجة الخطية دون صياغة النموذج الرياضي حيث تعتبر الخطوة الأولى و الأساسية، و هي تهدف إلى عرض و توضيح المشكلة بطريقة رياضية تمكن من إيجاد الحل الأمثل.

يتكون النموذج الرياضي من ثلاث عناصر متكاملة:

1. دالة الهدف:

تمثل الهدف الرئيسي للمشكلة المتعلقة بالوصول إلى الحل الأمثل، و تكتب هذه الدالة وفق الصيغة الرياضية التالية: $Opt\ f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j\ x_j$

حيث أن:

Opt : تعني الأمثلية (*Optimalité*)، أي إما التعظيم (*Max*) أو التخفيض (*Min*)؛

C_j : معاملات دالة الهدف، أي إما العائد الوحدوي أو التكلفة الوحدوية لكل منتج؛

x_j : رموز للكميات (عدد الوحدات) المنتجة لكل منتج، و هي المجاهيل التي نبحث عنها؛

j : مؤشر لعدد متغيرات (مجاهيل) النموذج و المقدرة بـــ (n).

2.القيود:

و هي عبارة عن الشروط التي تتواجد فيها المؤسسة، و يعبر عنها رياضيا في شكل معادلات أو متراجحات ذات الصيغة الرياضية التالية:

$$\sum a_{ij} x_j \geq b_i$$

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$\sum a_{ij} x_j = b_i$$

حيث أن:

a_{ij} : المعاملات الفنية، أي الكميات المستهلكة من الموارد (الطاقات الإنتاجية) للإنتاج الوحدوي من المنتجات؛

b_i : الكميات المتاحة من الموارد؛

i : عدد الأسطر، و هي بعدد القيود (m)؛

j : عدد الأعمدة، و هي بعدد المتغيرات أي المجاهيل (n).

3.شرط عدم السلبية : أي أن جميع قيم المتغيرات يجب أن تكون موجبة أو منعدمة، لأنه لا يمكن إنتاج منتجات سالبة

ملاحظة:

مسائل البرمجة الخطية يمكن تمثيلها وفق ثلاث صيغ هي:

الصيغة العامة (المختلطة): عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة تحتوي على كل الإشارات ($\leq$ ، = ، $\geq$).

الصيغة القانونية : هي الصيغة التي تحتوي على إشارتي $\leq$ أو $\geq$ فقط.

الصيغة المعيارية : هي الصيغة التي تحتوي على إشارة = فقط.

مثال01:

تقوم مؤسسة ما بإنتاج نوعين من الطاولات ، حيث أن وحدة واحدة من النوع الأول تحتاج إلى 6 صفائح خشبية و 8 قطع من الحديد، ، أما وحدة واحدة من النوع الثاني فتحتاج إلى 12 صفيحة خشبية و 14 قطع من الحديد، إذا علمت أن المؤسسة لا تتوفر إلا على 360 قطعة خشبية و 640 قطعة من الحديد، و أن الربح المحقق من بيع وحدة واحدة من النوع الأول يقدر ب 250 دج و الربح المحقق من بيع وحدة واحدة من النوع الثاني يقدر ب 430 دج.

المطلوب صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتحديد الكميات الواجب إنتاجها و التي تحقق لمؤسسة أكبر ربح ممكن ؟

الحل:

لصيانة النموذج الرياضي لهذه المسألة نعتمد على الخطوات التي تم التطرق لها سابقا لتكوين النموذج الرياضي:

-تحديد طبيعة المشكلة (الهدف):

من خلال المسألة يتضح أن المؤسسة تسعى إلى تحديد الكميات التي تنتجها من كل نوع و التي تحقق لها أكبر ربح ممكن، و عليه المؤسسة تهدف إلى تعظيم أرباحها، إذن دالة الهدف ستتكون من النوع Max (Maximisation).

-تحديد نوع المتغيرات:

تسعى المؤسسة إلى تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين، هناك مجهولين و عليه

X: ترمز لعدد الطاولات من النوع الأول التي ستنتجها المؤسسة.

Y: ترمز لعدد الطاولات من النوع الثاني التي ستنتجها المؤسسة.

تحديد دالة الهدف:

- هدف المؤسسة تعظيم الربح الكلي و بالتالي دالة الهدف تكتب بشكل رياضي كما يلي:

الربح الكلي للمصنع ينتج عن الربح الناتج عن بيعX وحدة من النوع الأول و الربح الناتج عن بيع Y وحدة من النوع الثاني

- **الربح المحقق من إنتاج النوع الأول:**

إنتاج 1 طاولة من النوع الأول يحقق ربحا قدره (1×250)

إنتاج 2 طاولة من النوع الأول يحقق ربحا قدره (2×250)

إنتاج X طاولة من النوع الأول يحقق ربحا قدره ($X \times 250$)

- **الربح المحقق من إنتاج النوع الثاني:**

إنتاج 1 طاولة من النوع الثاني يحقق ربحا قدره (1×430)

إنتاج 2 طاولة من النوع الثاني يحقق ربحا قدره (2×430)

إنتاج Y طاولة يحقق ربحا قدره ($Y \times 430$)

بما أن الربح المحقق من بيع وحدة واحدة من النوع الأول يقدر ب 250 دج ، فالربح المحقق من بيع X وحدة النوع الأول هو 250 X.

و الربح المحقق من بيع وحدة واحدة من النوع الثاني يقدر ب430، فالربح المحقق من بيع Y وحدة من النوع الثاني هو 430 Y.

و عليه الربح الكلي لكلا النوعين من الطاولات هو: $Z= 250\ X+430Y$

مشكلة المؤسسة هو إيجاد قيمة المتغيرينX و Y التي تحقق اكبر قيمة ممكنة من الربح الكلي(Z) و عليه Xو Y هي متغيرات القرار و الهدف هو تعظيم الربح الكلي، و بالتالي دالة الهدف تصبح:

$$Max\ (Z) = 250\ X+430Y$$

-تحديد القيود

بما أن المؤسسة لا تتوفر إلا على 360 قطعة خشبية و 640 قطعة من الحديد، فهناك قيود تحد من إمكانية المؤسسة من إنتاج أكبر : قدر من النوعين لتعظيم أرباحها.

القيد الأول: قيد الخشب

المتوفر من الخشب 360صفيحة

النوع الأول وحدة واحدة من النوع الأول تحتاج إلى 6 صفائح خشبية

إنتاج 1 طاولة من النوع الأول يحتاج إلى (1×6)

إنتاج 2 طاولة من النوع الأول يحتاج إلى (2×6)

إنتاج X طاولة من النوع الأول يحتاج إلى $(X \times 6)$

النوع الثاني وحدة واحدة من النوع الثاني فتحتاج إلى 12 صفيحة خشبية

إنتاج 1 طاولة من النوع الثاني يحتاج إلى (1×12)

إنتاج 2 طاولة من النوع الثاني يحتاج إلى (2×12)

إنتاج Y طاولة يحتاج إلى $(Y \times 12$

و هذا يمكن التعبير عن القيد الأول رياضيا بالصياغة التالية:

$$6X + 12Y \leq 360$$

القيد الثاني :قيد الحديد

المتوفر من الحديد 460صفيحة

النوع الأول وحدة واحدة من النوع الأول تحتاج إلى 8 قطع من الحديد

إنتاج 1 طاولة من النوع الأول يحتاج إلى (1×8)

إنتاج 2 طاولة من النوع الأول يحتاج إلى (2×8)

إنتاج X طاولة من النوع الأول يحتاج إلى $(X \times 8)$

النوع الثاني وحدة واحدة من النوع الثاني فتحتاج إلى 14 قطع من الحديد

إنتاج 1 طاولة من النوع الثاني يحتاج إلى (1×14)

إنتاج 2 طاولة من النوع الثاني يحتاج إلى (2×14)

إنتاج Y طاولة يحتاج إلى ($Y \times 14$

و هذا يمكن التعبير عن القيد الثاني رياضيا بالصياغة التالية:

$$X + 14\,Y \leq 640$$

شرط عدم سلبية:

حيث أن إنتاج كل من النوعين من الطاولات لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما يكون موجبا أو معدوما، و هو ما يعبر عنه بالصياغة التالية:

$$X \geq 0$$

$$Y \geq 0$$

أو

$$X، Y \geq 0$$

- **التكوين النهائي**

و عليه و بتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف $Max\ Z = 250\,x_1 + 430\,x_2$

قيد الخشب $6\,x_1 + 12\,x_2 \leq 360$

قيد الحديد $8\,x_1 + 14\,x_2 \leq 640$

عدم سلبية شرط $X، Y \geq 0$

1-2 تمارين مقترحة

2-1 تمارين مقترحة

التمرين 01:

تنتج مؤسسة ثلاث منتجات، تمر المنتجات بثلاثة مراحل وهي التصنيع ، التجميع و اختبار الجودة ، إنتاج وحدة و واحدة من النوع الأول يحتاج إلى ساعتان عمل في قسم التصنيع، ثلاث ساعات عمل في قسم التجميع و ساعة و احدة في قسم الجودة، بينما يحتاج النوع الثاني إلى ثلاث ساعات، ساعتان، 0.75سا عمل في كل من قسم التصنيع، التجميع، الجودة على الترتيب، أما النوع الثالث فيتطلب أربع ساعات عمل في قسم التصنيع، ساعتان عمل في قسم التجميع، و 0.75سا عمل في قسم الجودة، الوقت المتاح في قسم التصنيع 450سا، قسم التجميع 370سا، قسم الجودة 200سا، ربح كل وحدة كالآتي و150 ون، 120 ون، 90 ون على الترتيب.

المطلوب: ضـع المسألة السابقة في الصورة العامة للبرمجة الخطية؟

التمرين 02:

يريد مطعم الإعلان لزبائنه عن توفر المشروبات الطبيعية والمأكولات الخفيفة في جميع فروعه، ويريد أن يصل الإعلان إلى 60 ألف رجل و 40 ألف امرأة على الأقل في الفروع التي تغطي المنطقة الشمالية، مستخدما في ذلك الصحف والإذاعة المحلية ، وقد توقع أن يصل الإعلان في الصحيفة إلى 6 آلاف رجل و ألفين امرأة وأن يصـل الإعلان

في الإذاعة إلى ألفين رجل و 4 آلاف امرأة. وتبلغ تكلفة الإعلان في الصحيفة 450 ون للمرة الواحدة وفي الإذاعة 260 ون.

المطلوب: ضع المسألة السابقة في الصورة العامة للبرمجة الخطية؟

التمرين03:

يقوم جزار بعمل شطائر اللحم بتكوين من لحم بقري ولحم ماعز. يحتوي لحم البقر على 80% لحم و 20% دهون ويكلف 24 ون لكل كيلو في حين أن لحم الماعز على 68% لحم و 32% دهون ويكلف 18 ون لكل كيلو.
المطلوب: ضع المسألة السابقة في الصورة العامة للبرمجة الخطية؟

التمرين04:

تقوم مؤسسة بإنتاج منتوجين و ذلك باستخدام ثلاث مواد أولية، يحتاج المنتوج الأول الى 2 كلغ من م1، 5كلغ من م2، 1 كلغ من م3، بينما يحتاج المنتوج الثاني الى 4كلغ من م1، 4كلغ من م2، 2 كلغ من م3، علما أن المتوفر من المادة الأولى هو 120كلغ، و من المادة الثانية 240كلغ، و من المادة الثالثة 80 كلغ، كما أن ربح المنتوج الاول4دج، و ربح المنتوج الثاني 6دج.

المطلوب: ضع المسألة السابقة في الصورة العامة للبرمجة الخطية؟

.

3-1 حل نماذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية.

3-1 حل نماذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية.

يقصد بحل نموذج البرمجة الخطية إيجاد قيم متغيرات القرار للنموذج التي تعي دالة الهدف امثل و أحسن قيمة، أي أعظم و أكبر قيمة بالنسبة للنموذج من النوع (Max) أو أدنى اقل قيمة في حالة نموذج من النوع (Min)؛ و تراعي قيود النموذج

الطريقة البيانية:

تستعمل هذه الطريقة في إيجاد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التي تتضمن على ثلاثة متغيرات أو أقل ، تعتبر هذه الطريقة من أسهل الطرائق ولكنها تعتبر غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية، ولكنها تؤدي إلى فهم خصائص مشكلات البرمجة الخطية بيانيا كما تساعد على فهم طريقة السمبلكس . بالنظر لكون الرسم البياني لقيود نموذج البرمجة الخطية يكون أكثر تعقيدا عندما يتضمن النموذج على ثلاث متغيرات وخصوصا عند تحديد منطقة الحلول الممكنة، لذا يفضل استعمال هذه الطريقة لنماذج البرمجة الخطية التي تتضمن متغيرن فقط.

خطوات الحل باستعمال الطريقة البيانية:

تتمثل خطوات الحل وفق الطريقة البيانية فيما يلي:

1. صياغة النموذج الرياضي للمشكلة المدروسة
2. تحويل المتراجحات إلى معادلات.
3. رسم المعادلات في شكل خطوط مستقيمة.(يتم افتراض أن أحد المتغيرين معدوم و بالتالي يمكن حساب المتغير الآخر، و نفس الشيء يتم افتراض أن المتغير الثاني معدوم ليتم حساب المتغير الأول، و بهذا تكون لدينا نقطتان يتم من خلالهما رسم مستقيم القيد الأول. و بنفس الطريقة يتم رسم مستقيمات باقي القيود و بتقاطعها يتم الحصول على منطقة الحلول المقبولة (الممكنة))
4. استنتاج منطقة الحلول الممكنة من خلال نقاط التقاطع بين المستقيمات (يجب ملاحظة اتجاه المتراجحات أو القيود).
5. استنتاج الحل الأمثل و الذي يمثل المنطقة التي تعطي الحل الأمثل (أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم (Max) و أدنى قيمة لها في حالة التخفيض(Min).

مثال01 :

ينتج مصنع للملابس قمصان و فساتين، يمر المنتوجين عبر ورشتين رشة التفصيل و ورشة الخياطة، إنتاج قميص واحد يحتاج إلى ساعتين في ورشة التفصيل و ساعة واحدة في ورشة الخياطة، بينما يحتاج إنتاج فستان واحد إلى ساعة عمل واحدة في كل من

الورشتين، إذا علمت أن الطاقة الاستيعابية للورشة الأولى هي 10ساعات في اليوم، بينما الرشة الثانية فهي 6 ساعات، أن الربح المحقق من بيع حدة واحدة من القمصان يقر ب1.5ون، بينما الربح المحقق من بيع حدة واحدة من الفساتين تقدر ب1 ون.

- **المطلوب:** ضع المسألة في الصورة العامة للبرمجة الخطية ، ثم حل المسألة مستخدما الطريقة البيانية؟

الحل:

1 . صياغية النموذج

لصيانة النموذج الرياضي لهذه المسألة نعتمد على الخطوات التي تم التطرق لها سابقا لتكوين النموذج الرياضي:

-تحديد طبيعة المشكلة (الهدف):

من خلال المسألة يتضح أن المؤسسة تسعى إلى تحديد الكميات التي تنتجها من كل نوع و التي تحقق لها أكبر ربح ممكن، و عليه المؤسسة تهدف إلى تعظيم أرباحها، إذن دالة الهدف ستتكون من النوع Max (Maximisation).

