الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
Ministry of Higher Education And Scientific Research
University Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة عبد الحميد بن باديس مستغانم
Faculty of Economic Sciences, Commerce and Management Sciences
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

Manuel de :

Micro-économie

(Consommateur et Producteur)

Résumés de cours
Et exercices avec solutions complètes

Dr. BENHAMOUDA Youcef
Maitre de conférences
Université Abdelhamid Ibn Badis
Mostaganem – Algérie

Faculté des sciences économiques,
Commerciales et des sciences de gestion
Université de Mostaganem

Manuel de :

Micro-économie

(Consommateur et Producteur)

Résumés de cours
Et exercices avec solutions complètes

Dr. BENHAMOUDA Youcef
Maitre de conférences
Université Abdelhamid Ibn Badis
Mostaganem – Algérie

Faculté des sciences économiques,
Commerciales et des sciences de gestion
Université de Mostaganem

05-2022
ISBN : 978-9931-9751-1-3

Avant propos

Ce manuel d'exercices corrigés de micro-économie est destiné aux étudiants des classes préparatoires, aux étudiants des sciences économiques et aussi aux élèves des écoles de commerce pour lesquels l'étude de l'analyse microéconomique se limite à une introduction aux phénomènes de consommation, de production et de formation des prix sur les différents types de marchés.
Deux parties sont ainsi développées : la théorie du comportement du consommateur, et la théorie du comportement du producteur. Au sein de chaque partie les séries d'exercices sont classées par thème. Au sein de chaque série d'exercices, les exercices sont classés par ordre croissant de difficulté.
Inspiré par des cours et des TD dispensé en classes préparatoires, ce manuel a donc pour objectif de présenter de façon claire et structurée les principes de l'analyse microéconomique conformément aux programmes des universités et des écoles de commerce, avec un recueil d'exercices d'application corrigés. Chaque série d'exercices est précédée d'un rappel de cour détaillé et simplifié, chaque idée est précédée dans le texte d'un tiret (-) pour faciliter aux étudiants la compréhension des différents concepts.

Sommaire

Théorie du comportement du consommateur

Introduction générale :

Introduction générale :

1. **Les néoclassiques et la naissance de la microéconomie.**
   - **Une analyse en termes d'utilité.**
   - **Une analyse marginaliste.**
2. **La démarche de la microéconomie.**
3. **Les hypothèses de la microéconomie.**
   - **La rationalité individuelle.**
   - **L'échange marchand.**

❖ Avant-propos :

- L'analyse économique se subdivise en deux grandes branches : l'analyse microéconomique et l'analyse macro-économique. Donc la micro-économie est une branche de la science économique qui se définit comme étant : « la science qui étudie comment les ressources rares sont employées pour la satisfaction des besoins des hommes ; elle s'intéresse d'une part, aux opérations essentielles que sont la production, la distribution et la consommation de biens, d'autre part, aux institutions et aux activités ayant pour objet de faciliter des opérations ».
- A partir de cette définition, il ressort que les ressources sont rares mais les fins et les besoins des individus multiples. Dans ces conditions des choix s'imposent. C'est ce qui intéresse particulièrement la microéconomie qui étudie les comportements individuels des différents agents économiques (consommateurs, producteurs) concernant la demande et l'offre ainsi que leur interaction sur les marchés pour expliquer la formation des prix.
- Les origines de cette analyse se situent dans les travaux de W.S.JEVONS (Théorie de l'économie politique, 1871), C.MENGER (Fondements de l'économie politique), et L.WALRAS (Eléments d'économie pure, 1874) qui marquent la naissance du courant de pensée néoclassique à la fin du 18ème siècle.

1. Les néoclassiques et la naissance de la micro-économie :

❖ Une analyse en termes d'utilité :

- Les économistes classiques comme D.RICARDO (1772-1823), raisonnaient en termes de valeur-travail et considéraient que la valeur des biens était fonction d'un élément objectif qui est la quantité du travail nécessaire à leur production.
- Les néoclassique rompent avec l'approche classique traditionnelle et fondent définitivement leur analyse de la valeur des biens sur la notion d'utilité.
- La valeur des biens est liée au fait que les individus les perçoivent comme étant utiles pour satisfaire leurs besoins.
- Donc la valeur d'un bien dépend du degré de satisfaction obtenu en consommant ce biens, autrement dit son utilité. L'utilité est définit par W.S.JEVONS comme la capacité qu'a un bien a augmenter le plaisir ou a réduire le déplaisir d'un individu.
- Selon JEVONS et MENGER l'utilité est mesurable et peut être évaluée à l'aide d'un indicateur précis et quantifiée ce raisonnement rentre dans ce qu'on appel « l'utilité cardinale ».
- Ce raisonnement est critiqué par V.PARETO (1848-1923) puis par E.SLUTSKY (1880-1943), J.HICKS (1904-1989) et P.A.SAMUELSON (1915-2009) qui proposent le raisonnement de « l'utilité ordinale » et ils indiquent que le consommateur peut établir un simple ordre de préférence entre les différents biens.

❖ Une analyse marginaliste :

- Selon l'école néoclassique le raisonnement ne se fait plus sur les quantités globales de biens mais sur des quantités additionnelles et plus précisément sur la dernière unité. Ce raisonnement dit à la marge a une idée générale très simple et cependant très importante : pour toute décision, il est inutile de s'appesantir sur les erreurs passées, il suffit d'envisager les conséquences futures des décisions ou des non-décisions que l'on va prendre aujourd'hui et plus tard. Ex : les conséquences d'un accroissement de la production sur les coûts (coût marginale).

2. La démarche de la microéconomie :

- La microéconomie s'intéresse aux décisions prises par les agents à un niveau individuel. Elle commence par s'intéresser à un agent type (le consommateur, le producteur) représentatif des autres et isolé et en définit le comportement. Elle en déduit ensuite les

comportements de l'ensemble des agents (la demande globale des consommateurs, l'offre globale des producteurs), ceux-ci résultant de l'agrégation des comportements individuels. Ces comportements agrégés permettant alors d'analyser le fonctionnement d'un marché.
- C'est donc en suivant la méthode de l'individualisme méthodologique que la microéconomie définit les grandeurs à un niveau global.

3. Les hypothèses de la microéconomie :

Le raisonnement microéconomique repose sur deux hypothèses fondamentales : la rationalité individuelle et l'échange marchand.

❖ La rationalité individuelle :
- Les agents économiques ssont supposés rechercher la réalisation d'un objectif en tenant en compte des contraintes qu'ils subissent et connaissent. Cet objectif unique est défini pour un agent type et guide son comportement.
- Ainsi, le consommateur rationnel a pour objectif de maximiser l'utilité que lui procure la consommation de biens sous la contrainte de son revenu.
- Quand au producteur rationnel, il cherche à maximiser son profit sous la contrainte des techniques de production disponibles.
- L'agent rationnel de la théorie microéconomique est finalement un agent maximisateur sous contrainte. Le comportement de cet agent peut donc être formalisé puisqu'il renvoie à un problème mathématique d'optimisation d'une fonction.

❖ L'échange marchand :
- Cette hypothèse conduit à mettre le marché au centre de l'analyse microéconomique. C'est en effet l'échange marchand qui permet aux agents d'atteindre leurs objectifs et de coordonner leurs décisions individuelles.
- Puisque le marché permet la confrontation entre les offres et les demandes pour un type de biens ou de services, il peut être défini comme le mécanisme qui organise l'échange de biens ou de services entre les agents (offreurs et demandeurs) et conduit à la détermination d'un prix.
- Donc la microéconomie enveloppe trois grands chapitres :

✓ ***La théorie du comportement du consommateur.***
✓ ***La théorie du comportement du producteur.***
✓ ***Les marchés.***

La théorie du comportement du consommateur :

Le programme de « la théorie du comportement du consommateur » :
- Définition de l'utilité
- L'évaluation de l'utilité
- La rationalité du consommateur
- La fonction d'utilité
- L'utilité totale et l'utilité marginale des biens
- Les courbes d'indifférence et le TMS
- La maximisation de l'utilité
- La variation de l'environnement du consommateur
- La demande du consommateur
- La demande totale du marché
- L'élasticité de la demande
- L'effet de substitution et l'effet de revenu.

Série d'exercices N° 01 :
(La rationalité du consommateur et la fonction d'utilité)

Exercice 01 :

Le tableau ci-dessous exprime le niveau d'utilité total d'un consommateur en fonction de la quantité qu'il consomme d'un bien donné A :

Q_A	UT
1	**10**
2	**19**
3	**27**
4	**34**
5	**40**
6	**45**
7	**49**
8	**52**
9	**54**
10	**55**
11	**55**
12	**52**

1. Calculer l'utilité marginale du bien A.
2. Tracez la courbe d'utilité totale et d'utilité marginale, expliquez les deux courbes.

Exercice 02 :

Soient les deux biens X et Y avec la fonction d'utilité suivante :

$$\boldsymbol{U(x,y) = x^2 y}$$

1. Calculer les utilités marginales des deux biens.
2. Etudier les fonctions d'utilités marginales des deux biens.
3. Mêmes questions pour les fonctions d'utilités suivantes :

$$\boldsymbol{U(x,y) = x^{1/2} y^{1/2}}$$
$$\boldsymbol{U(x,y) = x(y+2)}$$

Exercice 03 :

On demande à un individu de classer par ordre de préférence des « complexes[1] » de biens de consommation. Les réponses fournies sont les suivantes :[2]

$$A \sim B \sim K \quad C \sim M \sim N \quad L \sim K \quad H \sim I \sim S \quad F \sim G \sim E$$
$$D \sim O \sim M \quad P \sim G \sim Q \quad J \sim R \sim S$$
$$C \succ B \quad Q \succ S \quad S \succ M \quad O \succ L$$

1. Définir les groupes ou ensembles de complexes qui forment une courbe d'indifférence.
2. Etablir l'ordre qui existe entre les différentes courbes ainsi déterminées.
3. On suppose que chaque complexe se compose de deux bien X et Y.La quantité de chaque bien intervenant dans un complexe est donnée au tableau 1.

complexes	Quantité X	Quantité Y
A	**2**	**12**
B	**3**	**4**
C	**7**	**3**
D	**3**	**14**
E	**12**	**4**
F	**10**	**5**
G	**7**	**8**
H	**4**	**15**
I	**4**	**10**
J	**7**	**4**
K	**6**	**2**
L	**12**	**1**
M	**5**	**4**
N	**12**	**2**
O	**4**	**6**
P	**6**	**12**
Q	**8**	**6**
R	**14**	**3**
S	**5**	**6**

[1]On entend par « complexe » l'ensemble formé par différentes quantités de biens. Chaque complexe est noté ici par une lettre majuscule.

[2] Le signe (∼) marque l'indifférence du consommateur en face des complexes situés à droite ou à gauche de ce signe. Le signe(≻) marque la préférence du consommateur pour le complexe situé à gauche du signe sur le complexe situé à droite.

- Etablir la représentation graphique des courbes d'indifférence.
- Quelles sont les remarques qui peuvent être faites sur la forme de ces courbes et sur leurs positions respectives.
- Calculer le TMS sur la courbe U_2.

Exercice 04 :

Un consommateur rationnel détient un budget $R = 16$ qu'il dépense pour l'acquisition de deux biens X et Y à des prix respectifs $P_X = P_Y = 1$. le tableau suivant indique l'évolution de l'utilité marginale pour les deux biens :

quantités	$\boldsymbol{Umg_X}$	$\boldsymbol{Umg_Y}$
0	**/**	**/**
1	**11**	**19**
2	**10**	**17**
3	**9**	**15**
4	**8**	**13**
5	**7**	**12**
6	**6**	**10**
7	**5**	**8**
8	**4**	**6**
9	**3**	**5**
10	**2**	**4**

1. Déduire les valeurs des utilités totales des différentes quantités de X et de Y.
2. Exprimer la condition de maximisation de l'utilité et expliciter la contrainte budgétaire.
3. Indiquer la manière dont ce consommateur réparti son revenu pour atteindre la satisfaction maximale et en donner la valeur. Montrer que toute autre dépense du revenu donne une utilité plus faible.

Rappel du cour « l'utilité »

- ***Définition de l'utilité.***
- ***L'évaluation de l'utilité.***
  - *L'utilité cardinale.*
  - *L'utilité ordinale.*
- ***La rationalité du consommateur.***
  - *Axiome de non-saturation.*
  - *Axiome de préférence.*
  - *Axiome de transitivité.*
- ***La fonction d'utilité.***
  - *L'utilité totale.*
  - *L'utilité marginale.*

1. Définition de l'utilité :

- L'école néoclassique suppose que le consommateur cherche à maximiser son « utilité » à partir des ressources (revenu) dont il dispose, mais qu'est ce que l'utilité ? Comment est-elle mesurée ?
- L'utilité est une mesure de bien être que peut tirer le consommateur de l'achat des différents produits (biens), donc l'utilité est représentée par la capacité à satisfaire un besoin.
- L'étude du comportement du consommateur suppose que ce dernier effectue un choix entre les différents biens de telle sorte que son utilité soit maximum.
- Cette supposition recouvre deux hypothèses :
  - Le consommateur doit être capable d'évaluer l'utilité des biens.
  - Il doit en outre être rationnel.

2. L'évaluation de l'utilité :

- ***L'utilité cardinale :*** Les économistes de la fin du XIX^{ème} siècle (Marshall, Walras, Gevons) admettaient que l'utilité des biens était mesurable (l'utilité cardinale), ils supposaient que le consommateur était capable d'exprimer par un nombre de degré l'utilité qu'il attribuait à chaque bien ou à chaque combinaisons de biens.
- ***L'utilité ordinale :*** le raisonnement de l'utilité cardinale est très éloignée de la réalité, c'est la raison pour laquelle les auteurs modernes (Pareto, Edgeworth, Samuelson, Hicks) admettent que le consommateur peut établir un simple ordre de préférence entres les biens ou les combinaisons de biens (l'utilité ordinale).

3. La rationalité du consommateur :

- Si le consommateur retire plus d'utilité d'un bien (combinaison de biens) X que d'un bien Y, on dit qu'il préfère X à Y.
- Le postulat de rationalité sur lequel repose l'analyse du comportement du consommateur a la triple signification suivante (les axiomes) :
  - ✓ Etant donnés deux biens X et Y, les besoins satisfaits par ces deux biens ne sont pas saturés. Le consommateur acceptera donc d'avoir plus de X et plus de Y. (***Axiome de non-saturation***).
  - ✓ Pour tous les couples possibles d'alternatives X et Y le consommateur sait s'il préfère X à Y ou Y à X ou s'il n'a pas de préférence. Une seule de ces trois possibilité est vraie pour chaque couple d'alternatives. (***Axiome de préférence***).
  - ✓ Si le consommateur préfère X à Y et Y à Z, il préfèrera X à Z. (***Axiome de transitivité***).

- Autrement dit, les préférences du consommateur sont logiques et transitives.

4. La fonction d'utilité :

- L'ensemble des informations relatives à la satisfaction que le consommateur retire de différentes quantités de bien sont contenus dans sa « fonction d'utilité ». cette fonction est l'expression mathématique de l'ordre de préférence dans lequel il classe les biens.
- Le consommateur rationnel qui veut obtenir le maximum de satisfaction doit résoudre le problème de la maximisation de sa fonction d'utilité.
- La résolution de ce problème permet de déterminer la demande.
- Considérons un consommateur dont les achats portent sur plusieurs produits X, Y et Z…. La satisfaction éprouvée par ce consommateur dépend des quantités x, y et z dont il peut disposer, autrement dit l'utilité qu'il obtient U est fonction des quantités consommées des produits considérés, elle peut s'écrire :

$$U = f(x, y, z)$$

x, y, z : les quantités des biens X, Y et Z.

- Cette fonction est la fonction d'utilité d'un consommateur, elle présente les caractéristiques suivantes :
  - ✓ Elle est supposé traduire la satisfaction de l'individu suivant les combinaisons variables des quantités de X, Y et de Z.
  - ✓ Elle est définie pour une période de temps unique (analyse statique).
  - ✓ Elle est considérée comme une fonction continue.

➢ ***L'utilité totale :***

- Supposons que les achats d'un consommateur se limitent à un seul produit X la fonction d'utilité s'écrit : $U = f(x)$ cette fonction exprime l'utilité totale.
- Lorsque la quantité consommée du bien X augmente, l'utilité totale s'accroit également mais d'une manière non proportionnelle. Elle augmente à taux décroissant.
- Lorsque la quantité consommée atteint le point de satiété (الإشباع) l'utilité totale atteint un maximum. Tout accroissement procure plus d'inconvénients que d'avantage.

➢ ***L'utilité marginale :***

- L'utilité marginale d'un bien est définie comme étant l'accroissement de l'utilité résultant de l'augmentation d'une unité de la consommation de ce bien.
- L'utilité totale atteint son maximum lorsque l'utilité marginale est nulle.
- Lorsque la fonction d'utilité est continue on peut utiliser l'outil mathématique pour définir et calculer l'utilité marginale.

Δx: accroissement de la consommation du bien X.

ΔU: augmentation correspondante de l'utilité totale.

L'utilité marginale est :

$$\boldsymbol{Umg_X = U'_X = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\delta U}{\delta x}}$$

Dans le cas d'un tableau (fonction d'utilité discontinue) :

$$\boldsymbol{Umg_X = \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{(U_2 - U_1)}{(x_2 - x_1)}}$$

- Lorsque la fonction d'utilité est une fonction à plusieurs variables, l'utilité marginale est calculée par les dérivées partielles :

$$\boldsymbol{U = f(x, y)}$$

$$\boldsymbol{U'_x = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\delta U}{\delta x}}$$

$$\boldsymbol{U'_y = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta y} = \frac{\delta U}{\delta y}}$$

Exercice 01 :

1. ***Calculer l'utilité marginale du bien A :***

Quantité	UT	Umg_A
0	**0**	/
1	**10**	$\frac{(10-0)}{(1-0)} = 10$
2	**19**	$\frac{(19-10)}{(2-1)} = 9$
3	**27**	$\frac{(27-19)}{(3-2)} = 8$
4	**34**	**7**
5	**40**	**6**
6	**45**	**5**
7	**49**	**4**
8	**52**	**3**
9	**54**	**2**
10	**55**	**1**
11	**55**	**0**
12	**52**	-3

$$\boldsymbol{Umg_A = \frac{\Delta UT}{\Delta a} = \frac{UT_2 - UT_1}{a_2 - a_1}}$$

2. ***Tracer les courbes de UT_A et de Umg_A :***

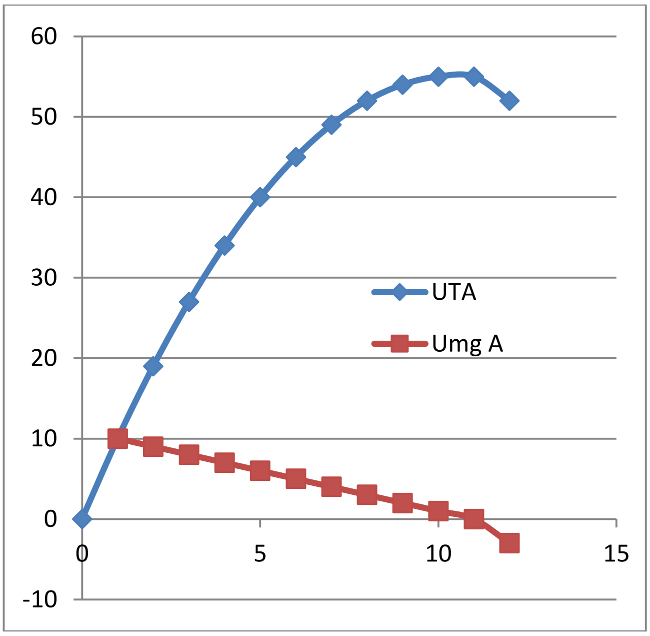


Fig : courbes de UT_A et de Umg_A

- ***Explication et commentaire :***

- Lorsque la quantité consommée du bien A augmente l'utilité totale augmente.
- L'utilité totale augmente à un taux décroissant.
- Lorsque la quantité consommée atteint le point de satiété $Q = 15$ $(Umg_A = 0)$ l'utilité totale atteint son maximum et tout accroissement de la quantité procure plus d'inconvénients que d'avantages.
- L'utilité marginale d'un bien est définie comme étant l'accroissement de l'utilité résultant de l'augmentation d'une unité de la consommation de ce bien.
- L'utilité marginale est une fonction décroissante des quantités, donc l'accroissement de l'utilité totale est de plus en plus faible.
- L'utilité totale atteint son maximum lorsque l'utilité marginale est nulle.
- Si Umg_A prenait une valeur négative l'utilité diminuerait.

Remarque :

- UT procurée par un bien est celle que retire l'individu du choix d'une certaine quantité de ce bien.
- UT varie en fonction de la quantité qui est choisie, elle est définie pour une quantité fixée des autres biens entrants dans la fonction d'utilité.

Exercice 02 :

1. ***Calculer les utilités marginales des deux biens :***

$$U(x,y) = x^2y$$

- L'utilité marginale du bien X :

$$\boldsymbol{Umg_X = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\delta U}{\delta x} = 2xy_0}$$

$\boldsymbol{(y_0 \ pcq \ y = constant)}$

- L'utilité marginale du bien X :

$$\boldsymbol{Umg_Y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta y} = \frac{\delta U}{\delta y} = x_0^2}$$

2. ***L'étude des fonctions d'utilités marginales :***

Pour étudier cette fonction on doit calculer
1ère dérivé (positive ⇒ croissante, négative⇒ décroissante)
2ème dérivé (positive ⇒ convexe, négative⇒ concave)

- ***Etudier*** $\boldsymbol{Umg_X = 2xy_0}$

1ère dérivé :

$(\boldsymbol{Umg_X})' = \frac{\boldsymbol{\delta Umg_X}}{\boldsymbol{\delta x}} = \boldsymbol{2y_0} \ \ /\boldsymbol{y_0} > 0$ quantité

$(\boldsymbol{Umg_X})' > 0$ ***donc*** $\boldsymbol{Umg_X}$ ***est une fonction croissante***

2ème dérivé :

$$(\boldsymbol{Umg_X})'' = \frac{\boldsymbol{\delta_2 Umg_X}}{\boldsymbol{\delta_2 x}} = \boldsymbol{0}$$

Donc $\boldsymbol{Umg_X}$ ***est une fonction linéaire (la courbe est sous forme de droite)***

Étudier $\boldsymbol{Umg_Y = x_0^2}$

1ère dérivé :

$$(\boldsymbol{Umg_Y})' = \frac{\boldsymbol{\delta Umg_Y}}{\boldsymbol{\delta y}} = \boldsymbol{0}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{Umg_Y}$ **est une droite parallèle à l'axe des abscisses d'ordonné** $\boldsymbol{x_0^2}$ **.**

Dans ce cas on ne peut pas considérer la fonction $U(x,y) = x^2y$ comme une fonction d'utilité totale, parce que l'utilité marginale doit être décroissante et convexe par rapport à l'origine.

3. ***Mêmes questions pour*** $\boldsymbol{U(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}}$

$$\boldsymbol{Umg_X = \frac{1}{2}x^{-1/2}y_0^{1/2} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}$$

$$\boldsymbol{Umg_Y = \frac{1}{2}x_0^{1/2}y^{1/2} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}}$$

Etudions $\boldsymbol{Umg_X}$ ***:***

$(\boldsymbol{Umg_X})' = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}x^{-3/2}y^{1/2} < 0 \Rightarrow \boldsymbol{Umg_X}$ ***est une fonction décroissante et la courbe est décroissante.***

$(\boldsymbol{Umg_X})'' = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{8}}x^{-5/2}y^{1/2} > 0 \Rightarrow$ ***la courbe est convexe.***

Etudions $\boldsymbol{Umg_Y}$ ***:***

$(\boldsymbol{Umg_Y})' = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}x^{1/2}y^{-3/2} < 0 \Rightarrow \boldsymbol{Umg_X}$ ***Est une fonction décroissante et la courbe est décroissante.***

$(\boldsymbol{Umg_Y})'' = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{8}}x^{1/2}y^{-5/2} > 0 \Rightarrow$ ***la courbe est convexe.***

Dans ce cas on peut considérer la fonction $U(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$ comme une fonction d'utilité totale.

Memes questions pour $\boldsymbol{U(x,y) = x\,(y+2)}$

$\boldsymbol{Umg_X = y + 2}$

$\boldsymbol{Umg_Y = x}$

Etudions $\boldsymbol{Umg_X}$ **:**

$(\boldsymbol{Umg_X})' = \boldsymbol{0} \ \ \Rightarrow \boldsymbol{Umg_X}$ **est une droite parallèle à l'axe des abscisses d'ordonné** $\boldsymbol{y_0 + 2}$ **.**

Etudions $\boldsymbol{Umg_X}$ **:**

$(\boldsymbol{Umg_Y})' = \boldsymbol{0} \ \ \Rightarrow \boldsymbol{Umg_Y}$ **est une droite parallèle à l'axe des abscisses d'ordonné** $\boldsymbol{X_0}$**.**

Dans ce cas on ne peut pas considérer la fonction $U(x,y) = x\,(y+2)$ comme une fonction d'utilité totale, parce que l'utilité marginale doit etre décroissante et convexe par rapport à l'origine.

Rappel du cour :

- ❖ ***Les courbes d'indifférence***
  - ***Définition.***
  - ***Caractéristiques.***
  - ***Courbes d'indifférence particulières***
- ❖ ***Le taux marginal de substitution.***

❖ *Les courbes d'indifférence :*

- Considérons une fonction d'utilité de la forme : $U = f(x, y)$.
- Un niveau donné de satisfaction (U_0) peut etre obtenu de différentes combinaisons des deux produits X et Y.
- Il y a un nombre infini de combinaisons puisque, par hypothèse, la fonction d'utilité est continue.

1. *Définition :*

Une courbe d'indifférence est le lieu de toutes les combinaisons de produits qui procurent un meme niveau de satisfaction.

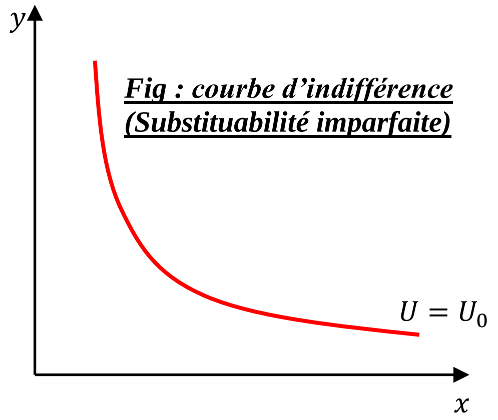


Fig : courbe d'indifférence (Substituabilité imparfaite)

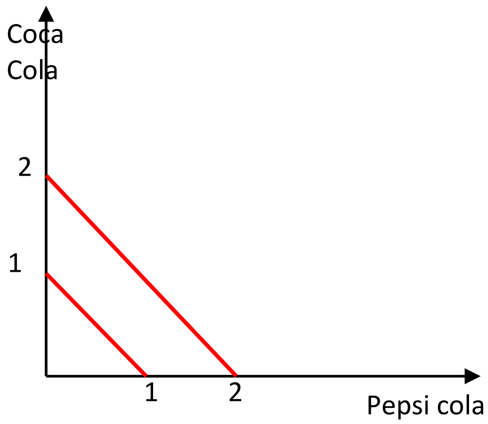
2. *Caractéristiques des courbes d'indifférence :*

- ✓ Le déplacement du consommateur sur la même courbe d'indifférence ne change pas le niveau de satisfaction.
- ✓ Une série de courbes d'indifférences correspondant à différents niveaux de satisfaction constituent une carte d'indifférence.
- ✓ Le niveau de satisfaction est d'autant plus élevé lorsqu'on se dirige vers le nord-est. (lorsque l'on s'éloigne du point d'origine).
- ✓ Une courbe d'indifférence a une pente négative, si la quantité de Y diminue la quantité de X doit augmenter pour rester sur le meme niveau de satisfaction.
- ✓ Deux courbes d'indifférences ne peuvent pas se couper, dans le cas contraire ceci signifie que le point d'intersection représente deux niveaux de satisfaction différents et ceci n'est pas possible.
- ✓ Les courbes d'indifférence sont convexes vers le point d'origine.

3. *Courbes d'indifférence particulières :*

A. *Le cas de biens parfaitement substituables :*

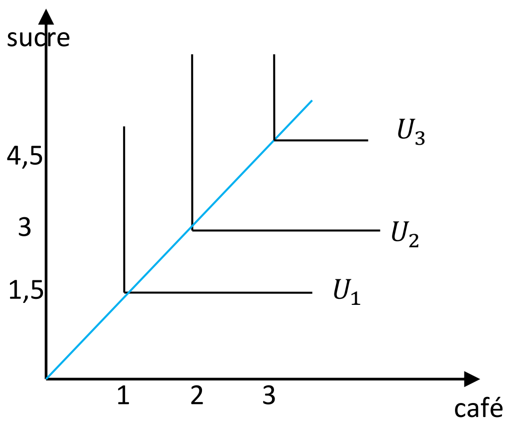
Lorsque le consommateur est prêt à échanger un bien (le Coca Cola) contre un autre (le Pepsi Cola) à un taux constant (1 contre 1) sans que cela modifie son utilité, on dit que les biens sont parfaitement substituables et les courbes d'indifférence sont linéaires et décroissantes.