-تحديد نوع المتغيرات:

تسعى المؤسسة إلى تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين، هناك مجهولين و عليه

X: ترمز لعدد القمصان التي ستنتجها المؤسسة.

Y: ترمز لعدد الفساتين التي ستنتجها المؤسسة.

تحديد دالة الهدف:

- هدف المؤسسة تعظيم الربح الكلي و بالتالي دالة الهدف تكتب بشكل رياضي كما يلي:

الربح الكلي للمصنع ينتج عن الربح الناتج عن بيعX وحدة من القمصان و الربح الناتج عن بيع Y وحدة من الفساتين

- **الربح المحقق من إنتاج القمصان:**

إنتاج 1 قميص يحقق ربحا قدره (1×1.5)

إنتاج 2 قميص يحقق ربحا قدره (2×1.5)

إنتاج X قميص يحقق ربحا قدره $(X \times 1.5)$

- **الربح المحقق من إنتاج النوع الثاني:**

إنتاج 1 فستان يحقق ربحا قدره (1×1)

إنتاج 2 فستان يحقق ربحا قدره (2×1)

إنتاج Y فستان يحقق ربحا قدره $(Y \times 1)$

بما أن الربح المحقق من بيع وحدة واحدة من القمصان يقدر ب 1.5 ون ، فالربح المحقق من بيع X وحدة المصان هو 1.5 X.

و الربح المحقق من بيع وحدة واحدة من الفساتين يقدر ب 1ون، فالربح المحقق من بيع Y وحدة من الفساتين هو 1 Y.

و عليه الربح الكلي للقمصان و الفساتين هو: $Z= 1.5\ X+1Y$

و بالتالي دالة الهدف تصبح:

$$\mathbf{Max\ (Z) = 1.5\ X+1Y}$$

-تحديد القيود

بما أن الطاقة الاستيعابية للورشة الأولى هي 10ساعات في اليوم، بينما الرشة الثانية فهي 6 ساعات فهناك قيود تحد من إمكانية المؤسسة من إنتاج أكبر قدر من النوعين لتعظيم أرباحها.

إنتاج قميص واحد يحتاج إلى ساعتين في ورشة التفصيل و ساعة واحدة في ورشة الخياطة، بينما يحتاج إنتاج فستان واحد إلى ساعة عمل واحدة في كل من الورشتين

القيد الأول: قيد في ورشة التفصيل

الطاقة الاستيعابية للورشة الأولى هي 10ساعات.

-إنتاج قميص واحد يحتاج إلى 2سا في ورشة التفصيل

إنتاج 1 قميص يحتاج إلى (1×2سا)

إنتاج 2 قميص يحتاج إلى (2×2سا)

إنتاج X قميص يحتاج إلى ($X \times 2$سا)

-إنتاج فستان واحد إلى 1سا عمل في ورشة التفصيل

إنتاج 1 فستان يحتاج إلى (1×1سا)

إنتاج 2 فستان يحتاج إلى (2×1سا)

إنتاج Y فستان يحتاج إلى ($Y \times 1$سا

و هذا يمكن التعبير عن القيد الأول رياضيا بالصياغة التالية:

$$2X + 1Y \leq 10$$

القيد الثاني : قيد ورشة الخياطة

الطاقة الاستيعابية للورشة الثانية فهي 6 ساعات

-إنتاج قميص واحد يحتاج إلى 1سا في ورشة **الخياطة**

إنتاج 1 قميص يحتاج إلى (1×1سا)

إنتاج 2 قميص يحتاج إلى (2×1سا)

إنتاج X قميص يحتاج إلى ($X \times 1$سا)

-إنتاج فستان واحد إلى 1سا عمل في ورشة **الخياطة**

إنتاج 1 فستان يحتاج إلى (1×1سا)

إنتاج 2 فستان يحتاج إلى (2×1سا)

إنتاج Y فستان يحتاج إلى ($Y \times 1$سا

و هذا يمكن التعبير عن القيد الثاني رياضيا بالصياغة التالية:

$$X + Y \leq 6$$

شرط عدم سلبية:

حيث أن إنتاج كل قمصان من و الفساتين لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما يكون موجبا أو معدوما، و هو ما يعبر عنه بالصياغة التالية: $X، 0 \geq Y$

- **التكوين النهائي**

و عليه و بتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

$$\mathbf{Max\ (Z) = 1.5\ X+1Y}$$

$$\begin{cases} 2X + 1Y \leq 10 \\ X + Y \leq 6 \end{cases}$$

$$X، Y \geq 0$$

1. الحل بالطريقة البيانية

خطوات الحل باستعمال الطريقة البيانية:

تتمثل خطوات الحل وفق الطريقة البيانية فيما يلي:

1. صياغة النموذج الرياضي للمشكلة المدروسة

تم صياغة النموذج في المرحلة السابقة و عليه:

$$\mathbf{Max\ (Z) = 1.5\ X+1Y}$$

$$\begin{cases} 2X + 1Y \leq 10 \ \ldots\ldots\ldots (01) \\ X + Y \leq 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (02) \end{cases}$$

$$X، Y \geq 0$$

2. تحويل المتراجحات إلى معادلات.

$$2X + 1Y = 10 \;\ldots\ldots\ldots(01)$$

$$X + Y = 6 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(02)$$

3. رسم المعادلات في شكل خطوط مستقيمة

$$2X + 1Y = 10 \;\ldots\ldots\ldots(01)$$

المعادلة01	
x	**y**
0	10
5	0

$x = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow$ A (0 ، 10)

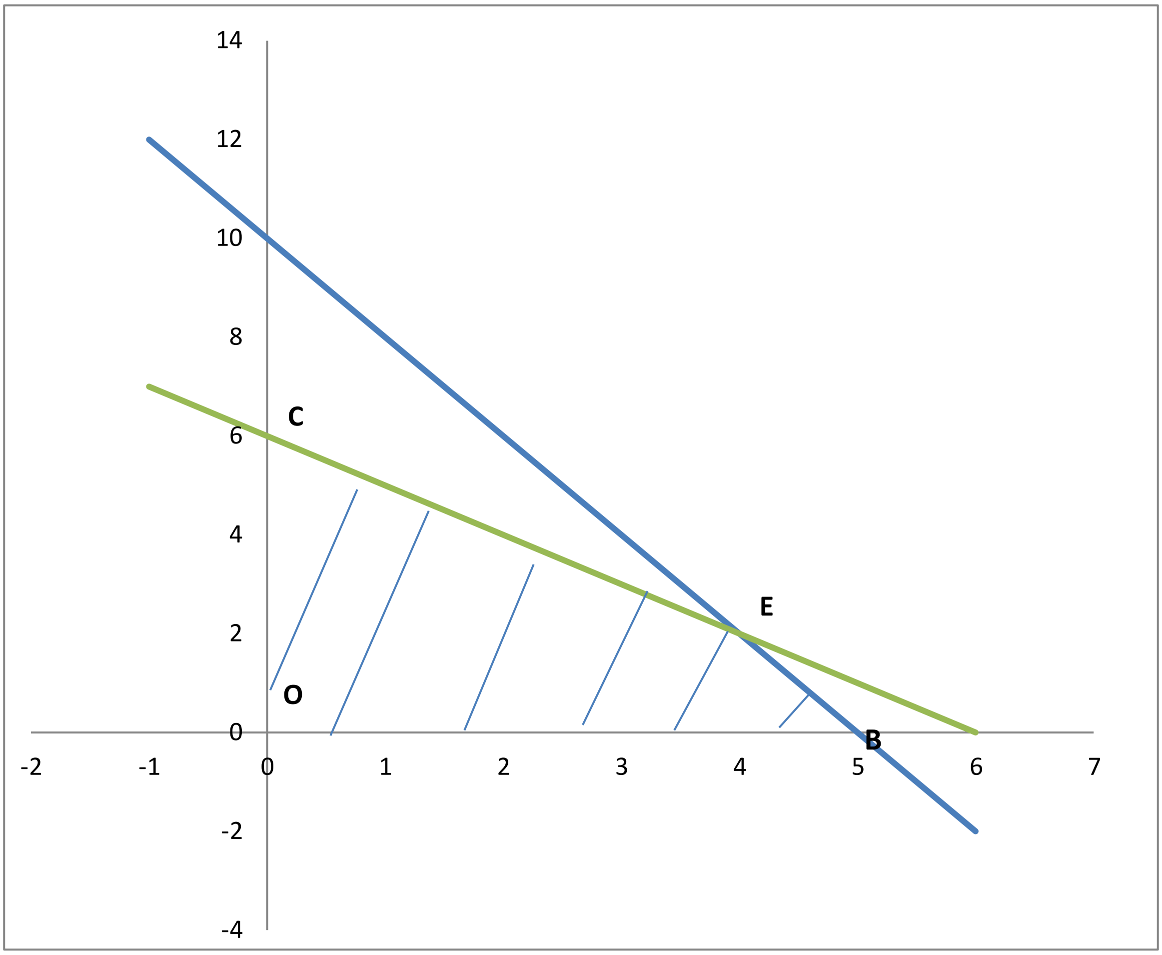
$y = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$ B (5 ، 0)

$$X + Y = 6 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(02)$$

المعادلة02	
x	**y**
0	6
6	0

$x = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow$ C (0 ، 6)

$y = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow$ D (6 ، 0)



4. استنتاج منطقة الحلول الممكنة من خلال نقاط التقاطع بين المستقيمات

نسمي المنطقة OCEB منطقة الحلول المقبولة، و هي تحتوي عدد لانهائي من النقاط، و التي تتوزع داخل المنطقة أو على حدودها، أو على النقاط الرأسيةO،C،E،B

من أجل أي نقطة من منطقة الحلول المقبولة هناك قيمة لدالة الهدف Z، و ما يهمنا هو إيجاد النقطة التي تعطي لـــ Z أعظم قيمة، و هاته النقطة تتواجد على أحد رؤوس منطقة الحلول المقبولة، لذلك يجب حساب إحداثيات النقط الرأسية، ليتم تعويضها في دالة الهدف و من ثَم اختيار النقطة الرأسية التي تعطي لـــ Z القيمة الأمثل.

5. استنتاج الحل الأمثل و الذي يمثل المنطقة التي تعطي الحل الأمثل (أكبر قيمة) لدالة الهدف

من الشكل أعلاه تتضح لنا إحداثيات النقاط:

النقاط	X	Y	Z (Max (Z) = 1.5 X+1Y)
O	0	0	0
C	0	6	6
E	4	2	8
B	5	0	7.5

أما النقطة E فيتم حساب إحداثياتها جبريا، فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة

$$\begin{cases} 2X + 1Y = 10 \\ X + Y = 6 \ldots\ldots\ldots \times(-2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة الثانية في (2-)، و جمع المعادلتين نحصل على:

$$2X + Y + (-2X - 2Y) = 10 - 12$$

$$-Y = -2 \Rightarrow Y = 2$$

بتعويض قيمة **Y** في إحدى المعادلتين (و لتكن المعادلة الثانية)، نحصل على:

$$X + 2 = 6 \Rightarrow X = 6 - 2 \Rightarrow X = 4$$

و منه:

$$E\,(4 ، 2) \Rightarrow Z = (4*1.5)+2 \Rightarrow Z = 8$$

نلاحظ أن أكبر قيمة لدالة الهدف تتحقق عند النقطة E، بمعنى أن النقطة E هي نقطة الحل الأمثل، و بالتالي حتى تحقق المؤسسة أقصى ربح و المقدر ب8 ون عليها إنتاج 4 قمصان و 2 فساتين.

سيتم التأكد من ما إذا كان الحل الأمثل يحقق قيود النموذج من عدمه، و عليه يتم تعويض قيم الحل الأمثل في القيود الوظيفية و قيود عدم سلبية المتغيرات:

$$\begin{cases} 2(4) + (2) = 10 \text{ ....قيد محقق} \\ (4) + (2) = 6 \text{ ....قيد محقق} \\ \\ 4 > 0 \text{ ....قيد محقق} \\ 2 > 0 \text{ ....قيد محقق} \end{cases}$$

و عليه يتضح أن جميع قيود النموذج محققة ،أي أن الحل الأمثل يحقق كل القيود.

الحالات الخاصة للطريقة البيانية

الحالة الأولى: عدم وجود حلول

يمن القول أن المسالة ليس لديها حل عندما لا يكن هنا حل يتوافق مع كل القيود، في هذه الحالة فإن منطقة الحلول الممكنة لا يمكن تشكيلها، أي أنها لا تتضمن أية نقاط تحقق جميع القيود، مما يستوجب تعديل النموذج.

الحالة الثانية: حالة الحلول المتعددة(وجود أكثر من حل أمثل)

قد يكون لمسائل البرمجة الخطية أكثر من حل أمثل أي قيمة دالة الهدف متساوية مما يعطي مرونة كبيرة لاختيار المزيج الأمثل، و يمكن معرفة هذه الحالة عندما يلامس الخط المستقيم لدالة الهدف جزء كاملا من خط مستقيم يمثل جزء من محيط منطقة الحلول المقبولة

الحالة الثالثة: حالة عدم تأثير أحد القيود على منطقة الحلل الممكنة.

نجد أن أحد القيود (المستقيم الذي يثمل هذا القيد) بعيد عن منطقة الحلول الممكنة، أي لا يؤثر على الحل الأمثل، بمعنى يمكن حذفه.

الحالة الرابعة: حالة وجد عدد لا نهائي من الحلول

في هذه الحالة تزداد دالة الهدف بشكل غير نهائي دون المساس بالقيود، فقد نجد منطقة حل مشتركة ممكنة تتوافق مع جميع القيود، و لكنها تكون مفتوحة باتجاه ما نتيجة عدم وجود حل نهائي، مما يعني أن المسالة صيغت بشكل غير متقن، و عليه يستوجب إعادة صياغة النموذج.

الحالة الخامسة: حالة وجود شارة المساواة (=) في إحدى القيود

نجد نماذج تشمل كذلك معادلات في هذه الحالة منطقة الحلول الممكنة يمكن تمثيلها في قطعة مستقيمة أو في نقطة واحدة.

4-1 تمارين مقترحة

4-1 تمارين مقترحة

التمرين 01: حل التمارين المقترحة في الوحدة السابقة(صياغة نماذج البرمجة الخطية) باستعمال الطريقة البيانية.

التمرين 02:

تقوم شركة لصناعة الأجهزة الكهربائية بالتخطيط لإنتاج أجهزة التلفزيون و أجهزة الراديو، فإذا كان إنتاج جهاز التلفزيون الواحد يحتاج إلى ساعتان عمل في قسم التجميع و ثلاث ساعات عمل في قسم الاختبارات، و إنتاج الراديو يحتاج إلى أربعة ساعات عمل في قسم التجميع و ساعة واحدة في قسم الاختبارات، إذا علمت أن العائد من بيع كل جهاز تلفزيون هو 100ون بينما العائد من بيع كل جهاز راديو هو 80ون، و أن طاقة قسم التجميع هي 80 ساعة أسبوعيا و طاقة قسم الاختبار هي 60 ساعة أسبوعيا.