B. *Le cas de biens parfaitement complémentaire :*

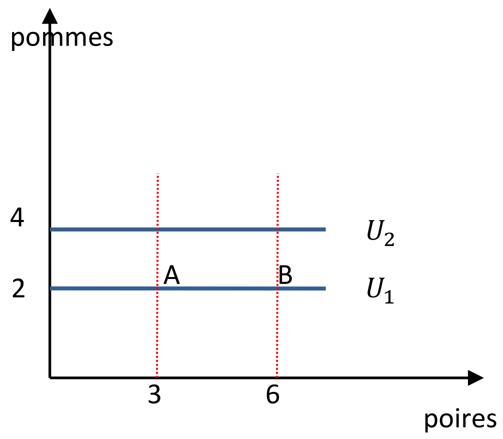
Supposons un consommateur qui aime boire son café avec un sucre et demi.

Son utilité n'augmente que s'il accroit simultanément sa consommation de café et de sucre et dans cette proportion fixe (ex : 2 cafés et 3 sucres, 3 cafés et 4,5 sucres).



C. Le cas d'un bien neutre :

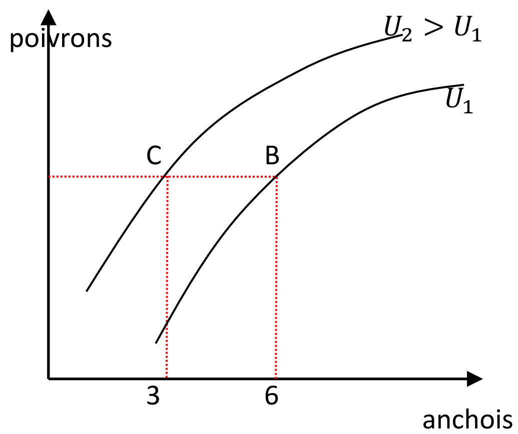
Un bien neutre est un bien dont la consommation n'a pas d'effets sur l'utilité du consommateur.



D. Le cas d'un bien indésirable :

- Les paniers A et B sont équivalents pour le consommateur mais celui-ci n'accepte le panier B qui contient plus d'anchois (bien indésirable qu'il n'aime pas) qu'en échange de plus de poivrons (bien désirable).

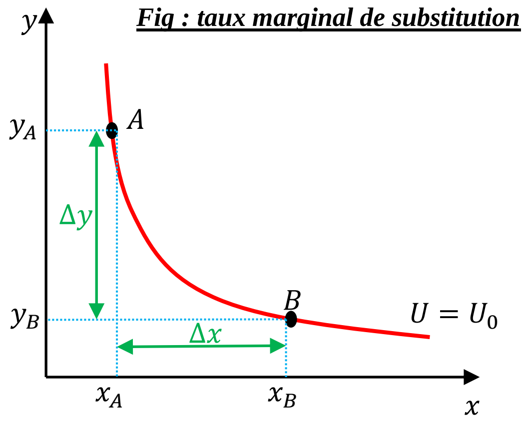
Les courbes d'indifférence sont donc décroissantes. De plus le panier C est préféré à B car il permet au consommateur d'atteindre un niveau d'utilité U_2 supérieur au niveau initial U_1 pour la même quantité de poivrons mais une quantité plus faible d'anchois. L'hypothèse de non-saturation des préférences est donc renversée.



❖ **Le taux marginal de substitution entre produits (TMS) :**

- Le taux marginal de substitution (TMS) entre les deux biens X et Y est le nombre d'unités y auxquelles renonce le consommateur pour obtenir une unité supplémentaire de X tout en restant au même niveau de satisfaction.

Fig : taux marginal de substitution



- Le TMS entre les deux points A et B est :

$$TMS = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Le TMS peut etre calculé autrement (le TMS en un point de la courbe d'indifférence c'est-à-dire lorsque $\Delta x \to 0$)
- Soit la fonction d'utilité suivante :

$$U = f(x, y)$$

- Supposons que les quantités consommées x et y varient, cette modification de consommation entraine normalement une variation de l'utilité totale.
- La modification de l'utilité totale provoquée par les variations de x et de y est égale à la somme des deux produits :
  - ✓ Le produit de variation de x par la modification de l'utilité résultante de la variation d'une unité de$X$.($\frac{\delta U}{\delta x} \cdot dx$)
  - ✓ Le produit de la variation de y par la modification d'utilité résultante de la variation d'une unité de Y. ($\frac{\delta U}{\delta y} \cdot dy$).
- Utilisant une notation différentielle :

dU : la modification de l'utilité totale.

dx : la variation de la quantité consommée du bien X.

dy : la variation de la quantité consommée du bien Y.

$\frac{dU}{dx}$: l'utilité marginale du bien X.

$\frac{dU}{dy}$: l'utilité marginale du bien Y.

Donc :

$$dU = \frac{\delta U}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta U}{\delta y} \cdot dy$$

$/ \frac{\delta U}{\delta x} = Umg_X$, $\frac{\delta U}{\delta y} = Umg_Y$

- Puisque le consommateur reste sur la même courbe d'indifférence $dU = 0$. Donc :

$$Umg_X \cdot dx + Umg_Y \cdot dy = 0$$

$$Umg_X \cdot dx = -Umg_Y \cdot dy$$

$$\Rightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{Umg_X}{Umg_Y} = TMS$$

Remarque :

- *Donc le TMS en un point de la courbe d'indifférence est la pente de la courbe en ce point* $-\frac{dy}{dx} = \frac{Umg_X}{Umg_Y}$ *affecté du signe* $(-)$.
- *Puisque la courbe d'indifférence est décroissante donc la pente* $\frac{dy}{dx}$ *est une valeur négative.*
- *Par définition on prend :*
  le $TMS = \frac{dy}{dx} = \frac{Umg_X}{Umg_Y}$ *donc on va trouver une valeur positive mais elle signifie une diminution de la quantité de y pour avoir une unité supplémentaire du bien* X.

Exercice 03 :

1. *Définir les groupes de complexes qui forment une courbe d'indifférence :*

- La courbe d'indifférence est par définition l'ensemble formé par les complexes de biens qui procurent une satisfaction identique à l'individu.
- A partir des informations fournies dans l'énoncé de l'exercice on peut distinguer quatre ensembles répondants à cette définition :

$\begin{cases} A \sim B \sim K \\ L \sim K \end{cases}$ $A \sim B \sim L \sim K$ cet ensemble forme une courbe d'indifférence.
On appelle cet ensemble E_1.

$\begin{cases} C \sim M \sim N \\ D \sim O \sim M \end{cases}$ $C \sim M \sim N \sim D \sim O$ cet ensemble forme une courbe d'indifférence.
On appelle cet ensemble E_2.

$\begin{cases} H \sim I \sim S \\ J \sim R \sim S \end{cases}$ $H \sim I \sim S \sim J \sim R$ cet ensemble forme une courbe d'indifférence.
On appelle cet ensemble E_3.

$\begin{cases} F \sim G \sim E \\ P \sim G \sim Q \end{cases}$ $F \sim G \sim E \sim P \sim Q$ cet ensemble forme une courbe d'indifférence.
On appelle cet ensemble E_4.

(axiome de transitivité
$A \sim B$ et $B \sim C \Rightarrow A \sim C$)
Donc il y a 4 courbes d'indifférence.

2. *Etablir l'ordre qui existe entre les différentes courbes ainsi déterminées :*

Quatre informations sont disponibles pour classer les ensembles :

- $C \succ B \rightarrow C \in E_2, B \in E_1, donc\ E_2 \succ E_1$
- $Q \succ S \rightarrow Q \in E_4, S \in E_3, donc\ E_4 \succ E_3$
- $S \succ M \rightarrow S \in E_3, M \in E_2, donc\ E_3 \succ E_2$
- $O \succ L \rightarrow O \in E_2, L \in E_1, donc\ E_2 \succ E_1$

$$Donc\ E_4 \succ E_3 \succ E_2 \succ E_1$$

On peut dire que l'ensemble E_4 donne la plus grande satisfaction et l'ensemble E_1 donne la plus petite satisfaction.
E_1 représente U_1 , E_2 représente U_2, E_3 représente U_3 , E_4 représente U_4 .

3. *La représentation graphique :*

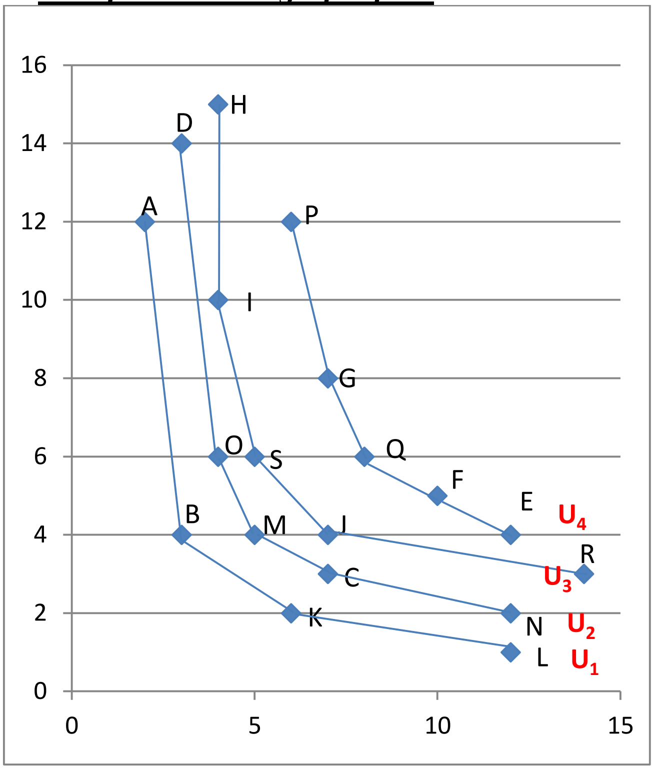


Fig : une carte d'indifférence

- Les remarques sur la forme des courbes :
  - Les courbes d'indifférence sont décroissantes.
  - Les courbes d'indifférence sont convexes par rapport à l'origine (0,0).
  - Les courbes d'indifférence ne peuvent pas se croiser.
  - Le niveau de satisfaction est d'autant plus élevé lorsqu'on se dirige vers le nord-est (lorsqu'on s'éloigne du point d'origine).
- Calculer le TMS sur la courbe U_2 :

complexes	x	y	TMS
D	**3**	**14**	
			$-\frac{(6-14)}{(4-3)} = 8$
O	**4**	**6**	
			2
M	**5**	**4**	
			$^1/_2$
C	**7**	**3**	
			$^1/_5$
N	**12**	**2**	

Remarque :
Les courbes d'indifférence sont convexes car plus un bien est consommé, moins le consommateur est prêt à abandonner de l'autre bien pour consommer plus du premier (conséquence directe de l'utilité marginale décroissante).

Rappel de cour :

❖ *La maximisation de l'utilité :*

- Le consommateur rationnel de l'analyse économique désire se procurer des quantités x et y telles qu'il puisse obtenir la plus grande satisfaction possible.
- Le problème qu'il doit résoudre est celui de la maximisation de sa fonction d'utilité.
- Ce consommateur ne pourtant pas acheter n'importe quelle quantité de X et de Y car son revenu est limité.
- Soit R le revenu du consommateur, P_X prix du bien X, P_Y prix du bien Y. Ce revenu et ces prix sont supposés s'établir sur des marchés sur lesquels l'individu considéré ne peut exercer aucune influence autrement dit R, P_X et P_Y sont des constantes données.
- Supposons aussi que notre consommateur dépense la totalité de son revenu, au cours de la période considéré, pour acheter certaines quantités de X et de Y donc $\boldsymbol{R = xP_X + y\,P_Y}$.
- Cette équation est appelée « ***équation du budget*** » ou « ***équation de prix*** ».
- Le problème posé devient alors un problème de maximisation de la fonction d'utilité $U = f(x,y)$ sous contrainte $R = xP_X + y\,P_Y$.
- Donc le consommateur doit trouver une combinaison de x et de y qui maximise son utilité et satisfasse en même temps l'équation du budget.

$$\begin{cases} \boldsymbol{MaxU = f(x,y)} \\ \boldsymbol{{}^{s}/_{c}\ R = xP_X + y\,P_Y} \end{cases}$$

❖ *Conditions de maximisation de l'utilité :*

- ✓ Détermination du maximum d'utilité par la méthode mathématique.
- ✓ Détermination du maximum d'utilité par le recours au multiplicateur de Lagrange.
- ✓ La détermination géométrique de l'optimum du consommateur.

1. *Détermination du maximum d'utilité par la méthode mathématique :*

- De l'équation de budget : $R = xP_X + y\,P_Y$ on peut tirer la valeur de y comme une fonction de x.

$$y = \frac{R - xP_X}{P_Y} \Rightarrow U = f(x,y) = f(x, \frac{R - xP_X}{P_Y})$$

La fonction d'utilité U devient une fonction à une seule variable (x) qu'on peut maximiser par rapport à x.

- $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0$ $(maximum)$
- $f'(x) = 0$ et $f''(x) > 0$ $(minimum)$

2. *Détermination du maximum d'utilité par le recours au multiplicateur de Lagrange :*

- Soit la fonction de deux variables $f(x,y)$
- Cette fonction doit avoir un maximum respectant la condition $g(x,y) = 0$ $(fonction\ implicite)$

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

λ est appelé le multiplicateur de Lagrange.

- Une condition nécessaire pour que cette nouvelle fonction ait un maximum est que les dérivées partielles par rapport à $x, y\ et\ \lambda$ s'annulent en même temps en obtenant ainsi 3 équations à résoudre et en obtenant aussi les valeurs de $x, y\ et\ \lambda$.
- Donc en général :

Le Lagrangien s'écrit :

$$L(x,y,\lambda) = U(x,y) + \lambda(R - xP_X - y\,P_Y)$$

➢ ***La première condition (condition nécessaire) :***

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x} = \dfrac{\delta U}{\delta x} - \lambda P_X = 0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta y} = \dfrac{\delta U}{\delta y} - \lambda P_y = 0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda} = R - xP_X - y\,P_Y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Umg_X = \lambda P_X \Rightarrow \lambda = \dfrac{Umg_X}{P_X} \\ Umg_y = \lambda P_y \Rightarrow \lambda = \dfrac{Umg_y}{P_y} \\ R = xP_X + y\,P_Y \end{cases}$$

Donc :

$\frac{Umg_X}{P_X} = \frac{Umg_y}{P_y}$ ou $\frac{Umg_X}{Umg_y} = \frac{P_X}{P_y}$

Condition de maximisation.

Les rapport de chaque utilité marginale par rapport au prix de ce produit doivent être égaux.

➢ ***La deuxième condition (condition suffisante) :***

- L'extremum sera un maximum si $\delta^2 L$, la différentielle totale seconde de la fonction de

Lagrange est une forme quadratique définie négative.