المطلوب: حدد الكمية الواجب إنتاجها من أجهزة التلفزيون و الراديو حتى تحقق الشركة أقصى ربح ممكن باستعمال الطريقة البيانية؟

التمرين 03:

إليك النموذج التالي:

$$\text{Max. } Z=10X_1+15X_2$$

$$\begin{cases} 6X_1+4X_2 \leq 30000 \\ 2X_1+4X_2 \leq 20000 \\ X_1 \leq 7000 \\ X_2 \leq 8000 \end{cases}$$

$$X_1، X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد خطة الإنتاج المثلى باستعمال الطريقة البيانية؟

التمرين 04:

$$\text{Min.} Z=1000X_1+800X_2$$

$$\begin{cases} X_1 \geq 30 \\ X_2 \geq 20 \\ X_1+X_2 \geq 60 \end{cases}$$

$$X_1، X_2 \geq 0$$

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل الذي يقلل التكاليف إلى ادني ما يمكن باستعمال الطريقة البيانية؟ .

.

5-1 حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس (Simplexe)

5-1 حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس (Simplexe)

نظرا لقصور الطريقة البيانية و عدم إمكانية استعمالها في حالة وجود أكثر من متغيرين، و أمام هذه الصعوبات تم استخدام طريقة أخرى لمعالجة المسائل من هذا النوع أي التي تتضمن أكثر من متغيرين، تسمى بطريقة السمبلكسSimplexe التي تكون في شكل

جداول، إذ يتم الانتقال من جدول لأخر عن طريق عمليات حسابية إلى أن نصل إلى الجدول الأخير، و الذي يمثل الحل الأمثل.

يعتبر George Dantzig مبتكر طريقة السمبلكس عام 1974

خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس:

تعد طريقة السمبلكس من أهم طرق حل نماذج البرمجة الخطية، تستخدم لحل المسائل التي تكون فيها عدد القيود (m) و عدد المتغيرات (n)، و ذلك بإتباع الخطوات التالية:

1. إيجاد حل أولي.
2. اختبار أمثلية الحل.
3. تحسين الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل.

و تتم كل خطوة من هذه الخطوات وفق عدة عمليات حسابية في جداول تسمى جداول السمبلكس ذات الشكل العام التالي:

معاملات دالة الهدف c_j			
المتغيرات (x_i، e_i، A_i)	b_j	v	c_k
معاملات معادلات القيود (a_{ij})	كمية الموارد	المتغيرات المجهولة الأساسية (e_iة (A_i	معاملات دالة الهدف المقابلة للمتغيرات المجهولة الأساسية
سطر التقييم (Δc)	**قيمة دالة الهدف Z**		

$Z = \sum C_k b_j$

$\Delta c = \sum C_k a_{ij} - c_j$

سيتم شرح الخطوات الثلاث بالتفصيل:

1. إيجاد حل أولي: أي الجدول الأول من جداول السمبلكس و ذلك ما يلي:

تعديل النموذج بتحويل المتراجحات إلى معادلات من خلال إضافة:

-متغير أساسي الذي يرمز له بالرمز(e_i) معناه الاقتصادي أنه عبارة عن طاقة عاطلة أو غير مستغلة حيث أن عائدها يساوي الصفر(قيمته في دالة الهدف هو الصفر).

-متغير وهمي و الذي يرمز له ب(A_i) معناه الاقتصادي أنه عبارة عن مادة ذات تكلفة عالية جدا تقدر ب M و قيمتها عكس دالة الهدف

-وضع كل بيانات النموذج المعدل في الجدول الأول من جداول السمبلكس

2. اختبار أمثلية الحل:

- يعتبر الحل أمثل في حالة دالة الهدف من نوع *Max إذا كانت جميع قيم* $\Delta c \geq 0$ ، أما العكس فهو حل غير أمثل يستوجب المرور إلى الخطوة الثالثة.

-يعتبر الحل أمثل في حالة دالة الهدف من نوع *Min إذا كانت جميع قيم* $\Delta c \leq 0$ ، أما العكس فهو حل غير أمثل يستوجب المرور إلى الخطوة الثالثة.

3.**تحسين الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل:**

أي البحث عن الحل الأفضل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل من خلال إيجاد المتغيرة الداخلة تم تحديد المتغيرة الخارجة ما يلي:

-تحديد المتغيرة الداخلة:

- **في حالة دالة الهدف من نوع** *Max*: المتغيرة الداخلة هي التي تقابل أصغر قيمة سالبة (الأكبر بالقيمة المطلقة) من قيم سطر التقييم (Δc).

- **في حالة دالة الهدف من نوع** *Min :* المتغيرة الداخلة هي التي تقابل أكبر قيمة موجبة من قيم سطر التقييم (Δc).

-تحديد المتغيرة الخارجة: المتغيرة الخارجة يتم تحديدها بنفس الطريقة سواء كانت دالة الهدف من النوع *Max* أو *Min*.

أولا نقوم بحساب النسبة $\frac{b_j}{a_{ijk}}$ حيث b_j قيم عمود كمية الموارد المتاحة ، a_{ijk} قيم عمود المتغيرة الداخلة (التي تم تحديدها في الخطوة السابقة)، بعد حساب القيم نحدد المتغيرة الخارجة و هي المقابلة لأصغر قيمة موجبة و غير معدومة من هذه القيم.

-تحديد نقطة المحور(تحديد عنصر الارتكاز): هي عبارة عن نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة، بناءا على هذه النقطة يتمحور تشكيل الجدول الموالي.

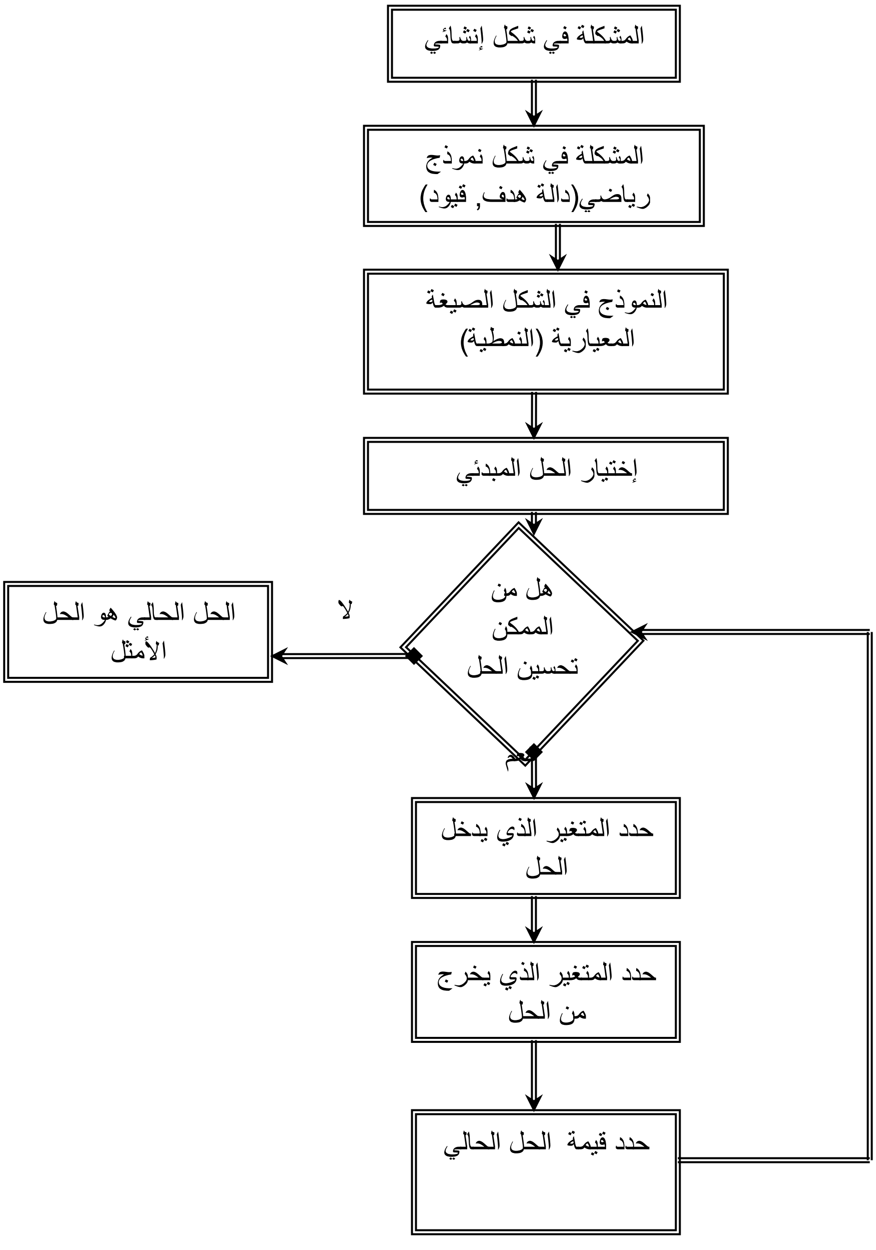
-تحديد قيم الجدول الموالي :

- أولا نبدأ بسطر المحور حيث كل قيمة في سطر المحور تقسم على نقطة المحور.
- بقية العناصر كذلك قيم b_j تحسب وفق العلاقة التالية:

القيمة الجديدة للعنصر= القيمة القديمة- (الرقم المقابل في سطر المحور * الرقم المقابل في عمود المحور) / نقطة المحور

نسجل ل هذه القيم في الجدول و نحسب قيمة دالة الهدف (Z) و قيم سطر التقييم(Δc)، نعيد اختبار أمثلية الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل.

شكل (2): خطوات الحل بطريقة السمبلكس



source :Yves Noobert .Roch Ouellet .Réges Parent ، **La recherche opérationnelle** ،gaitan morin éditeur 1995 ،p170..

مثال01:

إليك النموذج التالي:

$$\text{Max. } Z=8X_1+6X_2$$

$$\begin{cases} 4X_1+2X_2 \leq 60 \\ 2X_1+4X_2 \leq 48 \end{cases}$$

$$X_2 \geq 0، X_1$$

المطلوب: اوجد خطة الإنتاج المثلى باستعمال طريقة السمبلكس؟

الحل:

1.إيجاد حل أولي: أي الجدول الأول من جداول السمبلكس و ذلك كما يلي:

- تعديل النموذج بتحويل المتراجحات إلى معادلات من خلال إضافة(e_i):

$$4X_1+2X_2+e_1 = 60$$

$$2X_1+4X_2+e_2 = 48$$

-تعديل دالة الهدف:

$$\text{Max. } Z=8X_1+6X_2+0e_1+0e_2$$

-وضع كل بيانات النموذج المعدل في الجدول الأول من جداول السمبلكس:

حساب قيمة دالة الهدف:

$$\mathbf{Z} = \sum \mathbf{C_k\ b_j}$$

$$\mathbf{Z} = (0*60)+(0*48)$$

$$= 0$$

حساب قيم سطر التقييم وفق القانون التالي:

$$\Delta c = \sum \mathbf{C_k}\ a_{ij} - \mathbf{c_j}$$

القيمة الاولى:

$$\Delta\ c = [(0*4)+(0*2)] - 8$$
$$= -8$$

القيمة الثانية :

$$\Delta\ c = [(0*2)+(0*4)] - 6$$
$$= -6$$

القيمة الثالثة:

$$\Delta\ c = [(0*1)+(0*0)] - 0$$
$$= 0$$

القيمة الرابعة:

$$\Delta c = [(0*0)+(0*1)] - 0$$
$$= 0$$

			8	6	0	**0**
c_k	**v**	b_j	X_1	X_2	e_1	e_2
0	e_1	60	4	2	1	0
0	e_2	48	2	4	0	1
Z=0			**-8**	**-6**	**0**	**0**

بعد اعداد الجدول و حساب قيم Z و Δc ، نقوم باختبار أمثلية الحل

2.اختبار أمثلية الحل:

يعتبر الحل أمثل في حالة دالة الهدف من نوع Max إذا كانت جميع قيم $\Delta c \geq 0$ ، و بما أن هناك قيم سالبة فهو حل غير أمثل يستوجب المرور إلى الخطوة الثالثة.

3.تحسين الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل:

أي البحث عن الحل الأفضل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل من خلال إيجاد المتغيرة الداخلة تم تحديد المتغيرة الخارجة ما يلي:

تحديد المتغيرة الداخلة:

في حالة دالة الهدف من نوع *Max* المتغيرة الداخلة هي التي تقابل أصغر قيمة سالبة (الأكبر بالقيمة المطلقة) من قيم سطر التقييم (Δc)، و بالتالي X_1 هي المتغيرة الداخلة.

تحديد المتغيرة الخارجة: المتغيرة الخارجة يتم تحديدها بنفس الطريقة سواء كانت دالة الهدف من النوع *Max* أو *Min*.

بعد حساب النسبة $\frac{b_j}{a_{ijk}}$ نحدد المتغيرة الخارجة و هي المقابلة لأصغر قيمة موجبة و غير معدومة من هذه القيم، و عليه e_1 هي المتغيرة الخارجة.

تحديد نقطة المحور(تحديد عنصر الارتكاز): هي عبارة عن نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة، و بالتالي 4 هي نقطة المحور.

			8	6	0	**0**	$\frac{b_j}{a_{ijk}}$
c_k	**v**	**b_j**	X_1	X_2	e_1	e_2	
0	e_1	60	4	2	1	0	60/4=15
0	e_2	48	2	4	0	1	48/2=24
Z=0			**-8**	**-6**	**0**	**0**	

تحديد قيم الجدول الموالي:،

أولا نبدأ بقيم X_1 المتغيرة الداخلة حيث كل قيمة في سطر المحور تقسم على نقطة المحور(15=4/60، 1=4/4، 2/1=4/2، 4/1=4/1، 0=4/0)

بقية قيم الجدول الموالي و كذلك قيم b_j تحسب وفق العلاقة التالية:

القيمة الجديدة = القيمة القديمة- (الرقم المقابل في سطر المحور * الرقم المقابل في عمود المحور) / نقطة المحور

قج$_1$ $= 48-(2*60)/4= 18$

قج$_2$ $=2-(2*4)/4=0$

قج$_3$ $=4-(2*2)/4=3$

قج$_4$ $=0-(2*1)/4=-1/2$

قج$_5$ $=1-(2*0)/4=1$

نسجل هذه القيم في الجدول و نحسب قيمة دالة الهدف (Z) و قيم سطر التقييم(Δc) بنفس الطريقة السابقة.

			8	6	0	**0**
c_k	**v**	**b_j**	X_1	X_2	e_1	e_2
8	X_1	15	1	1/2	1/4	0
0	e_2	18	0	3	-1/2	1
Z= 120			0	-2	2	0

اختبار أمثلية الحل

نعيد اختبار أمثلية الحل، بما أن هناك قيمة سالبة في سطر التقييم فالحل غير أمثل و يجب تحسينه

تحسين الحل إلى غاية بلوغ الحل الأمثل

نعيد نفس الخطوات الموجودة في الخطوة السابقة أي البحث عن المتغيرة الداخلة و الخارجة، المتغيرة الداخلة هي X_2، المتغيرة الخارجة هي e_2

			8	6	0	**0**	$\frac{b_j}{a_{ijk}}$
c_k	**v**	b_j	X_1	X_2	e_1	e_2	
8	X_1	15	1	1/2	1/4	0	75
0	e_2	18	0	3	-1/2	1	6
Z= 120			0	-2	2	0	

بعد تحديد المتغيرة الداخلة و الخارجة يتم إعادة حساب قيم الجدول الجديد بنفس الطريقة السابقة، و عليه يتم الحصول على الجدول التالي:

			8	6	0	**0**
c_k	**v**	b_j	X_1	X_2	e_1	e_2
8	X_1	12	1	0	1/3	-1/6
6	X_2	6	0	1	-1/6	1/3
Z= 120			0	0	5/3	2/3

نعيد اختبار أمثلية الحل، بما أن كل قيم سطر التقييم أكبر أو تساوي الصفر فالحل يعتبر حل امثل.

خطة الإنتاج المثلى: حتى يتم تحقيق أقصى ربح و المقدر ب 120 ون يجب إنتاج 12 و حدة من X_1 و 6 و حدات من X_2.

مثال 02:

إليك النموذج التالي:

$$\text{Min. } Z=2X_1+X_2$$

$$\begin{cases} X_1+3X_2 \geq 30 \\ 2X_1+4X_2 \geq 40 \end{cases}$$

$$X_1 ، X_2 \geq 0$$

المطلوب: اوجد خطة الإنتاج المثلى باستعمال طريقة السمبلكس؟

الحل:

1.إيجاد حل أولي: أي الجدول الأول من جداول السمبلكس و ذلك كما يلي:

- تعديل النموذج بتحويل المتراجحات إلى معادلات من خلال إضافة(e_i) و (A_i):

$$X_1+3X_2 - e_1 + A_1 = 60$$

$$4X_1+2X_2-e_2+A_2 = 48$$

-تعديل دالة الهدف:

Mix. $Z=2X_1+X_2-0e_1-0e_2+M\ A_1+M\ A_2$

-وضع كل بيانات النموذج المعدل في الجدول الأول من جداول السمبلكس:

حساب قيمة دالة الهدف:

$$\mathbf{Z = \sum C_k\, b_j}$$

$$\mathbf{Z} =(M*30)+(M*40)$$

$$= 70M$$

حساب قيم سطر التقييم وفق القانون التالي:

$$\Delta \boldsymbol{c} = \sum \mathbf{C_k}\, a_{ij} - \mathbf{c_j}$$

القيمة الاولى:

$$\Delta c = [(M*1)+(M*4)] - 2$$

$$= 5M - 2$$

القيمة الثانية :

$$\Delta c = [(M*3)+(M*2)] - 1$$
$$= 5M-1$$

القيمة الثالثة:

$$\Delta c = [(M*-1)+(M*0)] - 0$$
$$= -M$$

القيمة الرابعة:

$$\Delta c = [(M*0)+(M*-1)] - 0$$
$$= -M$$

القيمة الخامسة:

$$\Delta c = [(M*1)+(M*0)] - M$$
$$= 0$$

القيمة السادسة:

$$\Delta c = [(M*0)+(M*1)] - M$$
$$= 0$$

			2	1	0	**0**	**M**	**M**
c_k	**v**	**b_j**	X_1	X_2	e_1	e_2	A_1	A_2

M	A_1	30	1	3	-1	0	1	0
M	A_2	40	4	2	0	-1	0	1
Z= 70M			5M-2	5M-1	-M	-M	0	0

بعد اعداد الجدول و حساب قيم Z و Δc ، نقوم باختبار أمثلية الحل

2.اختبار أمثلية الحل:

يعتبر الحل أمثل في حالة دالة الهدف من نوع MIN إذا كانت جميع قيم $\boldsymbol{\Delta c \leq 0}$ ، و بما أن هناك قيم موجبة فهو حل غير أمثل يستوجب المرور إلى الخطوة الثالثة.

3.تحسين الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل:

أي البحث عن الحل الأفضل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل من خلال إيجاد المتغيرة الداخلة تم تحديد المتغيرة الخارجة ما يلي:

تحديد المتغيرة الداخلة:

في حالة دالة الهدف من نوع Min المتغيرة الداخلة هي التي تقابل أكبر قيمة موجبة من قيم سطر التقييم $(\boldsymbol{\Delta c})$، و بالتالي X_2 هي المتغيرة الداخلة.

تحديد المتغيرة الخارجة: المتغيرة الخارجة يتم تحديدها بنفس الطريقة سواء كانت دالة الهدف من النوع Maxأو Min. بعد حساب النسبة $\frac{\boldsymbol{b_j}}{\boldsymbol{a_{ijk}}}$ نحدد المتغيرة الخارجة و هي المقابلة لأصغر قيمة موجبة و غير معدومة من هذه القيم، و عليه e_1 هي المتغيرة الخارجة.

تحديد نقطة المحور(تحديد عنصر الارتكاز): هي عبارة عن نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة، و بالتالي 3 هي نقطة المحور.

			2	1	0	0	M	M	$\frac{b_j}{a_{ijk}}$
c_k	v	b_j	X_1	X_2	e_1	e_2	A_1	A_2	
M	A_1	30	1	3	-1	0	1	0	10
M	A_2	40	4	2	0	-1	0	1	20
Z= 70M			5M-2	5M-1	-M	-M	0	0	

تحديد قيم الجدول الموالي :

أولا نبدأ بقيم X_2 المتغيرة الداخلة حيث كل قيمة في سطر المحور تقسم على نقطة المحور(30/3=10، 1/3، 3/3=1، -1/3 ، 0/3=0، 1/3، 0/3=0)

بقية قيم الجدول الموالي و كذلك قيم b_j تحسب وفق العلاقة التالية:

القيمة الجديدة = القيمة القديمة- (الرقم المقابل في سطر المحور * الرقم المقابل في عمود المحور) / نقطة المحور

20 =3/(2*30) -40 =قج$_1$

3/10=3/(2*1)-4=قج$_2$

0=3/(2*3)-2=قج$_3$

3/2=3/(2*1-)-1-=قج$_4$

1- =3/(2*0)-1-=قج$_5$

قج$_6$=0-3/(2*1)=- 3/2

قج$_5$=1-3/(2*0)=1

نسجل هذه القيم في الجدول و نحسب قيمة دالة الهدف (Z) و قيم سطر التقييم(Δc) بنفس الطريقة السابقة.

			2		0	**0**	**M**	**M**
c_k	**v**	**b_j**	X_1	X_2	e_1	e_2	A_1	A_2
1	X_2	10	1/3	1	-1/3	0	1/3	0
M	A_2	20	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1
Z=10+ 20M			-5+3M/3	0	-1+2M/3	-M	1-5M/3	0

اختبار أمثلية الحل

نعيد اختبار أمثلية الحل، بما أن هناك قيمة موجلة في سطر التقييم فالحل غير أمثل و يجب تحسينه

تحسين الحل إلى غاية بلوغ الحل الأمثل

نعيد نفس الخطوات الموجودة في الخطوة السابقة أي البحث عن المتغيرة الداخلة و الخارجة، المتغيرة الداخلة هي X_1، المتغيرة الخارجة هي A_2

			2		0	**0**	**M**	**M**	$\frac{b_j}{a_{ijk}}$
c_k	**v**	**b_j**	X_1	X_2	e_1	e_2	A_1	A_2	

1	X_2	10	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	30
M	A_2	20	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1	6
Z=10+ 20M			-5+3M/3	0	-1+2M/3	-M	1-5M/3	0	

بعد تحديد المتغيرة الداخلة و الخارجة يتم إعادة حساب قيم الجدول الجديد بنفس الطريقة السابقة، و عليه يتم الحصول على الجدول التالي:

			2		0	**0**	**M**	**M**
$\mathbf{c_k}$	**v**	$\mathbf{b_j}$	X_1	X_2	e_1	e_2	A_1	A_2
1	X_2	8	0	1	-2/5	1/10	2/5	-1/10
2	X_1	6	1	0	1/5	-3/10	-1/5	3/10
Z=20			0	0	0	-1/2	-M	1/2-M

نعيد اختبار أمثلية الحل، بما أن كل قيم سطر التقييم أقل أو تساوي الصفر فالحل يعتبر حل امثل.

خطة الإنتاج المثلى: حتى يتم تحقيق أقل تكلفة و المقدر ب 20 ون يجب إنتاج 6 و حدات من X_1 و 8 وحدات من X_2.

الحالات الخاصة لطريقة السمبلكس

1. حالة عدم وجود الحل الأمثل:

هي الحالة التي يتم فيها الوصول إلى الحل النهائي (الجدول الأخير من جداول السمبلكس) للمشكلة المدروسة و لكن هذا الحل يحتوي على المتغير الاصطناعي (A_i)(بقاء A_i في عمود v في الجدول الأخير) بالتالي نقول أن المسألة ليس لديها حل.

مثال:

Min. Z=10X1+15X2

S.T.

X1+X2 ≤ 20

X1+X2 ≥30

X1،X2≥0

2. حالة الحل اللانهائي(عدد لا نهائي من الحلول):

في هذه الحالة فإنه عند حساب قيمة المتغيرة الخارجة($\frac{b_j}{a_{ijk}}$) نجد فقط قيم سالبة أو ما لانهاية، و بالتالي لو نخار سنختار ∞ أي عدد لانهائي من الحلول للمسألة مما يستوجب تعديل النموذج الاصلي.

مثال:

Max. Z= 4X1+2X2

S.T.:

$3X1-3X2\leq 60$

$2X1-2X2\leq 20$

X1،X2≥

3. حالة الانحلالية(عدم الانتظام):

في هذه الحالة عند حساب قيم المتغيرة الداخلة أو الخارجة نجد قيمتين أو أكثر متساويتين لها، و بالتالي سنختار عشوائيا إحداهما ثم نكمل الحل و نجد نفس الحل الأمثل، و الاختلاف في هذا الاختيار هو أن إحدى هذه المغيرات ستعطي الحل الأمثل بسرعة عكس الأخرى.

مثال:

Max. $Z= 5X1+9X2$

S.T:

$X1+2X2\leq 4$

$X1+X2\leq 2$

$X1 ، X2 \geq 0$

4. حالة الحل البديل

و تحدث عندما يكون بالامكان تكوين أكثر من حل أساسي ويعطي نفس قيمة الحل الأمثل ، ويمكن تحديدها عندما تكون قيمة احد المتغيرات الغير أساسية في جدول الحل الأمثل في صف Z تساوي صفر.

مثال:

Max. $Z=8X1+4X2$

S.T:

$4X1+2X2\leq 8$

$2X1+2X2\leq 6$

$X1$、$X2\geq 0$

6-1 تمارين مقترحة

التمرين 01:

تقوم شركة بإنتاج نوعين من السيارات (B،A)، فإذا كان إنتاج السيارة الواحدة من النوع الأول يحتاج إلى ساعة عمل في القسم الأول، و 6 ساعات عمل في القسم الثاني، و 8 ساعات في القسم الثالث؟، بينما تحتاج السيارة الواحدة من النوع الثاني إلى ساعاتيان عمل في القسم الأول، ساعتان عمل في القسم الثاني، و 4ساعات عمل في القسم الثالث، فإذا كانت الطاقة المتاحة للمراكز الثلاثة هي 10، 36، 56 ساعة عمل في الأسبوع على

الترتيب، فإذا علمت أن إنتاج السيارة الواحدة من النوع الأول يكلف الشركة 50ون بينما إنتاج السيارة الواحدة من النوع الثاني يكلف الشركة 30ون.

المطلوب: تحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع حتى تحقق الشركة أقل تكلفة ممكنة؟

التمرين 02:

تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من السلع و يمر الإنتاج بقسمين ، حيث تبلغ الطاقة القصوى المتاحة للقسم الأول ب 9 ساعات، و القسم الثاني ب 10ساعات، يحتاج إنتاج الوحدة من السلعة الأولى إلى 3 ساعات في القسم الأول و ساعتان في القسم الثاني، بينما تحتاج إنتاج الوحدة من السلعة الثانية إلى ساعة واحدة في قسم الأول و ساعتين في القسم الثاني، فإذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة الأولى هو 4 ون و ربح الوحدة الواحدة من السلعة الثانية هو 2 ون

المطلوب: تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل منتج بحيث تحقق الشركة أقصى ربح ممكن؟

التمرين03

شركة صناعية ترغب في تحديد الكميات التي يجب أن تنتجها من 3 منتجات مختلفة وعندها موارد محدودة لتعظيم ربحها :

الموارد	منتج 1	منتج 2	منتج 3	المتاح
يد عاملة	5	2	4	240
مواد خام	4	6	3	400
الربح	3	5	2	

المطلوب:

ما هي خطة الإنتاج المثلى؟ (طريقة السمبلكس)

التمرين04:

شركه تقدم بإنتاج نوعين من الدرجات، يتم إنتاجها باستخدام نوعين من المواد الخام وهي الألومونيوم والحديد وكان ربح الوحدة من النوع الأول 10ون ، والثاني 15ون.

	الألومونيوم	الحديد
النوع الاول	2	3
النوع الثاني	4	2

المطلوب: ما هو عدد الدرجات التي يجب على الشركة انتاجها علماً بان إجمالي الألومنيوم المستخدم في الأسبوع لا يتعدى 100 كغ وان إجمالي الحديد الصلب المستخدم في الأسبوع لا يتعدى 80 كغ وذلك لتعظيم ربح الشركة. (طريقة السمبلكس)؟

7-1 النموذج الثنائي(النظير ، المعاكس، المقابل)

7-1 النموذج الثنائي(النظير ، المعاكس، المقابل)

إن لكل نموذج نموذجا مقابلا (ثنائيا) ، و أن هناك صفة مشتركة ما بين النموذجين تتمثل في أن الحل الأمثل لأحدهما يعطي الحل الأمثل للنموذج الآخر.

كل برنامج أصلي في البرمجة الخطية له برنامج ثنائيا، و هو عبارة عن برنامج معاكس للبرنامج الأصلي، و يمكن تلخيص خطوات صياغة البرنامج الثنائي كما يلي:

-تحويل دالة الهدف منMax إلى Min و العكس صحيح.

- معاملات دالة الهدف تصبح الطرف الثاني(الموارد) من القيود و العكس صحيح.

- أسطر المصفوفة تصبح أعمدة و العكس صحيح، في المتباينات فغن المعاملات الموجودة من اليسار إلى اليمين، توضع من في المشكلة الثنائية من الأعلى إلى الأسفل.

- نوع المتراجحة إذا كان $\geq$ يصبح $\leq$ و العكس صحيح.