- Trouvons $\delta^2 L$: ($\delta^2 L$ est une matrice)

$$\delta^2 L = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 L}{\delta x\,\delta x} & \frac{\delta^2 L}{\delta x\,\delta y} & \frac{\delta^2 L}{\delta x\,\delta \lambda} \\ \frac{\delta^2 L}{\delta y\,\delta x} & \frac{\delta^2 L}{\delta y\,\delta y} & \frac{\delta^2 L}{\delta y\,\delta \lambda} \\ \frac{\delta^2 L}{\delta \lambda\,\delta x} & \frac{\delta^2 L}{\delta \lambda\,\delta y} & \frac{\delta^2 L}{\delta \lambda\,\delta \lambda} \end{pmatrix}$$

- Construire le déterminant Hessien bordé c'est-à-dire le déterminant du système d'équations obtenu à partir du développement de $\delta^2 L$ puis étudier le signe des mineurs principaux de ce déterminant Hessien.

$$|H| = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 L}{\delta x\,\delta x} & \frac{\delta^2 L}{\delta x\,\delta y} & \frac{\delta^2 L}{\delta x\,\delta \lambda} \\ \frac{\delta^2 L}{\delta y\,\delta x} & \frac{\delta^2 L}{\delta y\,\delta y} & \frac{\delta^2 L}{\delta y\,\delta \lambda} \\ \frac{\delta^2 L}{\delta \lambda\,\delta x} & \frac{\delta^2 L}{\delta \lambda\,\delta y} & \frac{\delta^2 L}{\delta \lambda\,\delta \lambda} \end{vmatrix}$$

Si $|D_2| > 0 \Rightarrow$ ***$\delta^2 L$ est définie négative$\Rightarrow$ un maximum.***

Si $|D_2| < 0 \Rightarrow$ ***$\delta^2 L$ est définie positive$\Rightarrow$ un minimum.***

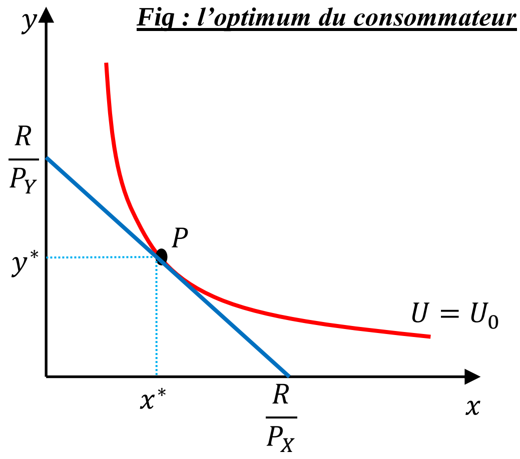
3. *Détermination géométrique de l'optimum du consommateur :*

- La combinaison de la courbe d'indifférence avec la ligne de budget permet de déterminer l'optimum du consommateur.
- La ligne de budget ou du prix a donc bien pour équation l'équation du budget $R = xP_X + y\,P_Y \Rightarrow y = \frac{R}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y} \cdot x$

  Lorsque $x = 0 \Rightarrow y = \frac{R}{P_Y}$

  Lorsque $y = 0 \Rightarrow x = \frac{R}{P_X}$
- Donc la première étape est de déterminer la ligne de budget.

Fig : l'optimum du consommateur



- L'optimum du consommateur peut alors être déterminé sans difficulté, il consiste à trouver la courbe d'indifférence la plus éloignée ayant au moins un point commun avec la ligne de prix correspondant au niveau de son revenu.

❖ *Le rapport des prix et des utilités marginales des biens :*

- Il est clair qu'au point de tangence P de la ligne de prix à la courbe d'indifférence, la pente de cette courbe d'indifférence $\frac{dy}{dx}$ est égale à la pente de la droite du budget $-\frac{P_X}{P_Y}$

- Or $TMS = -\frac{dy}{dx} = \frac{Umg_X}{Umg_Y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{Umg_X}{Umg_Y}$

- Donc au point P nous avons : $\frac{Umg_X}{Umg_y} = \frac{P_X}{P_y}$

- (pour simplifier on peut dire : on prend les pentes de la droite de budget et de la courbe d'indifférence en valeur absolue et donc nous avons : $\frac{Umg_X}{Umg_y} = \frac{P_X}{P_y}$).

- Il en résulte qu'au point P correspondant à la maximisation de la fonction de l'utilité, le rapport des utilités marginales est égal au rapport des prix des deux biens considérés.

Le cas de minimisation :

$$L(x, y, \lambda) = xP_X + y\,P_Y - \lambda(U_0 - U)$$

- ***La première condition :***

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x} = P_X - \lambda Umg_X = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{Umg_X}{P_X} \ldots (1) \\ \dfrac{\delta L}{\delta y} = P_y - \lambda Umg_y = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{Umg_y}{P_y} \ldots (2) \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda} = U_0 - U = 0 \end{cases}$$

(1)=(2)$\Leftrightarrow \frac{Umg_X}{P_X} = \frac{Umg_y}{P_y}$

Ou $\frac{Umg_X}{Umg_y} = \frac{P_X}{P_y}$

Exercice 04 :

1. **_Déduire les valeurs des utilités totales des différentes quantités de X et Y :_**

Quantités	Umg_X	Umg_Y	UT_X	UT_Y
0	/	/	/	/
1	11	19	11	19
2	10	17	21	36
3	9	15	30	51
4	8	13	38	64
5	7	12	45	76
6	6	10	51	86
7	5	8	56	94
8	4	6	60	100
9	3	5	63	105
10	2	4	65	109

$$Umg_n = UT_n - UT_{n-1}$$
$$UT_n = Umg_n + UT_{n-1}$$

2. **_La condition de maximisation de l'utilité :_**

1ère condition : (condition nécessaire)

La première dérivée = 0 ⇒un optimum

2ème condition : (condition suffisante)

La deuxième dérivée < 0 ⇒un maximum

(Pour la méthode mathématique : une seule variable donc $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0$

Pour la méthode de Lagrange : les dérivées partielles s'annulent en même temps et δ^2L est définie négative).

❖ **_La contrainte budgétaire :_**

- La contrainte budgétaire n'est rien d'autre que le revenu dont dispose le consommateur lui permettant d'acheter des différents biens.
- Le consommateur n'a pas de marge de manœuvre, il lui est impossible de dépasser son budget.
- L'équation du budget s'écrit :

$$R = xP_X + y\,P_Y$$

Avec :

R : le revenu du consommateur.

P_X : le prix du bien X.

P_Y : le prix du bien Y.

- Donc le consommateur doit maximiser son utilité tout en prenant en compte son revenu.
- Pour représenter la ligne du budget on a : $y = \frac{R}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y} \cdot x$

$-\frac{P_X}{P_Y}$ le coefficient directeur de la droite et $\frac{R}{P_Y}$ l'ordonné à l'origine.

3. **_La manière dont ce consommateur répartit son revenu pour atteindre la satisfaction maximale :_**

Le revenu = 16 unités monétaires.

$1\,UM \rightarrow$ *première unité de* $Y \rightarrow Umg_Y = 19$
$2\,UM \rightarrow$ *deuxième unité de* $Y \rightarrow Umg_Y = 17$
$3\,UM \rightarrow$ *troisième unité de* $Y \rightarrow Umg_Y = 15$
$4\,UM \rightarrow$ *quatrième unité de* $Y \rightarrow Umg_Y = 13$
$5\,UM \rightarrow$ *cinquième unité de* $Y \rightarrow Umg_Y = 12$
$6\,UM \rightarrow$ *première unité de* $X \rightarrow Umg_X = 11$
$7\,UM \rightarrow$ *deuxième unité de* $X \rightarrow Umg_X = 10$
$8\,UM \rightarrow$ *sixième unité de* $Y \rightarrow Umg_Y = 10$
$9\,UM \rightarrow$ *troisième unité de* $X \rightarrow Umg_X = 9$
$10\,UM \rightarrow$ *quatrième unité de* $X \rightarrow Umg_X = 8$
$11UM \rightarrow$ *septième unité de* $Y \rightarrow Umg_Y = 8$
$12\,UM \rightarrow$ *cinquième unité de* $X \rightarrow Umg_X = 7$
$13\,UM \rightarrow$ *sixième unité de* $X \rightarrow Umg_X = 6$
$14UM \rightarrow$ *huitième unité de* $Y \rightarrow Umg_Y = 6$
$15\,UM \rightarrow$ *septième unité de* $X \rightarrow Umg_X = 5$
$16UM \rightarrow$ *neuvième unité de* $Y \rightarrow Umg_Y = 5$

- La combinaison de x et y qui permet d'atteindre le maximum de satisfaction est la suivante : $x = 7$ et $y = 9$.
- La valeur de satisfaction $UT = UT_X + UT_Y = 56 + 105 = 161$

pour montrer que toute autre dépense du revenu donne une utilité plus faible on suppose différentes quantités de x et y et on montre qu'aucune combinaison n'est capable à procurer le niveau de satisfaction $UT = 161$.

Par exemple :

$x = 8\,, y = 8 \;\Rightarrow R = 16 \Rightarrow UT = 160$
$x = 9\,, y = 7 \;\Rightarrow R = 16 \Rightarrow UT = 157$
$x = 6\,, y = 10 \;\Rightarrow R = 16 \Rightarrow UT = 160$

Série d'exercices N° 02 :
(L'optimum du consommateur)

Exercice 01 :

On considère une fonction $U = f(x, y)$ continue et dérivable.

1. Etablir la liaison qui existe entre le taux marginal de substitution et les fonctions d'utilité marginales des biens X et Y sur une courbe d'indifférence.
2. Calculer l'expression du TMS_{XY} quand la fonction de satisfaction a pour expression :

   $U = 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, $U = 3x^{\frac{3}{4}}\,y^{\frac{1}{4}}$, $U = xy$

3. Calculer la valeur du TMS_{XY} de la 1ère fonction de satisfaction lorsque cette dernière prend la valeur $U = 2$ et $x = 3$.

Exercice 02 :

Un consommateur qui dispose d'un revenu de 12 UM a le choix entre la consommation de deux biens, le pain dont le prix unitaire est de 1 et le jus dont le prix unitaire est de trois.

Unités consommées	$\boldsymbol{Umg_X}$	***Unités consommées***	$\boldsymbol{Umg_Y}$
1	**10**	**1**	**18**
2	**9**	**2**	**15**
3	**8**	**3**	**13**
4	**7**	**4**	**11**
5	**6**	**5**	**9**
6	**5**	**6**	**7**
7	**4**	**7**	**5**
8	**3**	**8**	**3**
9	**2**	**9**	**2**
10	**1**	**10**	**1**

1. Dites quelle quantité de chaque bien, va acquérir ce consommateur s'il se fixe comme objectif la maximisation de son niveau d'utilité.
2. Dites pourquoi chacun des deux cas suivants ne peut constituer sa position d'équilibre :
   - Il achète 4 unités de jus et 2 unités de pain.
   - Il achète 3 unités de jus et 3 unités de pain.
3. Que devient la position d'équilibre du consommateur si son revenu s'accroit et devient égal à 18 ? quelles conclusions pouvez-vous en tirer quand à la nature des deux biens.

Exercice 03 :

Dans le cas d'une fonction de la forme
$$U = 2x + 4y + xy + 8$$
Et d'une contrainte de budget :
$$50 = 5x + 10y$$

1. Quelles seront les quantités demandées à l'optimum ? déterminer ces quantités en utilisant la méthode de Lagrange et la méthode mathématique.
2. Supposons maintenant que l'on veux atteindre le niveau de satisfaction 1200 us, quelles seront les quantités demandées si la contrainte de budget est : $R = 3x + 2y$

Exercice 04 :

La fonction de satisfaction d'un consommateur est : $U = x^{0,3}y^{0,7}$, sa contrainte budgétaire est : $R = xP_X + yP_Y$

1. Etablir les conditions de l'optimisation de ce consommateur par la méthode du multiplicateur de Lagrange et dégager la signification économique des résultats obtenus.
2. Quelle est la signification économique du multiplicateur de Lagrange utilisé dans la recherche des conditions de l'optimum ?

Exercice 01 :

1. La liaison qui existe entre le taux marginal de substitution et les fonctions d'utilités marginales des biens X et Y sur une courbes s'indifférence :

- Soit $U = f(x, y)$, la variation de l'utilité totale résultante du changement de la valeur de x et y (les quantités des deux biens) s'exprime par la différentielle totale du premier ordre de la fonction (U).

$$dU = \frac{\delta U}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta U}{\delta y} \cdot dy$$

- Sur une même courbe d'indifférence, les variations de x et de y n'entrainent pas de changement sur la valeur de U donc $dU = 0$. On aura par conséquent :

$$\frac{\delta U}{\delta x} \cdot dx + \frac{\delta U}{\delta y} \cdot dy = 0$$
$$Umg_X \cdot dx + Umg_Y \cdot dy = 0$$
$$Umg_X \cdot dx = -Umg_Y \cdot dy$$

$$\Rightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{Umg_X}{Umg_Y}$$

$\frac{dy}{dx}$ est la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand Δx tend vers zéro.
On pourra écrire :

$$\boldsymbol{TMS_{XY} = -\frac{dy}{dx} = \frac{Umg_X}{Umg_Y}}$$

Donc sur une courbe d'indifférence TMS_{XY} en un point est égale au rapport de l'utilité marginale de X sur celle de Y.

2. Calcul du TMS_{XY} des différentes fonctions :

$$U = 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

$$TMS_{XY} = \frac{Umg_X}{Umg_Y} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{y}{x}$$

$$U = 3x^{\frac{3}{4}}\,y^{\frac{1}{4}}$$

$$TMS_{XY} = \frac{Umg_X}{Umg_Y} = \frac{9/_4\, x^{-\frac{1}{4}}\, y^{\frac{1}{4}}}{3/_4\, x^{\frac{3}{4}}\, y^{-\frac{3}{4}}} = \frac{3y}{x}$$

$$U = xy$$
$$TMS_{XY} = \frac{Umg_X}{Umg_Y} = \frac{y}{x}$$

3. Calcul de la valeur TMS_{XY} de la première fonction :

Nous avons : $U = 2$ et $x = 3$
Trouvons la valeur de y

$$U = 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$
$$2 = 2\sqrt{3}y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{3},\ x = 3\ ,\ U = 2$$
$$TMS_{XY} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}$$

Donc le consommateur renonce $\frac{1}{9}$ unités de Y pour obtenir une unité supplémentaire de X. (Il renonce une unité de Y pour avoir 9 unités de X).