- تغيير رمز المتغيرات مثلا: x_i تصبح y_i.

و بالتالي إذا كان لدينا نموذج وفق الصيغة التالية:

النموذج الثنائي	النموذج الأصلي

$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_j \; x_j$ $\begin{cases} \geq \; b_i \sum a_{ij} x_j \\ \leq b_i \sum a_{ij} x_j \\ = b_i \sum a_{ij} x_j \end{cases}$ $x_j \geq 0$	$MinZ = \sum_{j=1}^{n} b_j \; y_j$ $\begin{cases} \leq \; C_j \sum a_{ij} y_j \\ \geq C_j \sum a_{ij} y_j \\ = C_j \sum a_{ij} yx_j \end{cases}$ $y_j \geq 0$

مثال:

النموذج الأصلي	النموذج الثنائي
$Max.\ Z=10X_1+20X_2$ S.T: $\begin{cases} X_1+2X_2 \leq 2 \\ 5X_1+X_2 \leq 3 \\ 6X_1+7X_2 \leq 4 \end{cases}$ X1،X2≥0	$Max.\ Z=2y_1+3y_2+4y_3$ S.T: $\begin{cases} y_1+5y_2+6\ y_3 \geq 8 \\ 2y_1+\ y_2+7\ y_3 \geq 6 \end{cases}$ y_1،y_2،$y_3 \geq 0$

إذا كان النموذج ذا صيغة مختلطة (عامة)، أي يحتوي على متراجحات من النوعين(≤، ≥)، فإنه يجب تحويله إلى الصيغة القانونية ثم تحويله إلى برنامج ثنائي.

مثال:

النموذج الثنائي	تحويله إلى الصيغة القانونية	النموذج الأصلي
Min. $Z=20y_1+30y_2+10y_3$ S.T: $\begin{cases} 3y_1-5y_2+y_3 \geq 1 \\ 4y_1-6y_2+y_3 \geq 2 \end{cases}$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$	Max. $Z= x_1+2x_2$ S.T: $\begin{cases} 3x_1+4x_2 \leq 20 \\ -5x_1-6x_2 \leq -30 \\ x_1+x_2 \leq 10 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$	Max. $Z=x_1+2x_2$ S.T: $\begin{cases} 3x_1+4x_2 \leq 20 \\ 5x_1+6x_2 \geq 30 \ (-1) \\ x_1+x_2 \leq 10 \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0$

ملاحظة:

نلاحظ أن عدد المتغيرات في النموذج الأصلي يساوي عدد القيود في النموذج الثنائي، و عدد القيود في النموذج الأصلي يساوي عدد المتغيرات في النموذج الثنائي.

طرق حل المسألة الثنائية:

هناك طريقتان لحل المسألة الثنائية:

- طريقة ميزة التكامل بين متغيرات الأصلية ومتغيرات الثنائية: تعتمد أساسا على الحل الأمثل للمسألة الأصلية، حيث من خلال العلاقات التي تربط المسألة الأصلية بالمسألة الثنائية يمكننا استنتاج علاقات تربط بين متغيرات المسألتين يمكننا استغلالها في عملية إيجاد الحل الأمثل للثنائية اعتمادا على الحل الأمثل للأصلي

- طريقة السمبلكس الخاصة بالمسألة الثنائية.

كيفية استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من خلال الحل الأمثل للبرنامج الأصلي:

يستنتج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من خلال الحل الأمثل للبرنامج الأصلي بإتباع الخطوات التالية:

- قيم (Δc) تصبح مكان $\mathbf{b_j}$ و العكس صحيح (المختلفة عن الصفر).
- تحديد نوع المتغيرات.
-قيمة دالة الهدف هي نفسها.
- باقي قيم المصفوفة تعكس الإشارة.
- ثم تكملة بقية بيانات الجدول**(c_k).**
- نضيف لسطر التقييم إشارة (-) فقط إذا كان النموذج الثنائي من النوع Min.

مثال

$$\text{Max. } Z=x_1+3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \leq 40 \\ x_1+4x_2 \leq 90 \end{cases}$$

$$x_1 ، x_2 \geq 0$$

المطلوب:

-أوجد الحل الامثل؟

-أوجد البرنامج الثنائي؟

- استنتج الحل الامثل للبرنامج الثنائي؟

الحل:

باتباع خطوات الحل بطريقة السمبلكس نحصل على الحل المثالي للبرنامج كمايلي:

	1	3	0	**0**

c_k	v	b_j	X_1	X_2	e_1	e_2
1	X_1	10	1	0	4/7	-1/7
3	X_2	20	0	1	-1/7	2/7
Z= 70			0	0	1/7	5/7

اعداد البرنامج الثنائي

$$\text{Min. } Z=40y_1+90y_2$$

S.T:

$$\begin{cases} 2y_1+1y_2 \geq 1 \\ 1y_1+4y_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي

			40	90	0	**0**
c_k	v	b_j	y_1	y_2	e_1	e_2

40	y_1	5/7	1	0	4/7-	1/7
90	y_2	1/7	0	1	1/7	2/7-
Z= 70			0	0	-10	-20

8-1 تمارين مقترحة

8-1 تمارين مقترحة

التمرين 01:

حول نموذج البرمجة الخطية الأولي التالي إلى النموذج المقابل:

$$\text{Min. } Z = 16 X_1 + 25 X_2$$

S.T.

$$\begin{cases} X_1 + 7 X_2 \geq 4 \\ X_1 + 5 X_2 \geq 5 \\ 2X_1 + 3 X_2 \geq 9 \end{cases}$$

$$X_1 \text{ ، } X_2 \geq 0$$

تمرين02:

حول نموذج البرمجة الخطية الأولي التالي إلى النموذج المقابل:

$$\text{Max. } Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$$

S.T.

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18 \\ 5X_1 + 6X_3 \leq 20 \end{cases}$$

$$X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4 \geq 9$$

$$X_1 ، X_2 ، X_3 ، X_4 \geq \mathbf{0}$$

تمرين03:

حول نموذج البرمجة الخطية الأولي التالي إلى النموذج المقابل:

$$Max.\ Z = 2X_1 + X_2 + X_3$$

S.T.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \geq 6 \\ 3X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 3 \\ -4X_1 + 3X_2 - 6X_3 = 1 \end{cases}$$

$$X_1 ، X_2 ، X_3 \geq 0$$

التمرين04:

اليك النموذج التالي:

$$Min.\ Z = 2X_1 + X_2$$

S.T.

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 \geq 3 \\ 4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1 + 2X_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$X_1 ، X_2 \geq 0$$

المطلوب:

- حول البرنامج التالي إلى البرنامج المقابل له؟

-ما هي خطة الإنتاج المثلى؟

-استنتج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؟

•

9-1 تحليل الحساسية

تحليل الحساسية هو كيفية تغيير الحل الأمثل إذا تغيرت إحدى العناصر التالية:

معاملات دالة الهدف(C_j): في هذه الحالة قد تكون متغيرة القرار، إما متغيرة خارج الأساس، أو متغيرة أساس.

- معاملات القيود(a_{ij}).

- الكميات المتاحة من الموارد(b_j).

فتحليل الحساسية هو كيفية تحديد المجالات التي لن يتغير فيها الحل، تحليل الحساسية لا يتطلب حل المشكلة من البداية بل من خلال دراسة الجدول الأخير (الحل الأمثل) فقط.

مثال:

إليك النموذج الرياضي التالي:

$$\text{Max. } Z=2x_1+4x_2+3\,x_3$$

$$\text{S.T:}$$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2\,x_3 \leq 40 \\ 2x_1+x_2+2\,x_3 \leq 90 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

المطلوب:

-ما هي خطة الإنتاج المثلى؟

-هل يتغير الحل الأمثل لهذا البرنامج لو ارتفع الربح الوحدوي ل x_2 إلى 5ون؟

-هل يتغير الحل الأمثل لهذا البرنامج لو ارتفع الربح الوحدوي ل x_3 إلى 9ون؟

-هل يتغير الحل الأمثل لهذا البرنامج لو ارتفعت الطاقة الإنتاجية للقيد الأول إلى 90؟

الحل

بإتباع خطوات طريقة السمبلكس نتحصل على الحل الأمثل لهذا البرنامج كمايلي:

			2	4	3	0	**0**	**0**
c_k	**v**	**b_j**	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
4	x_2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0

3	x_3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	e_3	80/3	5/3	0	0	2/3	-1/3	1
Z= 230/3			11/6	0	0	5/6	2/3	0

لمعرفة مقدار التغير في الربح الوحدوي ل x_2 و x_3 (لأنهما موجودتان في الحل الأمثل) نتبع الخطوات التالية:

- نسجل سطر المصفوفة المقابل لتلك المتغيرة من الجدول الأخير أفقيا.
- نسجل قيم سطر التقييم (Δc).
- نستنتج المتراجحات.
-نرسم محور يشمل كل قيم (Δ).
-نستنتج مجال التغير.
-نحدد مجال تغير الربح الوحدوي لتلك المتغيرة دون التأثير على الحل الامثل.

بالنسبة للمتغيرة x_2 لو ارتفع الربح من 4 إلى 5:

-نسجل سطر المصفوفة المقابل x_2من الجدول الأخير أفقيا، ونسجل قيم سطر التقييم (Δc):

Δ x_2	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
z	11/6	0	0	5/6	2/3	0

-نستنتج المتراجحات و نرسم محور يشمل كل قيم (Δ):

$\boldsymbol{\Delta\frac{1}{3}+11/6\geq 0} \longrightarrow \boldsymbol{\Delta\geq -33/6}$

$\boldsymbol{\Delta 1+0\geq 0} \longrightarrow \boldsymbol{\Delta\geq 0}$

$\boldsymbol{\Delta 0+0\geq 0} \longrightarrow \boldsymbol{\Delta\geq 0}$

$\boldsymbol{\Delta 1/3+5/6\geq 0} \longrightarrow \boldsymbol{\Delta\geq -5/2}$

$\boldsymbol{\Delta -1/3+2/3\geq 0} \longrightarrow \boldsymbol{\Delta\leq -2}$

$\boldsymbol{\Delta 0+0\geq 0} \longrightarrow \boldsymbol{\Delta\geq 0}$

-نستنتج مجال التغير.

$\Delta\in [0،2]$

نحدد مجال تغير الربح الوحدوي $\mathbf{x_2}$ دون التأثير على الحل الأمثل:
معامل $\mathbf{x_2}$ يتغير ضمن المجال $[4 + 0 ، 4 + 2]$ أي تغير الربح الوحدوي ل $\mathbf{x_2}$ من 4 إلى 6 يسمح ببقاء الحل الأمثل دون تغير.

$5\in [4،6]$

-و بالتالي لن يتغير الحل الأمثل لهذا البرنامج لو ارتفع الربح الوحدوي ل x_2 إلى 5ون.

بالنسبة للمتغيرة x_3 لو ارتفع الربح من 3 إلى 9:

-نسجل سطر المصفوفة المقابل $\mathbf{x_3}$ من الجدول الأخير أفقيا، ونسجل قيم سطر التقييم (Δc):

Δ x_3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
z	11/6	0	0	5/6	2/3	0

-نستنتج المتراجحات و نرسم محور يشمل كل قيم (Δ):

$\Delta 5/6 + 11/6 \geq 0 \longrightarrow \Delta \geq -11/5$

$\Delta 0 + 0 \geq 0 \longrightarrow \Delta \geq 0$

$\Delta 1 + 0 \geq 0 \longrightarrow \Delta \geq 0$

$\Delta -1/6+5/6 \geq 0 \longrightarrow \Delta \geq 5$

$\Delta 2/3+2/3 \geq 0 \longrightarrow \Delta \leq -1$

$\Delta 0 + 0 \geq 0 \longrightarrow \Delta \geq 0$

-نستنتج مجال التغير.

$\Delta \in [0،5]$

نحدد مجال تغير الربح الوحدوي x_3 دون التأثير على الحل الأمثل:

لا يتغير الحل الامثل إذا تغير معامل x_3 يتغير ضمن المجال $[0 + 3،5 + 3]$

لكن $9 \notin [3،8]$

-و بالتالي يتغير الحل الأمثل لهذا البرنامج لو ارتفع الربح الوحدوي ل x_3 إلى 9ون.

حالة تغير الطرف الثاني من القيود:

لمعرفة التغير في الطاقات الإنتاجية (b_j) دون التأثير على الحل الأمثل نتبع ما يلي:

-نسجل قيم b_j من الجدول الأخير عموديا.

-نسجل قيم e_i(القيد المطلوب) عموديا.

- نستنتج المتراجحات.

-نرسم محور يضم كل قيم (Δ).

-نحدد مجال التغير.

لو ارتفعت الطاقة الإنتاجية للقيد الأول إلى 90:

- نسجل قيم b_j من الجدول الأخير عموديا، نسجل قيم e_1(القيد المطلوب) عموديا، و نستنتج المتراجحات:

b_j Δe_1

$20/3$ $1/3 \longrightarrow 20/3+\Delta 1/3 \geq 0 \longrightarrow \Delta \geq -20$

$50/3$ $-1/6 \longrightarrow 50/3-\Delta 1/6 \geq 0 \longrightarrow \Delta \leq 100$

$80/3$ $2/3 \longrightarrow 80/3+\Delta 2/3 \geq 0 \longrightarrow \Delta \geq 40$

-نرسم محور يضم كل قيم (Δ) و نحدد مجال التغير:

$\Delta \in [40،100]$

لا يتغير الحل الأمثل إذا تغير الطاقة الإنتاجية للقيد الأول ضمن المجال $[40 + 60،100 + 60]$

و بالتالي لا يتغير الحل الأمثل لو ارتفعت الطاقة الإنتاجية للقيد الأول إلى 90 لأن $90 \in [100،160]$

1-10 تمارين مقترحة

10-1 تمارين مقترحة

التمرين 01:

تنتج مؤسسة صناعية نوعين من السلع، و لمعرفة الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين لتحقيق أعظم ربح ممكن قامت بجمع البيانات التالية:

- يمر المنتوجان عبر ورشتان هما ورشة التركيب يعمل بها 5 عمال، و ورشة الاعداد النهائي يعمل بها 4 عمال، طاقة العمل اليومي القصوى لكل عامل هي 8 ساعات.
- يتطلب المنتوج الاول 4سا عمل في الورشة الاولى و 2 سا عمل في الورشة الثانية، بينما يتطلب المنتوج الثاني 2 سا عمل في الورشة الاولى و 4سا عمل في الورشة الثانية.
- سعر الوحدة الواحدة من المنتوج الاول 500ون و يكلف 200ون، أما سعر الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني 300ون و يكلف 100ون.

المطلوب:

- ما هي خطة الإنتاج المثلى(طريقة السمبلاكس)؟.
- هل يتوفر الحل الأمثل على حل بديل؟ و لماذا؟.
- هل يتغير الحل الأمثل لو ارتفع ربح المنتوج الأول 3دج ؟.
- هل يتغير الحل الأمثل لو انخفض ربح المنتوج الثاني بدينار واحد؟

- هل يتغير الحل الأمثل لو انخفضت طاقة العمل للقيد الأول إلى 20سا؟

التمرين 02:

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z=700x_1+400x_2+600x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3 \leq 1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3 \leq 800 \\ x_1+3x_2+2x_3 \leq 400 \\ x_1 \geq 0 ، x_2 \geq 0 ، x_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

- أوجد خطة الإنتاج المثلى؟
- حدد مجال تغير معامل x_3 حتى يبقى الحل أمثلا.؟
- بافتراض أن معامل متغيرة القرار x_3 قد أصبح 719 بدلا من 600، هل يتغير الحل الأمثل؟
- بافتراض أن معامل متغيرة القرار x_3 قد أصبح 721 بدلا من 600، هل يتغير الحل الأمثل؟
- حدد مجال تغير معامل x_1 حتى يبقى الحل أمثلا.
- بافتراض أن معامل متغيرة القرار x_1 قد أصبح 549 بدلا من 700، هل يتغير الحل الأمثل؟
- بافتراض أن معامل متغيرة القرار x_1 قد أصبح 801 بدلا من 700، هل يتغير الحل الأمثل؟
- بافتراض أن معامل متغيرة القرار x_1 قد أصبح 750 بدلا من 700، هل يتغير الحل الأمثل

التمرين 03:

إليك البرنامج الرياضي التالي:

$$MAX\ Z = X+3Y$$

$$\begin{cases} 2X + Y \leq 40 \\ X + 4Y \leq 90 \end{cases}$$

$$X،Y \geq 0$$

إذا كان الحل الأمثل لهذا البرنامج كما يلي:

			1	3	0	0
C_K	V	b_J	X	Y	e_1	e_2
1	X	10	1	0	4/7	-1/7
3	Y	20	0	1	-1/7	2/7
Z=70			0	0	1/7	5/7

المطلوب:

- هل يتغير الحل الأمثل لو انخفض ربح المنتج الثاني بدينار واحد؟
- هل يتغير الحل الأمثل إذا انخفض المتاح في القيد الأول إلى 20 كلغ؟

2-مسائل النقل

2-مسائل النقل

تعتبر مسائل النقل إحدى حالات البرمجة الخطية، لأنه لها نفس خصائص البرمجة الخطية باعتبارها تهدف أيضا إلى الوصول إلى الأمثلية في وجود مجموعة من القيود الخطية، إلا أنه لها ظروفها و شروطها الخاصة و طرق الحل الخاصة بها، مما يجعلها كطريقة مستقلة في حد ذاتها، فهي تهتم بتوزيع المنتجات من عدة مصادر للعرض

(معامل، موانئ ...) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت.

قبل تطبيق طريقة النقل لحل المشكلة، يجب التأكد من توفر الشروط التالية:

- وجود مجموعة من الطاقات يمكن استخدامها، و التي تسمى بالمصادر.
- أن تكون هناك عدة أوجه لاستغلال هذه الطاقات و إلا لما كانت هناك مشكلة في توزيع الموارد.
-يجب أن يتساوى مجموع المعروض من الطاقات(العرض) مع مجموع المطلوب منها (الطلب).
-وجود هدف سواء أعلى إيراد أو أدنى تكلفة.
-تجانس الموارد(نفس وحدة القياس).
-عدم وجود عوائد للنقل بين أي مصدر للتجهيز أو أي موقع للطلب.
- إن تكاليف نقل المواد بين أي مصدر و أي موقع للطلب معروفة، و لن تتغير في الأمد القريب.
- إن تكلفة النقل بين أي مصدر و أي موقع لا تتغير بتغير كمية المواد المنقولة.

1-2 صياغة مسائل النقل

2- 1-1 مسائل النقل في حالة التقليل

يلخص جدول مسائل النقل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية إلى كل مركز توزيع في أعلى كل خانة، و تظهر متغيرات المسألة و هي

القيم xij المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة، و كذا كمية الطلب لكل منطقة.

بافتراض و جود ثلاث مصادر إنتاجية و أربع مراكز استقبال، فإن نموذج النقل تتم دراسة معطياته في جداول النقل ذات الشكل العام التالي:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	**C 11** X 11	**C12** X 12	**C13** X13	**C14** X14	**A 1**
منبع 2	**C21** X 21	**C22** X 22	**C23** X23	**C24** X24	**A 2**
منبع 3	**C31** X 31	**C32** X 32	**C33** X 33	**C34** X 34	**A 3**
الطلب	**B 1**	**B 2**	**B 3**	**B 4**	**المجموع**

بحيث x_{ij} هي الكمية التي يمكن تمون بها وحدة الإنتاج i المنطقة j والتي تكون مجهولة يتم البحث عنها ، بينما c_{ij} هي تكاليف النقل الوحدوية والتي تكون معلومة بالنسبة.

الصيغة الرياضية لمسألة النقل:

دالة التكلفة الإجمالية التي تتحملها المؤسسة هي:

$$Z = c_{11} x_{11} + c_{12} x_{12} + c_{13} x_{13} + c_{14} x_{14} + c_{21} x_{21} + c_{22} x_{22} + c_{23} x_{23} + c_{24} x_{24} + c_{31} x_{31} + c_{32} x_{32} + c_{33} x_{33} + c_{34} x_{34}$$

$$Z = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

الكميات التي يعرضها كل منبع هي:

المنبع 1 $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a\ 1$

المنبع 2 $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a\ 1$

المنبع 3 $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a\ 1$

الكميات التي يطلبها كل مصب هي:

المصب 1 $x_{11} + x_{21} + x_{31} = b\ 1$

المصب 2 $x_{12} + x_{22} + x_{32} = b\ 2$

المصب 3 $x_{13} + x_{23} + x_{33} = b\ 3$

المصب 4 $x_{14} + x_{24} + x_{34} = b\ 4$

ومنه الصيغة الرياضية لمسألة النقل عند السعي لتقليل التكلفة بهدف زيادة الربح كما يلي:

$\min Z = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} c\ ij\ x\ ij$

$= a\ i \sum_{j=1}^{4} xij$

$= b\ i \sum_{i=1}^{3} xij$

$c\ ij \geq 0$،$X\ ij$

2-1-2 مسائل النقل في حالة التعظيم

افتراض أن الربح المحصل عليه جراء نقل وحدة واحدة من المنبع i إلى المصب j هو p_{ij} والكميات المنقولة هي x_{ij} و a_i هي كميات العرض لكل منبع و b_j هي كميات الطلب لكل مصب، فيكون البرنامج الخطي الرياضي للمسألة النقل على الشكل التالي

$\text{Max } \pi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p\ ij\ x\ ij$

$= a\ i \sum_{j=1}^{n} xij$

$= b_i \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$

$p_{ij} \geq 0$،X_{ij}

حيث m هو عدد المنابع و n هو عدد المصبات.

2-2 حل مسائل النقل

1-2-2 حل مسائل النقل في حالة التقليل

يقصد بحل مسائل النقل إيجاد قيم متغيرات القرار xij المجهولة، لذلك فإن الأسلوب الرياضي لحل هذه المسائل يمر بمرحلتين أساسيتين هما: إيجاد الحل الابتدائي الممكن و التي تتضمن ثلاث طرق و هي: طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكاليف الدنيا، طريقة فوجل التقريبية، ثم تحسين الحل الابتدائي في المرحلة الثانية وتتضمن هذه المرحلة هي الأخرى طريقتين هما: طريقة المسار المتعرج و طريقة عوامل الضرب.

1- المرحلة الأولى: تحديد الحل الابتدائي

1-**1طريقة الزاوية الشمالية الغربية** :

يقصد بها أول خانة في الجدول إلى الأعلى و إلى اليسار، و هي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول

2-1 **طريقة التكاليف الدنيا**:

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية و هكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي (m+n-1).

3-1 طريقة فوجل:

تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طرقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، و نادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقتين السابقتين. وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:

-حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف و في كل عمود.

- تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق التكلفة (أعلى جزاء).

-اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود.

-في الخلية التي اختيرت في الخلية الثالثة، نقارن احتياجات المصب مع ما هو متوفر في المنبع لنأخذ القيمة الأقل.

نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة و الصفوف، و ذلك بعد إلغاء العمود أو السطر المشبع، و تكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات كل المصبات من المنابع المتاحة.

2- **المرحلة الثانية:** تحسين الحل الابتدائي

و تتضمن هذه المرحلة طريقتين هما: طريقة المسار المتعرج و طريقة عوامل الضرب.

2-1- طريقة المسار المتعرج:

يتم في هذه الطريقة اختبار الخلايا الفارغة الموجودة في مصفوفة الحل الابتدائي الذي تم التوصل إليه بإحدى الطرق السابقة، و المقصود بالخلايا الفارغة تلك المربعات الموجودة في المصفوفة والتي لم يتم النقل إليها، أي التي تحتوي على $xij = 0$، و يمكن تلخيص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

- يتم تحديد و رسم مسارات الخلايا الفارغة.
-يتم حساب القيم الجبرية للخلايا الفارغة.
-يتم اختيار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سلبية و تتم دراسة مسارها، و ذلك بأخذ مسار مغلق (إشارته بالتناوب +، -، + ...) و يتم اختيار أصغر قيمة من بين الزوايا التي تحمل الإشارة (-).

تكرر هذه العمليات إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية للخلايا تكون موجبة أو مساوية للصفر و الذي يعني الوصول إلى الحل الأمثل.

ملاحظة: المسار ينطلق من الخلية الفارغة مرورا بالخلايا المملوءة و بخطوط مستقيمة مشكلة زوايا قائمة وصولا إلى نفس الخلية.

2- طريقة عوامل الضرب (التوزيع المعدل):

تستخدم هذه الطريقة لاختبار أمثلية الحل الأولي، و هي أكفأ من سابقتها، و التي تعتمد على تكوين مسارات مغلقة للمتغيرات غير الأساسية و من ثم إيجاد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل، أما هذه الطريقة فهي قادرة على تحديد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل مباشرة، و تتلخص هذه الطريقة فيما يلي:

-نرمز لكل سطر (الوحدة الإنتاجية) بالرمز Ui، و نرمز لكل عمود (مركز التوزيع) بالرمز Vj.

-كل متغيرة أساسية (الخلايا المملوءة) في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

$$Cij = Ui + Vi \quad \text{مع} \quad Ui=0$$

-كل متغيرة غير أساسية (الخلايا الفارغة) في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

$$C'ij = Cij - Vj - Ui$$

و المطلوب تحديد قيم المجاهيل Ui و Vi.

-نختار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سالبية و تتم دراسة مسارها وفقا للقاعدة المعروفة في الطريقة السابقة.

-يتم تكرار هذه العملية إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية موجبة أو معدومة.

مثال01:

مؤسسة لديها 3 مخازن وأربع مراكز تسويق والجدول التالي يوضح كل من (تكلفة نقل الوحدة الواحدة من للسلع من المخازن- حجم كل مخزون – احتياجات كل مركز):

S\D	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	10	8	6	4	1500

S2	**14**	**4**	**3**	**2**	**1000**
S3	**18**	**7**	**11**	**9**	**1500**
الطلب	**750**	**1750**	**250**	**1250**	**4000**

المطلوب: اوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل الذي يحقق اقل تكلفة باستعمال طريقة التكلفة الدنيا؟

الحل:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	العرض
منبع 1	10 750	8 - 250	6 250	4 + 250	1500
منبع 2	14	4 +	3	2 - 1000	**1000**
منبع 3	18	7 1500	11	9	**1500**
الطلب	750	1750	250	1250	**4000**

عدد الخلايا الممتلئ هي 6 فتتحقق المعادلة 6 = 1-3+4

$$c = 10 \times 750 + 8 \times 250 + 6 \times 250 + 4 \times 250 + 2 \times 1000 + 7 \times 1500$$

$$c = 7500 + 2000 + 1500 + 1000 + 2000 + 10500 = 24500$$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_1 + v_1 = 10$ $\quad$ $U_2 + v_4 = 2$

$U_1 + v_2 = 8$ $\quad$ $U_3 + v_2 = 7$

$U_1 + v_3 = 6$

$U_1 + v_4 = 4$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل فنجد ما يلي:

$v_1 = 10 \quad v_2 = 8 \quad v_3 = 6 \quad v_4 = 4 \qquad U_2 = -2 \quad U_3$

ثم نقوم بحساب التكلفة الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$\delta ij = c_{ij} - u_i - v_j$

$\delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 14 + 2 - 10 = 6$

$\boldsymbol{\delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 4 + 2 - 8 = -2}$

$\delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 + 2 - 6 = -1$

$\delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 18 + 1 - 10 = 9$

$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 11 + 1 - 6 = 6$

$\delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 9 + 1 - 4 = 6$

هذا الحل ليس أمثل لوجود تكلفة حدية ليست موجبة ولا معدومة فيجب الانتقال إلى حل أساسي ثاني

الخانتان اللتان فيها إشارة سالبة. القيمتان اللتان فيهما هما 1000 و250 فنختار الأقل أي 250.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	10 750	8	6 - 250	4 + 500	1500

منبع 2	14	4 250	3 +	2 - 750	**1000**
منبع 3	18	7 1500	11	9	**1500**
الطلب	750	1750	250	1250	**4000**

عدد الخلايا الممتلئ هي 6 فتتحقق المعادلة 6 = 4+3-1

$c = 10 \times 750 + 6 \times 250 + 4 \times 500 + 4 \times 250 + 2 \times 750 + 7 \times 1500$

$c = 7500 + 1500 + 2000 + 1000 + 1500 + 10500 = 24000$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_2 + v_2 =$ $\qquad$ $4U_1 + v_1 = 10$

$U_2 + v_4 = 2$ $\qquad$ $U_1 + v_3 = 6$

$U_3 + v_2 = 7$ $\qquad$ $U_1 + v_4 = 4$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل، فنجد ما يلي:

$v_1 = 10 \quad v_3 = 6 \quad v_4 = 4 \quad v_2 = 6 \quad U_2 = -2 \quad U_3 = 1$

ثم نقوم بحساب التكلفة الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$ij = c_{ij} - u_i - v_j\delta$

$_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 8 - 0 + 6 = 2\delta$

$_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 14 + 2 - 10 = 6\delta$

$\mathbf{_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 2 + 6 = -1\delta}$

$_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 18 - 1 - 10 = 7\delta$

$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 11 - 1 - 6 = 4$

$\delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 9 - 1 - 4 = 4$

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	10 750	8	6	4 750	1500
منبع 2	14	4 250	3 **250**	2 500	**1000**
منبع 3	18	7 1500	11	9	**1500**
الطلب	750	1750	250	1250	**4000**

عدد الخلايا الممتلئ هي 6 فتتحقق المعادلة $6 = 4+3-1$

$c = 10 \times 750 + 4 \times 750 + 4 \times 250 + 3 \times 250 + 2 \times 500 + 7 \times 1500$

$c = 7500 + 3000 + 1000 + 750 + 1000 + 10500 = 23750$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_1 + v_1 = 10$ $\qquad$ $U_2 + v_3 = 3$

$U_1 + v_4 = 4$ $\qquad$ $U_2 + v_4 = 2$

$U_2 + v_2 = 4$ $\qquad$ $U_3 + v_2 = 7$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل، فنجد ما يلي:

$v_1 = 10 \quad v_4 = 4 \quad v_2 = 6 \quad v_3 = 5 \quad U_2 = -2 \quad U_3 = 1$

ثم نقوم بحساب التكلفة الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

$\delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 8 - 0 - 6 = 2$

$\delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 6 - 0 - 5 = 1$

$\delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 14 + 2 - 10 = 6$

$\delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 18 - 1 - 10 = 7$

$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 11 - 1 - 5 = 5$

$\delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 9 - 1 - 4 = 4$

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم التكلفة الحدية موجبة وإلا معدومة.