Exercice 02 :

1. ***Les quantités des bien X et Y qui maximise l'utilité :***

- Nous avons : $R = 12\ um$, $P_X = 1, P_Y = 3$
- La condition de maximisation de l'utilité est : $\frac{Umg_X}{P_X} = \frac{Umg_y}{P_y}$

ou encore : $\frac{Umg_X}{Umg_y} = \frac{P_X}{P_y} = \frac{1}{3}$

- Les combinaisons de x et y qui respectent cette condition sont les suivantes :

x	y	R
5	**1**	**8**
6	**2**	**12**
8	**5**	**23**
10	**8**	**34**

Les quantités consommées pour maximiser l'utilité sont :
$x = 6$ et $y = 2$.

2. ***Montrer pourquoi les cas suivants ne peuvent pas constituer une position d'équilibre :***

- Les conditions de la position d'équilibre sont :

$$\begin{cases} \frac{Umg_X}{Umg_y} = \frac{P_X}{P_y} = \frac{1}{3} \\ x + 3y \leq 12 \end{cases}$$

« On a mis ≤ 12 parce que les quantités de x et de y ne sont pas divisible en des petites valeurs ».

- $x = 2$ et $y = 4$ n'est pas une position d'équilibre parce que :

$$\begin{cases} \frac{Umg_X}{Umg_y} = \frac{9}{11} \neq \frac{1}{3} \\ 2(1) + 4(3) = 14 > 12 \end{cases}$$

- $x = 3$ et $y = 3$ n'est pas une position d'équilibre parce que :

$$\begin{cases} \frac{Umg_X}{Umg_y} = \frac{8}{13} \neq \frac{1}{3} \\ 2(1) + 3(3) = 12 \end{cases}$$

3. ***Position d'équilibre lorsque $R = 18$:***

- La condition d'équilibre reste la même : $\frac{Umg_X}{Umg_y} = \frac{P_X}{P_y} = \frac{1}{3}$ avec $R = 18$.
- Donc la position d'équilibre est :
$x = 6$ et $y = 2$

- Les mêmes quantités donc les deux biens sont des biens normaux.
- « *Dans la cas des biens inférieurs l'augmentation du revenu provoque une diminution des quantités de X et de Y* ».

- ***Autre méthode :***

$R = 3 \rightarrow 3^{ème}$ *unité de X* $\rightarrow Umg_X = 27$
$R = 6 \rightarrow 1^{ère}$ *unité de Y* $\rightarrow Umg_Y = 18$
$R = 9 \rightarrow 6^{ème}$ *unité de X* $\rightarrow Umg_X = 18$
$R = 12 \rightarrow 2^{ème}$ *unité de Y* $\rightarrow Umg_Y = 15$
$R = 15 \rightarrow 3^{ème}$ *unité de Y* $\rightarrow Umg_Y = 13$
$R = 15 \rightarrow 4^{ème}$ *unité de Y* $\rightarrow Umg_Y = 11$

Donc $x = 6$ et $y = 4$ et $U = 102$

- Cette position n'est pas une position d'équilibre car $\frac{Umg_X}{Umg_y} = \frac{5}{11} \neq \frac{1}{3}$

(Par ce niveau de revenu $R = 18$ le consommateur peut obtenir un niveau plus élevé que 102 de satisfaction).

Exercice N° 03 :

1. Les quantités demandées à l'optimum :

A. La méthode de Lagrange :

Le programme est le suivant :

$$\begin{cases} Max\ U = 2x + 4y + xy + 8 \\ \quad {}^{S}/_{C}\ 50 = 5x + 10y \end{cases}$$

$$L = 2x + 4y + xy + 8 + \lambda(R - 5x - 10y)$$

Les valeurs de x et de y sont données par les conditions du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} = 2 + y - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2+y}{5} \ldots (1) \\ \frac{\delta L}{\delta y} = 4 + x - 10\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4+x}{10} \ldots (2) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 50 - 5x - 10y = 0 \Rightarrow 50 = 5x + 10y..(3) \end{cases}$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \frac{2+y}{5} = \frac{4+x}{10}$$
$$\Leftrightarrow 20 + 10y = 20 + 5x$$
$$\Leftrightarrow x = 2y \ldots.(4)$$

En remplaçant (4) dans (3) on obtient :

$$50 = 5(2y) + 10y$$

$\boldsymbol{y = {}^{5}/_{2}}$ et $\boldsymbol{x = 5}$ et $\boldsymbol{\lambda = {}^{9}/_{10}}$

Etude des conditions du deuxième ordre :

L'extremum est un maximum si la différentielle totale seconde de la fonction de Lagrange $\delta^2 L$ est une forme quadratique définie négative.

- Trouvons $\delta^2 L$: ($\delta^2 L$ est une matrice)

$$\delta^2 L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -10 \\ -5 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

- Construire le déterminant Hessien bordé, puis étudier le signe des mineurs principaux de ce déterminant Hessien.

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -10 \\ -5 & -10 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|H| = |D_2| = 0 \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = 50 + 50 = 100$$

$|H| > 0 \Leftrightarrow \delta^2 L$ est une forme quadratique définie négative et l'optimum est un maximum.

2

$2^{éme}$ méthode pour calculer le déterminant :

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & & - & - & - \end{array}$$

$$H = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -10 & 1 & 0 \\ -5 & -10 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right.$$

$$H = (0 \cdot 0 \cdot 0) + (1 \cdot -10 \cdot -5) + (-5 \cdot 1 \cdot -10) - (-5 \cdot 0 \cdot -5) - (0 \cdot -10 \cdot -10) - (1 \cdot 1 \cdot 0)$$

B. La méthode mathématique :

- De l'équation de budget on peut tirer la valeur de y comme une fonction de x :

  Nous avons : $50 = 5x + 10y$

$$10y = 50 - 5x$$
$$\Rightarrow y = 5 - \frac{1}{2}x$$

- La fonction d'utilité devient une fonction à une seule variable (x) :

$$U = 2x + 4y + xy + 8$$
$$U = 2x + 4\left(5 - \frac{1}{2}x\right) + x\left(5 - \frac{1}{2}x\right) + 8$$
$$U = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 28$$

Pour maximiser cette fonction $\begin{cases} U'_x = 0 \\ U''_x < 0 \end{cases}$

- $U'_x = -x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

  Et $y = 5 - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}$
- $U''_x = -1 < 0 \Rightarrow l'optimum\ est\ un\ maximum.$

2. Les quantités demandées pour atteindre le niveau de satisfaction $U = 1200$:

Le programme est le suivant :

$$\begin{cases} Min\ R = 3x + 2y \\ {}^{S}/_{C}\ 1200 = 2x + 4y + xy + 8 \end{cases}$$

La fonction de Lagrange s'écrit :

$$L = 3x + 2y + \lambda(1200 - 2x - 4y - xy - 8)$$

Les conditions du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} = 3 - 2\lambda - \lambda y = 0 \ \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2+y} \dots (1) \\ \frac{\delta L}{\delta y} = 3 - 4\lambda - \lambda x = 0 \ \Rightarrow \lambda = \frac{2}{4+x} \dots (2) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 1200 - 2x - 4y - xy - 8 = 0 \\ \quad \Rightarrow 1200 = 2x + 4y + xy + 8 \dots (3) \end{cases}$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \frac{3}{2+y} = \frac{2}{4+x}$$
$$\Leftrightarrow 3(4+x) = 2(2+y)$$
$$\Leftrightarrow y = 4 + \frac{3}{2}x \dots\dots (4)$$

En remplaçant (4) dans (3) :

$$1200 = 2x + 4y + xy + 8$$
$$1200 = 2x + 4\left(4 + \frac{3}{2}x\right) + x\left(4 + \frac{3}{2}x\right) + 8$$
$$\frac{3}{2}x^2 + 12x - 1176 = 0$$

$\boldsymbol{\Delta = 7200 \quad x_1 = -32,28 \quad x_2 = 24,28}$

Donc :

$\boldsymbol{x = 24,28 \quad y = 40,42 \quad \lambda = 0,07}$

<u>La deuxième condition :</u>

$$\delta^2 L = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -2-y \\ -\lambda & 0 & -4-x \\ -2-y & -4-x & 0 \end{pmatrix}$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -2-y \\ -\lambda & 0 & -4-x \\ -2-y & -4-x & 0 \end{vmatrix}$$

$$|H| = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -(4+x) \\ -(2+y) & 0 \end{vmatrix}$$
$$-(2+y) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -(2+y) & -(4+x) \end{vmatrix}$$

$$|H| = -\lambda(2+y)(4+x) - (2+y)\lambda(4+x)$$

$$|H| = -2\lambda(2+y)(4+x)$$

$|H| < 0 \Leftrightarrow \delta^2 L$ est une forme quadratique définie positive et l'optimum est un minimum.

Exercice 04 :

1. ***Etablir les conditions de l'optimisation par la méthode du multiplicateur de Lagrange :***

Nous avons :

$$\begin{cases} Max\ U = x^{0,3}y^{0,7} \\ {}^{S}/_{C}\ R = xP_X + y\,P_Y \end{cases}$$

$$L(x, y, \lambda) = x^{0,3}y^{0,7} + \lambda(R - xP_X - y\,P_Y)$$

➢ ***Conditions du premier ordre :***

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x} = 0{,}3\ x^{-0,7}y^{0,7} - \lambda P_X = 0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta y} = 0{,}7\ x^{0,3}y^{-0,3} - \lambda P_y = 0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda} = R - xP_X - y\,P_Y = 0 \end{cases}$$

Les conditions du premier ordre font intervenir les dérivées partielles $\frac{\delta U}{\delta x}$ et $\frac{\delta U}{\delta y}$ c'est-à-dire les utilités marginales par rapport aux biens X et Y.

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x} = \dfrac{\delta U}{\delta x} - \lambda P_X = 0 \ \Rightarrow \lambda = \dfrac{\frac{\delta U}{\delta x}}{P_X} \\ \dfrac{\delta L}{\delta y} = \dfrac{\delta U}{\delta y} - \lambda P_y = 0 \ \ \Rightarrow \lambda = \dfrac{\frac{\delta U}{\delta y}}{P_y} \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda} = R - xP_X - y\,P_Y = 0 \end{cases}$$

Pour que l'optimum soit réalisé, il faut donc que : $\frac{\frac{\delta U}{\delta x}}{P_X} = \frac{\frac{\delta U}{\delta y}}{P_y}$

C'est-à-dire que les satisfactions marginales des biens pondérées par leur prix soient égales.

On peut transformer le rapport précédant comme suit :

$$\frac{\frac{\delta U}{\delta x}}{\frac{\delta U}{\delta y}} = \frac{P_X}{P_y}$$

Ceci permet de dire que, pour que l'optimum soit atteint, il faut que le rapport des utilités marginales soit égal au rapport des prix.

Dans les deux cas, il faut naturellement que la troisième condition $\left(\frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0\right)$ soit réalisée.

2. ***La signification économique du multiplicateur de Lagrange :***

L'utilisation de la méthode de Lagrange pour la recherche des conditions nécessaires d'un maximum de satisfaction a entrainé l'introduction d'une variable nouvelle notée λ appelée multiplicateur de Lagrange.

Si on reprend la formulation du problème sous une forme générale :

Nous avons :

$$\begin{cases} Max\ U(x, y) \\ {}^{S}/_{C}\ R = xP_X + y\,P_Y \end{cases}$$

$$L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda(R - xP_X - y\,P_Y)$$

➢ ***Conditions du premier ordre :***

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x} = Umg_X - \lambda P_X = 0 \ \Rightarrow \ Umg_X = \lambda P_X \\ \dfrac{\delta L}{\delta y} = Umg_y - \lambda P_y = 0 \ \Rightarrow \ Umg_y = \lambda P_y \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda} = R - xP_X - y\,P_Y = 0 \end{cases}$$

De la fonction de l'utilité, on tire l'expression de la différentielle totale :

$$dU = Umg_X \cdot dx + Umg_y \cdot dy$$
$$dU = \lambda P_X \cdot dx + \lambda P_y \cdot dy$$
$$dU = \lambda\big(\,P_X \cdot dx + P_y \cdot dy\big)$$
$$dU = \lambda\, dR$$

$\lambda = \frac{dU}{dR}$ / si $dR = 1 \Rightarrow \lambda = dU$

Donc le multiplicateur de Lagrange λ mesure le supplément d'utilité qui découle d'un accroissement unitaire du revenu (des ressources).

λ est donc l'utilité marginale du revenu, encore appelé l'utilité marginale de la monnaie.

Série d'exercices N° 03 : (l'équilibre en coin)

Exercice 01 :

Vous disposez d'un revenu à repartir entre deux biens X et Y dont les prix unitaires sont respectivement P_X et P_Y, et vos préférences sont représentée par la fonction d'utilité suivante :

$$U = (y + 2)\, x$$

1. Que représente pour vous la relation $y = (U/x) - 2$?
2. Quelle est l'allure de vos courbes d'indifférence ?
3. Dans le cas où $P_X = 30$, $P_Y = 12$ et $R = 96$ déterminez les quantités de chaque bien qui maximisent votre niveau de satisfaction ? (Méthode de Lagrange).
4. Quel sera l'indice de satisfaction correspondant à cette demande optimale.

Exercice 02 :

Afin de donner plus de vraisemblance à l'analyse théorique du consommateur on peut admettre que le consommateur atteint un seuil de saturation dans la consommation des biens, les caractéristiques et les propriétés de fonction de satisfaction restant valables uniquement sur et en deçà de ces limites.
On considère une fonction de satisfaction de la forme :

$$U = \sqrt{x} \cdot y$$

Les seuils de saturation sur les quantités sont atteints lorsque $x = y = 4$

1. Quels doivent être les prix respectifs des produits pour que ce consommateur qui dispose d'un revenu $R = 10$ soit simultanément :
    - Dans une situation d'équilibre.
    - Aux seuils de saturation pour les deux biens.
2. Donner la représentation graphique des résultats.

Exercice 03 :

La fonction d'utilité d'un consommateur s'écrit :

$$U = 5 \log(x_1 + 1) + \log x_2$$

Soient P_1 et P_2 les prix respectifs des biens 1 et 2, R le revenu de ce consommateur.

Question :
Montrer que cette fonction d'utilité peut admettre un équilibre en coin.