فيجب نقل 750 وحدة من المنبع 1 إلى المصب 1 و 750 وحدة من المنبع 1 إلى المصب 4 و 250 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 2 و250 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 3 و500 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 4 و1500 وحدة من المنبع 3 إلى المصب 2 وهذا ما يمكن المؤسسة من تقليل التكلفة إلى 23750 دج.

مثال02:

إحدى شركات تصنيع الألبان يتوفر لديها ثلاثة مراكز تسويقية في مواقع مختلفة، تقوم تلك المراكز بتجهيز الألبان إلى خمسة مراكز استهلاكية في عدة مناطق، المتيسر من الوحدات المنتجة في المراكز التسويقية (الكميات المعروضة) واحتياجات المراكز الاستهلاكية (الكميات المطلوبة) وكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتوج من كل أصل إلى كل نهاية مبين في جدول النقل التالي.

مراكز الاستهلاك / مراكز التسويق	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	الكميات المعروضة Supply
S_1	$\boxed{37}$ 75	$\boxed{27}$ 25	$\boxed{28}$	$\boxed{34}$	$\boxed{30}$	~~100~~ ~~25~~ 0
S_2	$\boxed{29}$	$\boxed{32}$ 35	$\boxed{32}$ 70	$\boxed{27}$ 20	$\boxed{28}$	~~125~~ ~~90~~ ~~20~~ 0
S_3	$\boxed{34}$	$\boxed{27}$	$\boxed{37}$	$\boxed{30}$ 60	$\boxed{30}$ 90	~~150~~ ~~90~~ 0
الكميات المطلوبة Demand	~~75~~ 0	~~60~~ ~~35~~ 0	~~70~~ 0	~~80~~ ~~60~~ 0	~~90~~ 0	375

الحل:

التحقق من ان مشكلة النقل متوازنة:

مجموع الكميات المعروضة (المتاح) = $100 + 125 + 150 = 375$

مجموع الكميات المطلوبة (الاحتياج) = $75 + 60 + 70 + 80 + 90 = 375$

مجموع الكميات المعروضة = مجموع الكميات المطلوبة

لذا فأن مشكلة النقل متوازنة.

بموجب طريقة الركن الشمالي الغربي نبدء من الركن الشمالي الغربي ، المركز الاستهلاكي D_1 يحتاج الى 75 وحده ومتوفر 100 وحده في المركز التسويقي S_1 لذا يتم تجهيز كامل احتاج المركز الاستهلاكي D_1 والبالغ 75 وحده ويبقى في المركز التسويقي S_1 25 وحده لذا نبقى في الصف الاول (أي ضمن المركز التسويقي S_1) وننتقل الى المركز الاستهلاكي D_2 الذي يحتاج الى 60 وحدة تجهز من المتبقي في المركز التسويقي S_1 والبالغه 25 وحدة ويبقى يحتاج 35 وحدة تجهز من المركز التسويقي S_2 (بمعنى

ننتقل عموديا الى الصف الثاني) الذي تتوفر فيه 125 وحدة لتبقى منها 90 وحدة تجهز منها 70 وحدة التي تمثل احتياج المركز الاستهلاكي D_3 ويبقى منها 20 وحدة تجهز الى المركز الاستهلاكي D_4 الذي يبقى يطلب 60 وحدة يتم تجهيزها من المركز التسويقي S_3 الذي يبقى متاحا فيه 90 وحدة تجهز لسد طلب المركز الاستهلاكي D_5 ، وبهذا يتم تجهيز كامل الطلب للمراكز اللاستهلاكية. وبهذا فان المتغيرات الاساسية في هذا الحل الاساسي هي :

$X_{11} = 75$ ، $X_{12} = 25$ ، $X_{22} = 35$ ، $X_{23} = 70$

$X_{24} = 20$ ، $X_{34} = 60$ ، $X_{35} = 90$

عدد المتنغيرات الاساسية = $7 = 3 + 5 - 1$

اذن فأن الحل يحقق شرط الحل الاساسي الممكن (حل غير منحل)

يبقى حساب الكلفة الاجمالية لعملية النقل بالسبة للحل الاساسي الاولي وهي :

$$Z = (37*75)+(27*25)+(32*35)+(32*70)+(27*20) +(30*60)+(30*90) = 11850$$

1-2-3 حل مسائل النقل في حالة التعظيم:

في حالة البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط، فيتم استبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة. و تختلف هذه الحالة عن سابقتها في النقاط التالية:

- عند استخدام طريقة التكلفة كان يتم اختيار أقل تكلفة بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة الأرباح فيتم اختيار أكبر خلية في الجدول لنبدأ الحل بها، و تسمى هذه الطريقة بطريقة تعظيم الأرباح؛

- عند استخدام طريقة فوجل التقريبية كان يتم حساب الفرق بين أصغر تكلفتين لكل سطر و عمود و ذلك بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة التعظيم فيتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل سطر و عمود و يلي ذلك اختيار أكبر فرق، ليتم بعدها تحديد الخلية الكبرى؛

- عند استخدام طرق تحسين الحل يتم تقييم و اختيار الخلية التي تحمل أكبر قيمة موجبة؛

- الحل الأمثل يكون عند الحصول على قيم جبرية سالبة أو معدومة للخلايا الفارغة.

مثال:

يتم نقل بضاعة من من 4 منابع إلى 4 مصبات، كما هو موضح في الجدول:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	العرض
منبع 1	3	13	10	6	320
منبع 2	7	9	11	9	**270**
منبع 3	8	7	6	2	**600**
منبع 4	2	5	4	8	**120**
الطلب	260	370	460	220	**1310**

المطلوب:

حدد الكميات التي يجب نقلها لتحقيق أكبر ربح بإستعمال طريقة أعلى عائد؟

الحل:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	3	13 320	10	6	320
منبع 2	7	9	11 - 270	9 +	**270**
منبع 3	8 260	7 50	6 + 190	2 - 100	**600**
منبع 4	2	5	4	8 120	**120**
الطلب	260	370	460	220	**1310**

عدد الخلايا الممتلئ هي 7 فتتحقق المعادلة 7= 1-4+4

$\pi = 13 \times 320 + 11 \times 270 + 8 \times 260 + 7 \times 50 + 6 \times 190 + 2 \times 100 + 8 \times 120$

$\pi = 4160 + 2970 + 2080 + 350 + 1140 + 200 + 960 = 11860$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_1 + v_2 = 13$ $U_2 + v_3 = 11$

$U_3 + v_1 = 8$ $U_3 + v_2 = 7$

$U_3 + v_3 = 6$ $U_3 + v_4 = 2$

$U_4 + v_4 = 8$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل، فنجد ما يلي:

$v_2 = 13$ $U_3 = -6$ $v_3 = 12$ $U_2 = -1$ $v_1 = 14$ $v_4 = 8$ $U_4 = 0$

ثم نقوم بحساب العوائد الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$\delta ij = p_{ij} - u_i - v_j$

$\delta_{11} = p_{11} - u_1 - v_1 = 3 - 0 - 14 = -11$

$\delta_{13} = p_{13} - u_1 - v_3 = 10 - 0 - 12 = -2$

$\delta_{14} = p_{14} - u_1 - v_4 = 6 - 0 - 8 = -2$

$\delta_{21} = p_{21} - u_2 - v_1 = 7 + 1 - 14 = -6$

$\delta_{22} = p_{22} - u_2 - v_2 = 9 + 1 - 13 = -3$

$\boldsymbol{\delta_{24} = p_{24} - u_2 - v_4 = 9 + 1 - 8 = 2}$

$\delta_{41} = p_{41} - u_4 - v_1 = 2 - 0 - 14 = -12$

$\delta_{42} = p_{42} - u_4 - v_2 = 5 - 0 - 13 = -8$

$\delta_{43} = p_{43} - u_4 - v_3 = 4 - 0 - 12 = -8$

هذا الحل ليس أمثل لوجود عائد حدي ليس سالب ولا معدوم فيجب الانتقال إلى حل أساسي ثاني

الخانتان اللتان فيها إشارة سالبة القيمة التي فيهما هما 100 و270 فنختار الأقل أي 100.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	العرض
منبع 1	3	13 320	10	6	320
منبع 2	7	9	11 170	9 100	**270**
منبع 3	8 260	7 50	6 290	2	**600**
منبع 4	2	5	4	8 120	**120**
الطلب	260	370	460	220	**1310**

عدد الخلايا الممتلئ هي 7 فتتحقق المعادلة 7= 1-4+4

$\pi = 13 \times 320 + 11 \times 170 + 9 \times 100 + 8 \times 260 + 7 \times 50 + 6 \times 290 + 8 \times 120$

$\pi = 4160 + 1870 + 900 + 2080 + 350 + 1740 + 960 = 12060$

مع ملاحظة أن $11860 \leq 12060$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_1 + v_2 = 13$ $\quad$ $U_2 + v_3 = 11$

$U_2 + v_4 = 9$ $\quad$ $U_3 + v_1 = 8$

$U_3 + v_2 = 7$ $\quad$ $U_3 + v_3 = 6$

$U_4 + v_4 = 8$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل فنجد ما يلي:

$U_4 = 10$ $v_3 = 12$ $v_2 = 13$ $v_1 = 14$ $v_4 = -2$ $U_3 = -6$ $v_2 = -1$

ثم نقوم بحساب العوائد الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$\delta ij = p_{ij} - u_i - v_j$

$\delta_{11} = p_{11} - u_1 - v_1 = 3 - 0 - 14 = -11$

$\delta_{13} = p_{13} - u_1 - v_3 = 10 - 0 - 12 = -2$

$\delta_{14} = p_{14} - u_1 - v_4 = 6 - 0 - 10 = -4$

$\delta_{22} = p_{22} - u_2 - v_2 = 9 + 1 - 13 = -3$

$\delta_{34} = p_{34} - u_3 - v_4 = 2 + 6 - 10 = -2$

$\delta_{41} = p_{41} - u_4 - v_1 = 2 + 2 - 14 = -10$

$\delta_{42} = p_{42} - u_4 - v_2 = 5 + 2 - 13 = -6$

$\delta_{43} = p_{43} - u_4 - v_3 = 4 + 2 -12 = -6$

هذا الحل أمثل لأن كل العوائد الحدية سالبة أو معدومة

فيجب نقل 320 وحدة من المنبع 1 إلى المصب 2 و 170 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 3 و100 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 4 و260 وحدة من المنبع 3 إلى المصب 1 و50 وحدة من المنبع 3 إلى المصب 2 و290 وحدة من المنبع 3 إلى المصب 3 و120 وحدة من المنبع 4 إلى المصب 4، فيتحقق ربح قدره 12060 دج.

تمارين محلولة

التمرين الأول:

الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 04 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	12	13	04	06	500
O_2	06	04	10	11	700
O_3	10	09	12	04	800
b_i	400	900	200	500	

المطلوب:1- انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛

2- قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؛

3- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛

4- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛

5- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له.

حل التمرين الأول:

1- تشكيل جدول النقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 x_{11}	13 x_{12}	04 x_{13}	06 x_{14}	500
O_2	06 x_{21}	04 x_{22}	10 x_{23}	11 x_{24}	700
O_3	10 x_{31}	09 x_{32}	12 x_{33}	04 x_{34}	800
b_i	400	900	200	500	2000

2- صياغة نموذج النقل:

$$Min\ Z = 12\,x_{11}+13\,x_{12}+4\,x_{13}+6\,x_{14}+6\,x_{21}+4\,x_{22}+10\,x_{23}+11\,x_{24}+10\,x_{31}+9\,x_{32}+12\,x_{33}+4\,x_{34}$$

قيود العرض:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 500$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 700$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 800$$

قيود الطلب:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 400$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{23} = 900$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 500$$

قيود عدم سلبية المتغيرات: $x_{ij} \geq 0$

3- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 **400**	13 **100**	04 /	06 /	~~500~~ ~~100~~ 0
O_2	06 /	04 **700**	10 /	11 /	~~700~~ 0
O_3	10 /	09 **100**	12 **200**	04 **500**	~~800~~ ~~700~~ 0
b_i	400	900	200	500	2000

$$Min\ Z = 12\ (400)+13\ (100)+4\ (0)+6\ (0)\ +6\ (0)+4\ (700)+10\ (0)+11\ (0)\ +10\ (0)+9\ (100)+12\ (200)+4\ (500) = 14200$$

3- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 **300**	13 /	04 **200**	06 /	~~500~~ ~~300~~ 0
O_2	06 /	04 **700**	10 /	11 /	~~700~~ 0
O_3	10 **100**	09 **200**	12 /	04 **500**	~~800~~ ~~300~~ ~~100~~
b_i	400	900	200	500	2000

Min Z =12 (300)+13 (0)+4 (200)+6 (0) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (100)+9 (200)+12 (0)+4 (500) = 10400

4- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل:

	D_1	***D_2***	***D_3***	***D_4***	***a_i***	**الفرق**
O_1	***12*** /	***13*** /	***04*** ***200***	***06*** ***300***	~~500~~ ~~300~~ 0	2 6
O_2	***06*** /	***04*** ***700***	***10*** /	***11*** /	~~700~~ 0	2 2 2
O_3	***10*** ***400***	***09*** ***200***	***12*** /	***04*** ***200***	~~800~~ ~~600~~ ~~400~~	5 5 1
b_i	~~400~~ 0	~~900~~ ~~200~~ 0	~~200~~ 0	~~500~~ ~~200~~ 0		
الفرق	4 4 4	5 5 5	6	2 2 7	2000	

Min Z =12 (0)+13 (0)+4 (200)+6 (300) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (400)+9 (200)+12 (0)+4 (200) = 12000

<u>التمرين الثاني</u>:

الجدول أدناه يقدم معطيات لمسألة نقل ما.

	D_1	***D_2***	***D_3***	***D_4***	***A_i***
O_1	20	17	15	10	130
O_2	16	14	18	13	50
O_3	12	15	11	19	100
b_i	40	40	80	120	

المطلوب:**1-** انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛

2- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا؛

3- أوجد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه باستخدام طريقة عوامل الضرب.

حل التمرين الثاني:

1- تشكيل جدول النقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 x_{11}	17 x_{12}	15 x_{13}	10 x_{14}	130
O_2	16 x_{21}	14 x_{22}	18 x_{23}	13 x_{24}	50
O_3	12 x_{31}	15 x_{32}	11 x_{33}	19 x_{34}	100
b_i	40	40	80	120	280

2- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 **10**	17 /	15 /	10 **120**	~~130~~ ~~10~~ 0
O_2	16 **10**	14 **40**	18 /	13 /	50 ~~10~~ 0
O_3	12 **20**	15 /	11 **80**	19 /	~~100~~ ~~20~~ 0
b_i	~~40~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~40~~ 0	~~80~~ 0	~~120~~ 0	280

$$Min\ Z = 20\ (10) + 17(0) + 15(0) + 10\ (120) + 16\ (10) + 14\ (40) + 18\ (0) + 13\ (0) + 12\ (20) + 15\ (0) + 11\ (80) + 19\ (0) = 3240$$

3- إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه:

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $U_i = 0$ مع $C_{ij} = U_i + V_i$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 20 = 0 + V_1 \Rightarrow \mathbf{V_1 = 20}$$

$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 10 = 0 + V_4 \Rightarrow \mathbf{V_4 = 10}$$

$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow 16 = U_2 + 20 \Rightarrow \mathbf{U_2 = -4}$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 14 = -4 + V_2 \Rightarrow \mathbf{V_2 = 18}$$

$$C_{31} = U_3 + V_1 \Rightarrow 12 = U_3 + 20 \Rightarrow \mathbf{U_3 = -8}$$

$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 11 = -8 + V_3 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 19}$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$$C'_{12} = C_{12} - V_2 - U_1 \Rightarrow C'_{12} = 17 - 18 - 0 \Rightarrow \mathbf{C'_{12} = -1}$$

$$C'_{13} = C_{13} - V_3 - U_1 \Rightarrow C'_{13} = 15 - 19 - 0 \Rightarrow \mathbf{C'_{13} = -4}$$

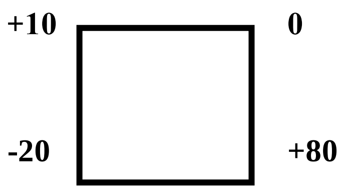
$$C'_{23} = C_{23} - V_3 - U_2 \Rightarrow C'_{23} = 18 - 19 - (-4) \Rightarrow \mathbf{C'_{23} = 3}$$

$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 13 - 10 - (-4) \Rightarrow \mathbf{C'_{24} = 7}$$

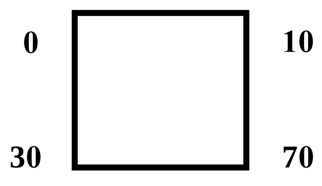
$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 15 - 18 - (-8) \Rightarrow \mathbf{C'_{32} = 5}$$

$$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 19 - 10 - (-8) \Rightarrow \mathbf{C'_{34} = 17}$$

الحل المتوصل إليه ليس أمثلا، لذا نختار الخلية الأشد سالبية و هي الخلية $\boldsymbol{x_{13}}$ و التي تتم دراسة مسارها:



بما أن أقل قيمة هي 10=$(min : 10, 80)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة $\boldsymbol{x_{13}}$ هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:



و عليه يصبح جدول النقل كالتالي.

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 /	17 /	15 10	10 120	130
O_2	16 10	14 40	18 /	13 /	50
O_3	12 30	15 /	11 70	19 /	100
b_i	40	40	80	120	280

$$Min\ Z = 20\ (0)+17(0)+15(10)+10\ (120)+16\ (10)+14\ (40)+18\ (0)+13\ (0)+12\ (30)+15\ (0)+11\ (70)+19\ (0) = 3200$$

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $U_i=0$ مع $C_{ij} = U_i + V_i$

$$C_{13} = U_1 + V_3 \Rightarrow 15 = 0 + V_3 \Rightarrow \boldsymbol{V_3 = 15}$$

$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 10 = 0 + V_4 \Rightarrow \boldsymbol{V_4 = 10}$$

$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 11 = U_2 + 15 \Rightarrow \boldsymbol{U_3 = -4}$$

$$C_{31} = U_3 + V_1 \Rightarrow 12 = -4 + V_1 \Rightarrow \boldsymbol{V_1 = 16}$$

$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow 16 = U_2 + 16 \Rightarrow \boldsymbol{U_2 = 0}$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 14 = 0 + V_2 \Rightarrow \boldsymbol{V_3 = 14}$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$$C'_{11} = C_{11} - V_1 - U_1 \Rightarrow C'_{11} = 20 - 16 - 0 \Rightarrow \boldsymbol{C'_{11} = 4}$$

$$C'_{12} = C_{12} - V_1 - U_2 \Rightarrow C'_{12} = 17 - 14 - 0 \Rightarrow \boldsymbol{C'_{12} = 3}$$

$$C'_{23} = C_{23} - V_3 - U_2 \Rightarrow C'_{23} = 18 - 15 - (0) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{23} = 3}$$

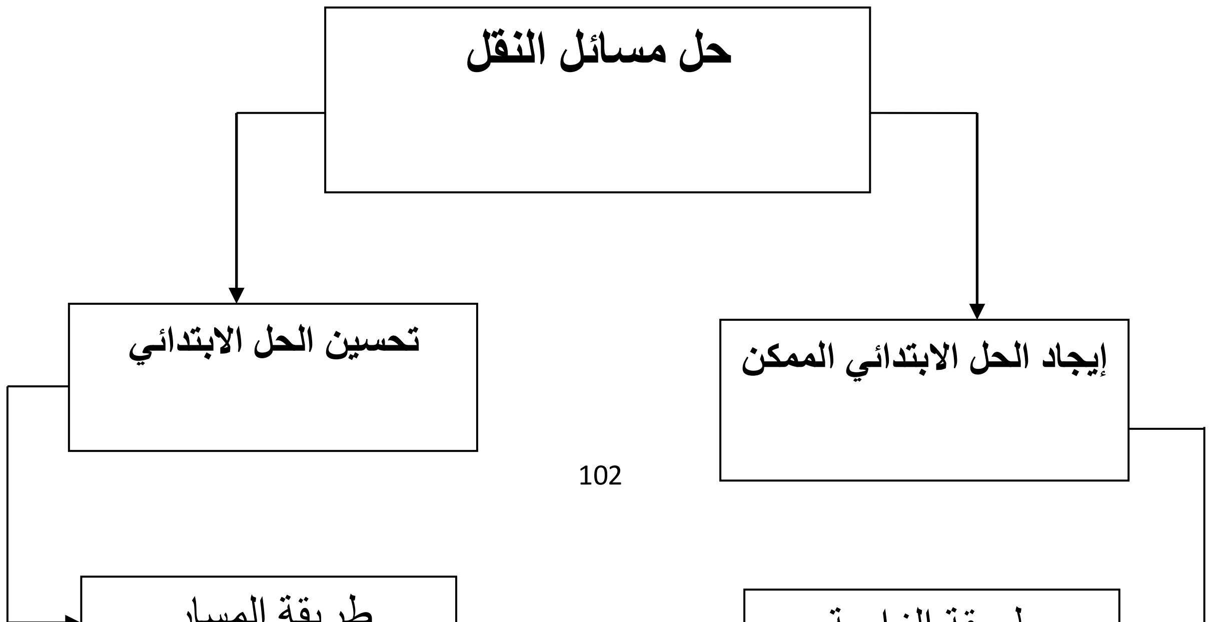
$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 13 - 10 - (0) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{24} = 3}$$

$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 15 - 14 - (-4) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{32} = 5}$$

$$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 19 - 10 - (-4) \Rightarrow \boldsymbol{C'_{34} = 13}$$

يتضح من أعلاه بأن جميع قيم التكاليف الجديدة موجبة، و عليه فقد تم التوصل إلى الحل الأمثل باستخدام طريقة عوامل الضرب، و بالتالي فإن التكاليف الكلية النهائية تساوي 3200، نجد أننا قد وفرنا 40 وحدة.

الشكل رقم(03): حل مسائل النقل



المصدر: بالاعتماد على المعلومات السابقة

3-2 تمارين مقترحة

3-2 تمارين مقترحة

التمرين01:الجدول أدناه يقدم معطيات لمسألة نقل ما.

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	4	5	6	7	**50**
O_2	4	9	3	2	**150**
O_3	6	5	2	3	**60**
O_4	8	1	2	4	**40**
b_i	**50**	**40**	**160**	**80**	300 / 330

المطلوب:**1-** أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكاليف الدنيا ثم طريقة فوجل التقريبية؛

2- أوجد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه باستخدام طريقة المسار المتعرج ثم طريقة عوامل الضرب.

التمرين02:

مؤسسة إنتاجية ما تزود 4 زبائن لها بالمنتج الذي يتم إنتاجه في 6 وحدات إنتاجية، الكميات القصوى من الإنتاج التي تستطيع الوحدات الإنتاجية توفيرها، الطلب الأقصى للزبائن و كذلك التكلفة الوحدوية للنقل يوضحها الجدول أدناه.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	**الطلب**
O_1	8	12	4	18	30	22	600
O_2	18	6	14	28	24	16	450
O_3	16	4	12	24	8	26	750
O_4	28	22	4	16	6	10	650
العرض	500	400	250	450	300	550	2450

المطلوب: إيجاد شبكة النقل الأرخص و التي تسمح للمؤسسة بنقل المنتج إلى زبائنها بأقل تكلفة ممكنة.

التمرين03

احد شركات تصنيع مكيفات الهواء لديها اربعة مواقع مختلفة لخزن الوحدات المنتجة، الوحدات المنتجة توزع على أربعة محلات بيع في أربعة مدن. جدول النقل التالي يبين المعروض من الوحدات المنتجة في كل موقع مخزن ، والكميات المطلوبة من تلك الوحدات المنتجة لكل محل من محلات البيع ، بالإضافة إلى كلفة نقل الوحدة الواحدة من الوحدات المنتجة.

محال البيع مواقع الخزن	D1	D2	D3	D4	D5	الكميات المعروضة Supply
S_1	7	6	4	5	9	40
S_2	8	6	5	7	8	30
S_3	6	8	9	6	5	20
S_4	5	7	7	8	6	10

الكميات المطلوبة **Demand**	30	30	15	20	5	100

المطلوب:

أوجد الحل لمشكلة النقل ؟

التمرين04:

استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لايجاد الحل الاساسي الاولي لمشكلة النقل المبينة بجدول النقل الاتي:

النهايات / الاصول	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	الكميات المعروضة **Supply**
S_1	11	12	16	12	13	750
S_2	3	14	5	8	11	650
S_3	13	10	11	12	6	200
S_4	14	7	13	5	14	400
الكميات المطلوبة **Demand**	350	150	600	400	500	

الخاتمة

شملت هذه المطبوعة مجموعة من المحاور تطرقت للبرمجة الخطية و أهم ما يتعلق بها، و رغم ما توفره من أساليب رياضية تهدف من خلالها إلى التوزيع الأمثل للموارد البشرية و المادية التي تتصف بالندرة و المحدودية، بهدف تحقيق أعظم عائد أو أدنى تكلفة ضمن برنامج رياضي المتكون من دالة الهدف و القيود، إلا إنها وجهت لها العديد من الانتقادات نذكر منها:

- يتعذر في بعض الأحيان استخدام أسلوب البرمجة الخطية، لأنه يتطلب أن تكون العلاقات خطية بين كافة عناصر المشكلة، بينما يلاحظ أن معظم العلاقات الموجودة في الحياة العملية علاقات غير خطية.

- يقوم نموذج البرمجة الخطية على فرض عامل التأكد ، و هو فرض صعب القبول في الحياة العملية ، لذا فقد أستخدم أسلوب تحليل الحساسية للتغلب على ظاهرة عدم التأكد

-يتطلب استخدام نموذج البرمجة الخطية الحصول على كمية ضخمة من المعلومات و التي قد يصعب الحصول عليها في الظروف العادية في الوحدات الصغيرة و المتوسطة.

من الرغم من الانتقادات التي وجهت لتقنية البرمجة الخطية إلا أنها تعتبر كأداة مساعدة للإدارة في اتخاذ القرارات الإدارية السليمة ، فقد ساعدت العديد من المشروعات في معالجة مشاكلها باستخدام الحاسبات الآلية ، الأمر الذي أدى إلى توسيع نطاق تطبيقها في الحياة العملية .

قائمة المراجع

قائمة المراجع

- أبو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، المجموعة العربية للتدريب و النشر، القاهرة، مصر، الطبعة الثانية، 2014.

- أحمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد الطيف محمد،الأساليب الكمية في الإدارة ، عمان ، دار المجدلاوي للنشر و التوزيع ، 1999.
- بوسهمين أحمد، طافر زهير، فعالية استخدام أسلوب البرمجة الخطية في مؤسسة الأعمال، ورقة بحثية مقدمة إلى الملتقى الوطني السادس حول الأساليب الكمية و دورها في اتخاذ القرارات الإدارية، يومي 23-24 نوفمبر 2008، جامعة 20 أوت 1955، سكيكدة.
- جلال إبراهيم العبد، استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، 2014.
- حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007.
- سالم إلياس،مطبوعة بعنوان: محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة محمد بوضياف، المسيلة، 2016-2017.
- سمير بباوي فهمي، بحوث العمليات في الإدارة و المحاسبة، القاهرة: المركز الدولي للعلوم الإدارية، م1977.
- سهيلة عبد الله سعيد، الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات، دار الحامد للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2007.
- صوار يوسف، طاوش قندوسي، محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B- كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر.
- عبد الرحمن بن محمد أبو عمه، محمد أحمد العش، البرمجة الخطية، مطبعة جامعة الملك سعود، الطبعة الأولى، المملكة العربية السعودية، 1990.
- عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية.

- عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)، دار القلم للنشر، الإمارات.
- علي حازم اليامور، استخدام نموذج البرمجة الخطية في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعظم الأرباح في ظل تطبيق نظرية القيود، ورقة بحثية مقدمة للمؤتمر العلمي الثاني للرياضيات، الإحصاء و المعلوماتية، 6-7 ديسمبر 2009، كلية علوم الحاسبات و الرياضيات، جامعة الموصل، العراق.
- فتيحة بلجيلالي ،مطبوعة بعنوان: مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة ابن خلدون، ملحقة قصر الشلالة ، تيارت2017-2018.
- محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2006.
- محمد عبد العال النعيمي و آخرون، بحوث العمليات، دار وائل للنشر،عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011.
- مصطفى أبو بكر، مصطفى مظهر، بحوث العمليات و فاعلية القرارات، مكتبة عين شمس، القاهرة، مصر، 1997.

- مكيد علي، بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية "نظرية الشبكات و مسائل النقل و التخصيص"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016.
- منعم زمزير الموسوي، بحوث العمليات-مدخل علمي لاتخاذ القرارات-، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2009.
- اليامين فالتة، بحوث العمليات، ايتراك للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر، 2006.

1-Gérald .Baillageon،Programmation Linéaire Appliquée Outil D'aide A La Décision،op . cit ،1996.

2-Yves Noobert .Roch Ouellet .Réges Parent ، La recherche opérationnelle ،gaitan morin éditeur 1995