Exercice 01 :

1. La relation $y = (U/x) - 2$ représente l'équation de la courbe d'indifférence.

2. ***L'allure des courbes d'indifférence :***

Nous avons $y = \frac{U}{x} - 2$

$$\begin{cases} y'_x = -\frac{U}{x^2} < 0 \Rightarrow \textit{les courbes sont décroissantes} \\ y''_x = \frac{2\,U\,x}{x^4} \Rightarrow \textit{les courbes sont convexes par rapport à l'origine} \end{cases}$$

3. ***Déterminer l'optimum du consommateur :***

Nous avons : $P_X = 30$, $P_Y = 12$, $R = 96$

$$\begin{cases} Max\ U = (y+2)x \\ {}^{S}/_{C}\ 96 = 30\,x + 12\,y \end{cases}$$

$$L = y\,x + 2x + \lambda(96 - 30\,x - 12\,y)$$

Première condition :

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} = y + 2 - 30\,\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{y+2}{30} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ \frac{\delta L}{\delta y} = x - 12\,\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x}{12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots\ldots(2) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 96 - 30\,x - 12\,y = 0 \Rightarrow 96 = 30\,x + 12\,y \ldots(3) \end{cases}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{y+2}{30} = \frac{x}{12} \Leftrightarrow 12y + 24 = 30x$$
$$\Leftrightarrow y = {}^{5}/_{2}\,x - 2 \ldots\ldots\ldots(4)$$

En remplaçant (4) dans (3) :

$96 = 30\,x + 12\left({}^{5}/_{2}\,x - 2\right)$

$\Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$ et $\boldsymbol{y = 3}$

Deuxième condition :

$$d^2L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -30 \\ 1 & 0 & -12 \\ -30 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|H| = 0\begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -12 \\ -30 & 0 \end{vmatrix} - 30\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -30 & -12 \end{vmatrix}$$

$|H| = 720 > 0 \Rightarrow d^2L$ est une forme quadratique définit négative et donc l'optimum est un maximum.

4. ***L'indice de satisfaction correspondant :***

$U = (y+2)x$

$$U = 10\ u.s$$

Exercice 02 :

1. ***Trouver P_X et P_Y :***

Les conditions imposées dans l'énoncé sont de deux ordres.

- Le consommateur doit tout d'abord être dans une situation d'équilibre. Cela implique donc que les conditions du premier ordre soient réalisées.
- Le consommateur doit ensuite etre aux seuils de saturation c'est-à-dire demander $x = y = 4$.

$L = x^{1/2}\,y + \lambda(R - xP_X - yP_Y)$

1ère condition :

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} = \frac{1}{2}x^{1/2}\ y - \lambda P_X = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x^{1/2}\,y}{2P_X} \ldots\ldots\ldots.(1) \\ \frac{\delta L}{\delta y} = x^{1/2} - \lambda P_Y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x^{1/2}}{P_Y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = R - xP_X - yP_Y \Rightarrow R = xP_X + yP_Y \ldots..(3) \end{cases}$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \frac{x^{1/2}\,y}{2P_X} = \frac{x^{1/2}}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{x^{1/2}\,y}{x^{1/2}} = \frac{2P_X}{P_Y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{2P_X}{P_Y}$$

D'autre part on sait que : $x = y = 4$

Donc : $10 = 4P_X + 4P_Y$

Donc :

$$\begin{cases} 1 = \frac{2P_X}{P_Y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ 10 = 4P_X + 4P_Y \ldots..(2) \end{cases}$$

$$1 = \frac{2P_X}{P_Y} \Rightarrow 2P_X = P_Y$$

En remplaçant dans l'équation (2) :

$10 = 4P_X + 8P_X$

$$10 = 12P_X$$

$\boldsymbol{P_X = {}^{5}/_{6}}$ et $\boldsymbol{P_Y = {}^{5}/_{3}}$

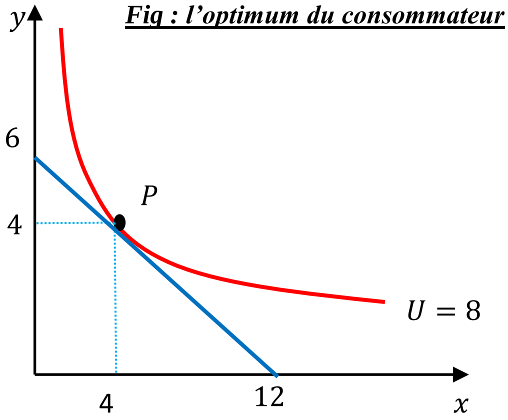
Les deux prix obtenus permettent à la fois d'assurer l'équilibre du consommateur et une demande des bien X et Y aux seuils de saturation ($x = y = 4$).

2. ***La représentation graphique :***

$10 = {}^{5}/_{6}\,x + {}^{5}/_{3}\,y$

$y = 6 - {}^{1}/_{2}\,x$

$U = 8$



Exercice 03 :

Montrer que la fonction d'utilité peut admettre un équilibre en coin :

Pour pouvoir répondre à cette question, nous devons déterminer x^* et y^*.

$$\begin{cases} max\, U = 5\, log(x_1 + 1) + log(x_2) \\ {}^{S}/_{C}\, R = P_1 x_1 + P_2 x_2 \end{cases}$$

$$L = 5\, log(x_1 + 1) + lo\, g(x_2) + \lambda(R - P_1 x_1 - P_2 x_2)$$

A l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x_1} = \frac{5}{(x_1 + 1)} - \lambda P_1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{P_1(x_1 + 1)} \ldots (1) \\ \frac{\delta L}{\delta x_2} = \frac{1}{x_2} - \lambda P_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{P_2 x_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = R - P_1 x_1 - P_2 x_2 = 0 \Rightarrow R = P_1 x_1 + P_2 x_2 \ldots (3) \end{cases}$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \frac{5}{P_1(x_1 + 1)} = \frac{1}{P_2 x_2}$$

$\Leftrightarrow 5P_2 x_2 = P_1 x_1 + P_1$

$\Leftrightarrow x_2 = \frac{P_1 x_1 + P_1}{5P_2} \ldots\ldots (4)$

En remplaçant (4) dans (3) :

$R = P_1 x_1 + P_2 \frac{P_1 x_1 + P_1}{5P_2}$

$R = \frac{6\, P_1 x_1 + P_1}{5}$

$$\boldsymbol{x_1^* = \frac{5R - P_1}{6P_1}}$$

$$x_2^* = \frac{P_1 x_1^* + P_1}{5P_2}$$

$$x_2^* = \frac{P_1}{5P_2}(x_1^* + 1)$$

$$\boldsymbol{x_2^* = \frac{R + P_1}{6P_2}}$$

Nous remarquons que :

$$\forall (P_1, P_2, R) \in R^{*+}, x_2^* > 0$$

Par contre, en ce qui concerne la demande du bien 1, nous devons distinguer trois cas :

- Si $5R > P_1 \Rightarrow x_1^* > 0$
- Si $5R = P_1 \Rightarrow x_1^* = 0$
- Si $5R < P_1 \Rightarrow x_1^* < 0$

Donc la fonction d'utilité admet un équilibre en coin si $5R \leq P_1$ car dans ces conditions l'agent économique ne consommera que du bien 2 en quantité $x_2^* = \frac{R}{P_2}$.

Série d'exercice N° 04 : (Variation de l'environnement et demande du consommateur)

Exercice 01 :

La fonction d'utilité d'un consommateur s'écrit :

$$U = 2\log x_1 + 4\log x_2$$

P_1 et P_2 les prix respectifs des biens 1 et 2 et R le revenu du consommateur.

1. Donner l'équation de la courbe de revenu-consommation.
2. $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, déterminer les équations des courbes d'Engel pour chacun des deux biens considérés et caractériser ces deux biens.

Exercice 02 :

Les préférences d'un consommateur pour les bien X et Y sont exprimées par :

$$U = 16\,xy$$

1. Déterminer les fonctions de demande des deux biens X et Y.
2. Déterminer l'équilibre et le niveau de l'utilité pour un revenu $R = 1000$ et les prix $P_X = 10$ et $P_Y = 20$.
3. Même question N° 2 quand le prix de X prend les valeurs $P_X = 5$, $P_X = 5/2$.
4. Tracer la courbe de consommation-prix et déduire la courbe de la demande du bien X.
5. Déterminer l'équilibre et le niveau de l'utilité quand le revenu prend les valeurs $R = 2000$, $R = 3000$ ($P_X = 10$ et $P_Y = 20$).
6. Tracer la courbe de consommation-revenu et déduire la courbe d'Engel de bien X.

Exercice 03 :

On considère la fonction d'utilité d'un consommateur pour les deux biens X et Y :

$$U = 2x^{3/2}y^{3/4}$$

1. Extraire les fonctions de demande en utilisant la méthode de Lagrange.
2. Si le consommateur veut obtenir une utilité $U = 3600$ et si les prix des biens que le consommateur souhaite acquérir sont, $P_X = 12$ et $P_Y = 6$, quelle est la valeur du revenu nécessaire à l'obtention de cette utilité ? quelles sont les quantités optimales qui permettent de réaliser l'équilibre du consommateur ?
3. Sachant que le prix du bien X est passé de 12 à 6, toutes choses égales par ailleurs :
   a. Déduire la courbe de demande du bien X.
   b. Quelle est la nature de la demande pour le bien X ?
4. Quelle est la nature de la relation entre le bien X et le bien Y ?

Rappel du cour :

❖ ***La variation de l'environnement du consommateur***
- ***Si le revenu du consommateur varie.***
- ***L'hypothèse du variation des prix de l'un des deux biens.***

❖ ***La fonction de demande d'un bien.***

❖ ***La variation de l'environnement du consommateur :***

- Nous avons supposé au cours des raisonnements précédent que le revenu R et les prix P_X et P_Y étaient constants. Maintenant il faut abandonner cette hypothèse.

1. Si le revenu du consommateur varie :

- La ligne du budget qui symbolise son pouvoir d'achat va se déplacer vers le haut ou vers le bas selon que le revenu augmente ou diminue.
- Comme la pente de cette ligne est le rapport des prix des deux biens X et Y $\left(\frac{P_X}{P_Y}\right)$ la nouvelle ligne de budget sera parallèle à l'ancienne puisque les prix P_X et P_Y sont supposés inchangés.
- Le point d'équilibre correspondant au maximum de satisfaction sera le point de tangence de la nouvelle ligne de budget à une courbe d'indifférence.
- Donc il est possible de déterminer un point d'équilibre pour chaque niveau de R.
- Sur la figure suivante, ont été tracés un système de lignes de budget et une carte d'indifférence.

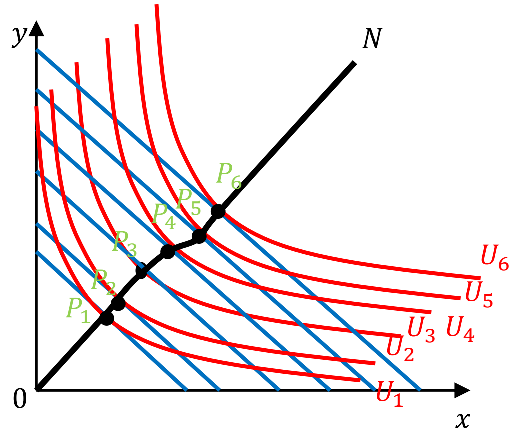


Fig : courbe de revenu-consommation ou courbe de niveau de vie

- Si l'on joint le point 0 et les points de tangence $(P_1, P_2, P_3, \dots \dots P_n)$ on obtient « ***la courbe de niveau de vie*** » appelée aussi « ***la courbe de revenu-consommation*** » ou encore : « ***courbe d'Engels***[3] ».
- Cette courbe part de l'origine (0,0) puisque avec un revenu nul le consommateur ne peut acheter aucune quantité des deux biens X et Y.
- La courbe de revenu-consommation traduit la manière dont augmentent les achats de X et Y lorsque le revenu du consommateur augmente.
- Sa forme est fonction de la nature des biens considérés.

2. L'hypothèse d'une variation du prix de l'un des deux biens :

- Dans ce cas la pente de la ligne de budget $\left(\frac{P_X}{P_Y}\right)$ va changer.
- La figure suivante traduit les conséquences de variation du prix P_X.

[3] *Engels : est un statisticien allemand du 18ème siècle qui est l'un des premiers a avoir étudié les effets des variations du revenu sur les dépenses de consommation.*

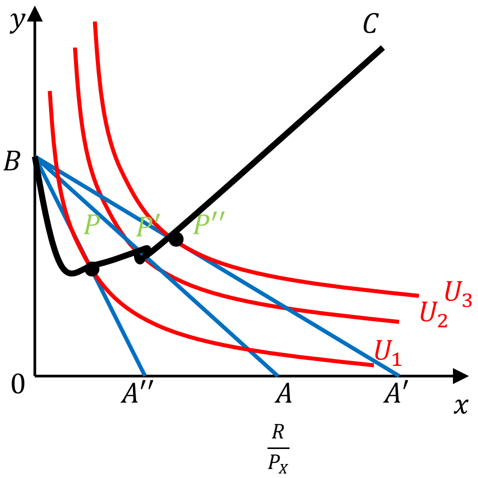


Fig : courbe de prix-consommation

- Si le prix du bien X baisse, le consommateur peut se procurer une quantité plus importante de ce bien (OA') et la ligne du budget déplace.

- Le point B restant fixe parce que P_Y est supposé inchangé.

- Si au contraire P_X augmente le consommateur devra réduire ses achats de X (OA'').

- Joignons le point B et les points de tangence P'', P, P' on obtient « ***la courbe de prix-consommation*** ».

- Cette courbe traduit la manière dont la consommation des deux biens X et Y varie lorsque P_X se modifie.

- Elle part du point B pour la raison suivante : plus le prix P_X augmente plus la quantité de X que le consommateur peut acquérir avec son revenu diminue et plus la ligne (BA) se rapproche de l'axe vertical (oy).

- Finalement quand P_X sera assez élevé le consommateur ne pourra plus acheter le bien X et consacrera tout son revenu à l'achat du bien Y, à ce moment, le point d'équilibre P se confondra avec le point B.

- Ce raisonnement permet d'aborder l'analyse de la demande du consommateur.

Exercice 01 :

$$U = 2\,log x_1 + 4\,log x_2$$

1. ***Equation de la courbe de consommation-revenu :***

On sait que la courbe de consommation-revenu correspond au lieu géométrique des points d'équilibre obtenus lorsque les prix des biens restent constants et que le revenu du consommateur se modifie. Pour déterminer son équation on doit résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} Max\ U = 2\,log x_1 + 4\,log x_2 \\ {}^{S}/_{C}\ R = x_1P_1 + x_2P_2 \end{cases}$$

$$L = 2\,log x_1 + 4\,log x_2 + \lambda(R - x_1P_1 - x_2P_2)$$

Première condition :

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x_1} = \frac{2}{x_1} - \lambda P_1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{x_1P_1} \dots (1) \\ \frac{\delta L}{\delta x_2} = \frac{4}{x_2} - \lambda P_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{x_2P_2} \dots (2) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = R - x_1P_1 - x_2P_2 = 0 \\ \qquad \Rightarrow R = x_1P_1 + x_2P_2 \dots (3) \end{cases}$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \frac{2}{x_1P_1} = \frac{4}{x_2P_2}$$
$$\Leftrightarrow 2x_2P_2 = 4x_1P_1$$
$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{4x_1P_1}{2P_2}$$
$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{2P_1}{P_2}x_1 \dots .(4)$$

Ceci est l'équation de la courbe de consommation-revenu. De plus elle s'écrit de la forme $x_2 = a\,x_1$, il s'agit donc d'une droite passant par l'origine.

2. $\boldsymbol{P_1 = 1\,, P_2 = 2}$

On sait que la courbe d'Engel, pour un bien, s'obtient à partir des points d'équilibre de la courbe de consommation-revenu, elle donne la relation entre la demande optimale du bien et le revenu. On l'appelle aussi droite de niveau de vie.

Pour déterminer son équation pour chacun des deux biens, on doit calculer x_1^* et x_2^*.

$$(3) \Leftrightarrow R = x_1P_1 + \frac{2P_1}{P_2}x_1\,P_2$$
$$\Leftrightarrow R = 3\,x_1P_1$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x_1^* = \frac{R}{3\,P_1}}$$

$$x_2^* = \frac{2P_1}{P_2}x_1^*$$
$$x_2^* = \frac{2P_1}{P_2}\frac{R}{3\,P_1}$$
$$\boldsymbol{x_2^* = \frac{2R}{3\,P_2}}$$

x_1^* et x_2^* sont les fonctions de demande Marshaliennes des biens 1 et 2.

Application numérique :

$$\boldsymbol{x_1^* = \frac{R}{3\,P_1} = \frac{R}{3}}$$
$$\boldsymbol{x_2^* = \frac{2R}{3\,P_2} = \frac{R}{3}}$$

- Ces deux équations sont celles des courbes d'Engel pour les biens 1 et 2, il s'agit de deux droites passant par l'origine.
- On remarque que lorsque le revenu augmente x_1^* et x_2^* augmentent, les courbes d'Engel ont une pente positive : $\frac{\delta x_1^*}{\delta R} = \frac{1}{3} > 0$; $\frac{\delta x_2^*}{\delta R} = \frac{1}{3} > 0$
- Par conséquent, les biens 1 et 2 sont normaux.

Rappel du cour :
la fonction de demande d'un bien

❖ La fonction de demande d'un bien :

- Le mot demande recouvre des concepts divers, il peut désigner :
- La demande individuelle d'un consommateur, ménage ou entreprise.
- La demande totale constituée par la somme des demandes individuelles qui s'adressent à l'ensemble d'une branche.
- La demande qui se présente à une entreprise particulière vivant sur un type de marché déterminé.
- On a vu que la fonction d'utilité permettait de déterminer les quantités demandées des produits X et Y compte tenu des prix de ces produits et du revenu.
- En fait la fonction de demande d'un bien doit intégrer toutes les variables pouvant avoir une influence sur la quantité vendue de ce bien et l'équation de la fonction de demande devrait s'écrire :

$$\boldsymbol{Q_X = f(P_X, P_j, \dots \dots \dots, R, G)}$$

P_X : prix du bien X.

P_j / j=1,…..n. prix de tous les autre biens qu'ils aient ou non des liens étraits de complémentarité ou de substitution…etc avec X.

R et G : le revenu et les gouts du consommateur.

- Dans nos développements ultérieurs, nous allons utiliser la formulation :

$$Q_X = f(P_X)$$

C'est-à-dire que nous allons privilégier une seule variable qui sera le prix du bien et considérera comme des données fixées toutes les autres variables pouvant avoir une influence quelconque sur la quantité du bien X. On utilise dans ce sens les hypothèses appelées : « Ceteris Paribus » qui implique que :

1. Les gouts des consommateurs sont considérés comme constants.
2. Les revenus monétaires de ces consommateurs seront également données et constants.
3. L'utilité marginale de la monnaie est considérée comme constante.
4. Les prix des autres biens sont données et fixes.

- On admet généralement (les biens de type normal) que les courbes de demande ont une inclinaison négative, ce qui signifie que la quantité demandé est d'autant plus grande que le prix du produit est plus bas, mais il existe des cas exceptionnels où l'inclinaisons est positive en raison du snobisme des consommateur, on l'appelle l'effet de démonstration.
- Lorsque les hypothèses « Ceteris Paribus » sont respectées toute modification du prix du bien X entraine une variation de la quantité demandée le long de la courbe de demande tracée sur un diagramme. (voir fig 1)

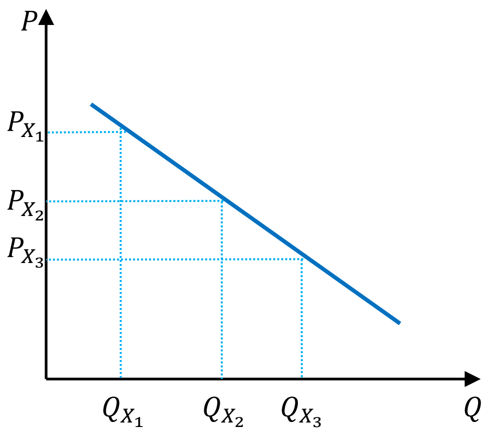


Fig (1) : courbe de demande du bien X

- Au contraire si l'une des quatre hypothèses précédentes venait à changer, ce n'est plus à un déplacement le long de la courbe mais à un déplacement de la courbe tout entière. (Fig 2)
- Si le revenu du consommateur venait à augmenter (le cas d'un bien normal) il se produirait un déplacement de la courbe de demande vers la droite ($1 \rightarrow 2$) .
- Si au contraire le prix du bien Y fortement substituable par rapport à celui étudié venait à baisser le déplacement de la courbe se ferait vers la gauche ($1 \rightarrow 3$).

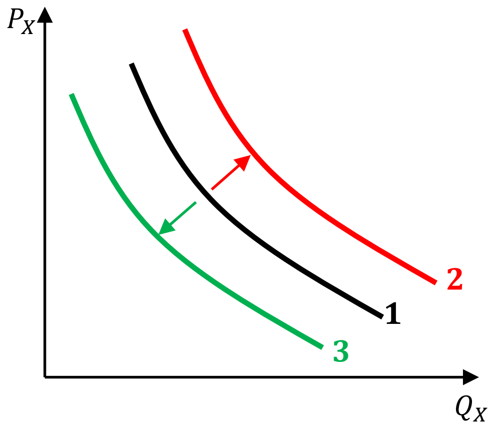


Fig (2) : déplacement de la courbe de demande du bien X

❖ ***La demande totale du marché :***

Tout ce qui a précédé concerne la demande individuelle du consommateur.

Les mêmes principes demeurent valables lorsque nous passons au stade d'agrégation plus élevé, celui de la demande de marché.

En fait cette demande de marché n'est simplement que la somme des demandes de tous les individus.

Exercice 02 :

1. Déterminer les fonctions de demande des deux biens X et Y.

Nous avons : $U = 16\,xy$

Les fonctions de demande rationnelles des deux biens X et Y sont obtenues à partir des conditions du premier ordre.

Elles donnent les quantités optimales demandées pour chaque prix et chaque valeur du revenu.

On peut écrire :

$$L = 16\,xy + \lambda(R - xP_X - yP_Y)$$

Les conditions du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x} = 16y - \lambda P_X = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{16y}{P_X} \dots (1) \\ \dfrac{\delta L}{\delta y} = 16x - \lambda P_Y = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{16x}{P_Y} \dots (2) \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda} = R - xP_X - yP_Y = 0 \Rightarrow R = xP_X + yP_Y .. (3) \end{cases}$$

Résolvons le système :

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \frac{16y}{P_X} = \frac{16x}{P_Y}$$

$$\Leftrightarrow 16y\,P_Y = 16x\,P_X$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y\,P_Y}{P_X} \dots . (4)$$

En remplaçant x par son expression dans l'équation (3) on obtient :

$$R = \frac{y\,P_Y}{P_X} P_X + yP_Y$$

$$R = 2yP_Y \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{R}{2P_Y}}$$

$$x = \frac{\frac{R}{2P_Y} P_Y}{P_X} \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{R}{2P_X}}$$

2. Déterminer l'équilibre et le niveau de l'utilité pour $\boldsymbol{R = 1000}$, $\boldsymbol{P_X = 10}$, $\boldsymbol{P_Y = 20}$:

$$x = \frac{R}{2P_X} = \frac{1000}{2\,(10)} \Rightarrow x = 50$$

$$y = \frac{R}{2P_Y} = \frac{1000}{2\,(20)} \Rightarrow y = 25$$

$$U = 16\,xy = 16\,(50)(25) \Rightarrow U = 20000$$

3. Déterminer l'équilibre et le niveau de l'utilité quand $\boldsymbol{P_X = 5}$; $\boldsymbol{P_X = \frac{5}{2}}$:

$$x = \frac{R}{2P_X} = \frac{1000}{2\,(5)} \Rightarrow x = 100$$

$$y = \frac{R}{2P_Y} = \frac{1000}{2\,(20)} \Rightarrow y = 25$$

$$U = 16\,xy = 16\,(100)(25) \Rightarrow U = 40000$$

$$x = \frac{R}{2P_X} = \frac{1000}{2\left(\frac{5}{2}\right)} \Rightarrow x = 200$$

$$y = \frac{R}{2P_Y} = \frac{1000}{2\,(20)} \Rightarrow y = 25$$

$$U = 16\,xy = 16\,(200)(25) \Rightarrow U = 80000$$

4. Tracer la courbe de prix-consommation :

Nous avons trois points d'équilibre :

$P(50\,;25)$ et $U = 20000$

$P'(50\,;25)$ et $U = 40000$

$P''(50\,;25)$ et $U = 80000$

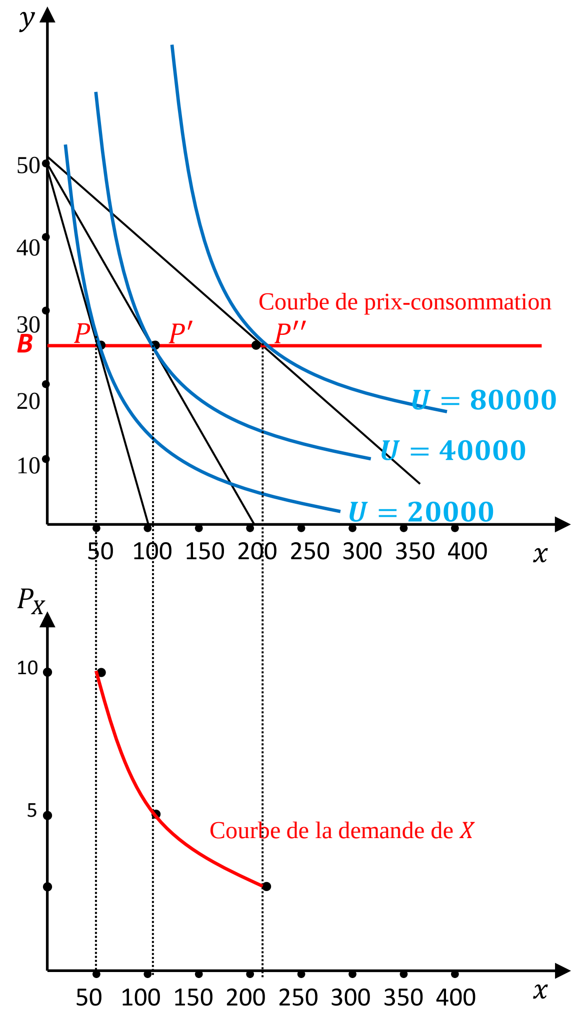


Fig (3) : courbe de prix-consommation et courbe de demande

Remarque :
La courbe de prix-consommation part du point (B) parce que la fonction de demande de Y n'intègre pas P_X.

5. ***<u>Déterminer l'équilibre et le niveau de l'utilité quand le revenu prend les valeurs $R = 2000$; $R = 3000$; $P_X = 10$; $P_Y = 20$:</u>***

$\boldsymbol{R = 2000}$

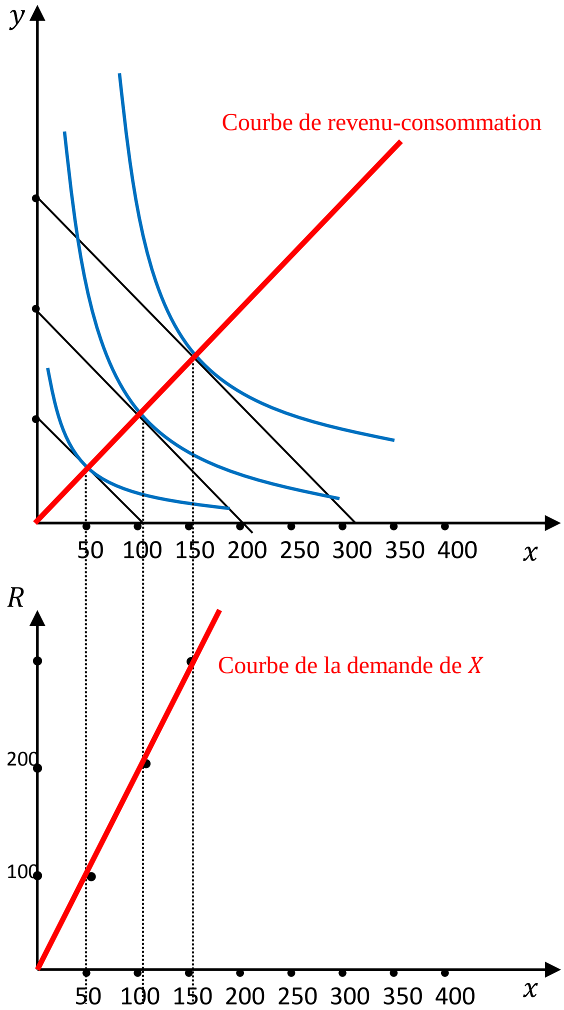
$$x = \frac{R}{2P_X} = \frac{2000}{2\,(10)} \Rightarrow x = 100$$
$$y = \frac{R}{2P_Y} = \frac{2000}{2\,(20)} \Rightarrow y = 50$$
$$U = 16\,xy = 16\,(100)(50) \Rightarrow U = 80000$$

$\boldsymbol{R = 3000}$

$$x = \frac{R}{2P_X} = \frac{3000}{2\,(10)} \Rightarrow x = 150$$
$$y = \frac{R}{2P_Y} = \frac{3000}{2\,(20)} \Rightarrow y = 75$$
$$U = 16\,xy = 16\,(150)(75) \Rightarrow U = 180000$$

6. ***<u>Tracer la courbe de revenu-consommation et déduire la courbe d'Engel du bien X :</u>***

Nous avons trois points d'équilibre :
$P(50\,;25)$
$P'(100\,;50)$
$P''(150\,;75)$



<u>Fig (4) : courbe de revenu-consommation et courbe d'Engel</u>

Exercice 03 :

1. ***Extraire les fonctions de demande en utilisant la méthode de Lagrange :***

Les fonctions de demande rationnelles des biens X et Y sont obtenues à partir des conditions du premier ordre :

$$\begin{cases} Max\ U = 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{4}} \\ {}^{S}/_{C}\ R = xP_X + yP_Y \end{cases}$$

$$L = 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{4}} + \lambda(R - xP_X - yP_Y)$$

Les conditions du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x} = 3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}} - \lambda P_X = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}}{P_X} \dots (1) \\ \dfrac{\delta L}{\delta y} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{4}} - \lambda P_Y = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{4}}}{P_Y} \dots (2) \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda} = R - xP_X - yP_Y = 0 \\ \qquad \Rightarrow R = xP_X + yP_Y \dots\dots (3) \end{cases}$$

Résolvons le système :

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \frac{3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}}{P_X} = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{4}}}{P_Y}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = \frac{2yP_Y}{P_X}}$$

En remplaçant x par son expression :

$$R = \frac{2yP_Y}{P_X}P_X + yP_Y$$

$$R = 3yP_Y$$

Et donc les fonctions de demande des deux biens X et Y sont les suivantes :

$$\boldsymbol{y = \frac{R}{3P_Y}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x = \frac{2R}{3P_X}}$$

2. ***Si*** $\boldsymbol{U = 3600}$; $\boldsymbol{P_Y = 6}$; $\boldsymbol{P_X = 12}$ ***calculer le revenu et les quantités optimale*** $\boldsymbol{x^*}$ ***et*** $\boldsymbol{y^*}$ ***:***

Pour résoudre ce problème on doit :

$$\begin{cases} Min\ R = 12\,x + 6y \\ {}^{S}/_{C}\ 3600 = 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{4}} \end{cases}$$

$$L = 12\,x + 6y + \lambda\left(3600 - 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{4}}\right)$$

Sachant que la condition d'équilibre reste la même de la première question c'est-à-dire :

$$x = \frac{2yP_Y}{P_X}$$

En remplaçant P_X et P_Y par leurs valeurs :

$$x = \frac{2y6}{12} \Rightarrow x = y$$

En remplaçant x par son expression à l'équation de la troisième condition de minimisation de R on aura :

$$3600 - 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{4}} = 0$$

$$3600 - 2y^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{4}} = 0$$

$$3600 = 2y^{\frac{9}{4}}$$

$$\Rightarrow x = y = (1800)^{\frac{4}{9}} = 27{,}97 \simeq 28$$

$$R = 12(28) + 6(28) = 504$$

3. ***Si*** $\boldsymbol{P_X = 6\ avec\ R = 504\ et\ P_Y = 6}$ ***déduire la courbe de demande de X:***

En utilisant les fonctions de demande trouvées à la question (1) on peut calculer les quantités demandées de X et Y :

$$x = \frac{2R}{3P_X} = \frac{2(504)}{3(6)} \Rightarrow x = 56$$

$$y = \frac{R}{3P_Y} = \frac{504}{3(6)} \Rightarrow y = 28$$

a. ***La courbe de demande du bien X :***

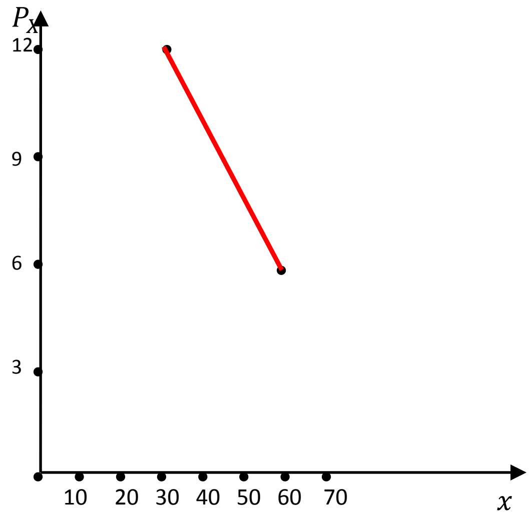


Fig : la courbe de demande du bien X

b. ***La nature de la demande pour le bien X :***

La demande du bien X est relativement élastique parce que lorsque P_X a diminué de 50% la quantité demandée a augmenté de 100%.

4. X et Y sont des biens indépendants.

Série d'exercice N° 05 :
(Les élasticités et l'effet de substitution et l'effet du revenu)

Exercice 01 :

La fonction de demande du bien X a pour expression :

$$X = R^{0,7} P_X^{-0,6} P_Y^{-0,2}$$

Avec R le revenu, P_X et P_Y les prix des deux biens.

1. Calculer les élasticités par rapport à R, P_X et P_Y. Que peut-on déduire de ces valeurs ?

Exercice 02 :

Les préférences d'un consommateur pour les biens X et Y sont exprimés par :

$$U = 4xy$$

son revenu $R = 2400$, les prix des deux biens $P_X = 40$ et $P_Y = 80$.

1. Déterminer l'équilibre du consommateur et le niveau de l'utilité.
2. Supposant que le prix du bien X prend la valeur $P_X = 10$, calculer l'effet globale (les effets de substitution et de revenu).
3. Déterminer la nature du bien X à partir de la représentation graphique.

Exercice 03 :

La fonction d'utilité d'un consommateur qui consomme deux biens, le bien 1 et le bien 2, s'écrit :

$$U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + 2x_1$$

Le revenu du consommateur s'élève à R et les prix des biens sont respectivement P_1 et P_2.

1. Etablissez les fonctions de demande du consommateur. On fait l'hypothèse que $R > 2P_2$. justifiez.
2. Quelles sont les quantités consommées à l'optimum lorsque $R = 150$, $P_1 = 15$ et $P_2 = 30$?
3. Calculez les élasticités-prix directes de la demande de chaque bien. Qu'en conclurez-vous ?
4. Evaluez l'élasticité-revenu de la demande du bien 1 et celle du bien 2. Commentez.
5. Donnez l'équation de la courbe de consommation-prix pour le prix du bien 1.
6. Le prix du bien 1 est multiplié par deux. Quelles sont les conséquences de cette augmentation sur le choix optimal du consommateur ? décomposez l'impact de la hausse du prix du bien 1 en utilisant la méthode de Hicks.

Rappel de cour :

L'élasticité de la demande
et les élasticités partielles de la demande

- L'élasticité de la demande (on considérant que la demande d'un produit est fonction d'une seule variable, le prix de ce produit).
- Les élasticités partielles de la demande (la demande du produit est fonction du prix de ce produit, des prix des autres produits, et du montant du revenu R).

❖ ***L'élasticité de la demande :***

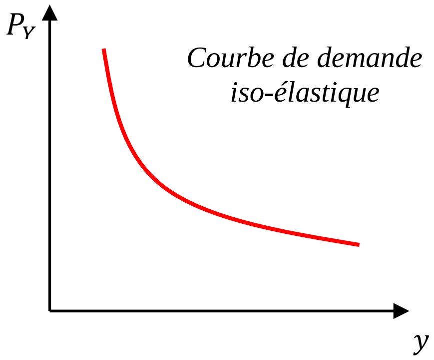
- Une demande peut être plus ou moins sensible à une modification du prix. Pour mesurer cette sensibilité, les économistes utilisent le concept d'élasticité de la demande par rapport au prix.
- Soit y la quantité demandée du bien Y et P_Y le prix de ce bien et donc la fonction de demande du bien Y s'écrit : $Y = f(P_Y)$
- L'élasticité de la demande de Y par rapport au prix s'écrira :

$$e_{y/P_Y} = \frac{la\ variation\ relative\ de\ la\ quantité\ demandé\ y}{la\ variation\ relative\ du\ prix\ P_Y}$$

$$= \frac{E_y}{E_{P_Y}} = \lim_{\Delta P_Y \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta P_Y / P_Y} = \frac{dy / y}{dP_Y / P_Y}$$

$$= \frac{dy}{dP_Y} \cdot \frac{P_Y}{y}$$

- Donc e est la limite de la variation relative de la quantité demandée y résultante d'une variation relative du prix P_Y lorsque cette variation relative du prix tend vers zéro.
- L'élasticité de la demande par rapport au prix est généralement négative parce que la demande est une fonction décroissante du prix.
- Si par exemple $e = -0{,}5$ cela signifie qu'une augmentation de 1% du prix P_Y entrainera une diminution de 0,5 % de la demande de Y.
- On appelle courbe de demande iso-élastique une courbe telle que l'élasticité est la même en tous ses points.
- Elle a pour expression $y = \frac{A}{P_Y^B}$ / A et B sont des constantes. Dans ce cas l'élasticité $e = B$, si le prix augmente de 1% la demande diminue de B%.

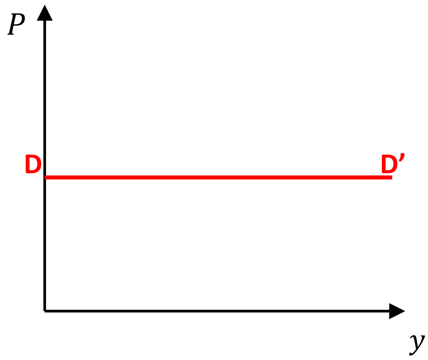


❖ ***Les principaux cas de l'élasticité :***

On distingue cinq types principaux d'élasticité de la demande :

1. Une demande parfaitement élastique :

Une variation du prix provoque une variation infiniment grande de la quantité demandée. $e = -\infty$

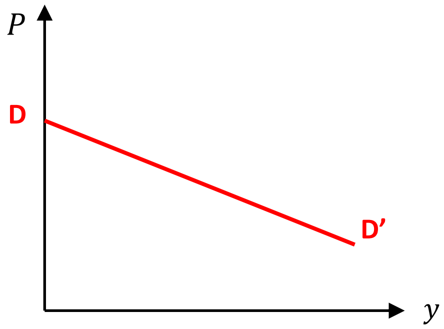


2. Une demande relativement élastique :

Une variation de prix correspond à une variation plus que proportionnelle de la quantité demandée.

$\uparrow P_X = 1\%$ provoque $\downarrow x$ plus que 1%

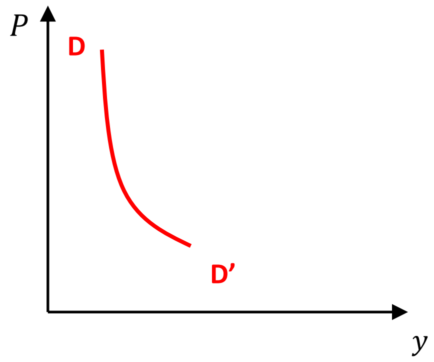
$$-\infty < e < -1$$



3. Une demande d'élasticité unitaire :

Une variation du prix entraine une variation proportionnelle de la quantité demandée.

$$e = -1$$

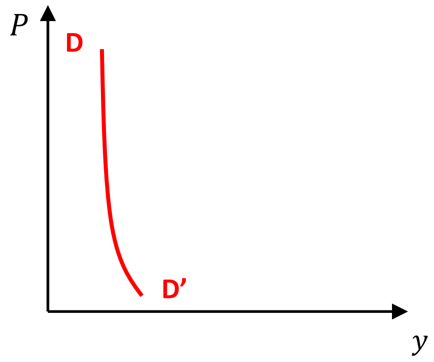


4. Une demande relativement inélastique :

Une variation du prix provoque une variation moins que proportionnelle de la quantité demandée.

$\uparrow P_X = 1\%$ provoque $\downarrow x$ moins que 1%

$$-1 < e < 0$$

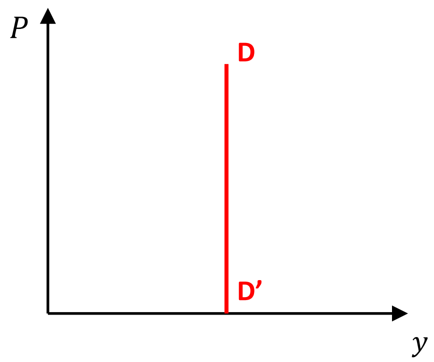


5. Une demande parfaitement inélastique :

Une variation du prix ne provoque aucune variation de la quantité demandée

.

$$e = 0$$



❖ ***Les élasticités partielles de la demande :***

On considérant que la demande du bien X est fonction de P_X , P_Y et R. La fonction de demande du bien X s'écrit :

$x = f(P_X, P_Y, R)$ on peut alors définir trois élasticités partielles de la demande :

1. ***L'élasticité partielle directe*** de la demande du bien X par rapport à son prix P_X est la proportion de l'augmentation ou la diminution de la demande de X lorsque son prix augmente de 1% alors que P_Y et R ne change pas.

$$e = \frac{E\,x}{E\,P_X} = \frac{\frac{\delta x}{x}}{\frac{\delta P_X}{P_X}} = \frac{\delta x}{\delta P_X} \cdot \frac{P_X}{x}$$

2. ***L'élasticité partielle croisée*** de la demande du bien X par rapport au prix du bien Y (P_Y) est la proportion de l'augmentation ou de la diminution de la demande de X lorsque P_Y augmente de 1% alors que P_X et R ne change pas.

$$e_{X/P_Y} = \frac{E\,x}{E\,P_Y} = \frac{\frac{\delta x}{x}}{\frac{\delta P_Y}{P_Y}} = \frac{\delta x}{\delta P_Y} \cdot \frac{P_Y}{x}$$

3. ***L'élasticité partielle de la demande du bien X par rapport au revenu R*** : est la proportion de l'augmentation ou la diminution de la demande du bien X lorsque le revenu augmente de 1%.

$$e_{X/R} = \frac{E\,x}{E\,R} = \frac{\frac{\delta x}{x}}{\frac{\delta R}{R}} = \frac{\delta x}{\delta R} \cdot \frac{R}{x}$$

$ex_{/}$	$P_X \Rightarrow e = \frac{\delta x}{\delta P_X} \cdot \frac{P_X}{x}$	$e = -\infty$ une demande parfaitement élastique
		$-\infty < e < -1$ Une demande relativement élastique
		$e = -1$ Une demande d'élasticité unitaire
		$-1 < e < 0$ Une demande relativement inélastique
		$e = 0$ Une demande parfaitement inélastique
	$P_Y \Rightarrow ex_{/P_Y} = \frac{\delta x}{\delta P_Y} \cdot \frac{P_Y}{x}$	$ex_{/P_Y} < 0$ X et Y sont des biens complémentaires
		$ex_{/P_Y} > 0$ X et Y sont des biens substituables
		$ex_{/P_Y} = 0$ X et Y sont des biens indépendants
	$R \Rightarrow ex_{/R} = \frac{\delta x}{\delta R} \cdot \frac{R}{x}$	$ex_{/R} < 0$ bien inférieur
		$0 < ex_{/R} < 1$ bien normal
		$ex_{/R} > 1$ bien supérieur.

Exercice 01 :

1. ***Calculer les élasticités par rapport à P_X , P_Y et R :***

Nous savons que la fonction de demande pour le bien X a pour expression :

$$X = R^{0,7} P_X^{-0,6} P_Y^{-0,2}$$

❖ ***L'élasticité de la demande du bien X par rapport à son prix P_X : (l'élasticité partielle directe)***

$$e = \frac{E\ x}{E\ P_X} = \frac{\frac{\delta x}{x}}{\frac{\delta P_X}{P_X}} = \frac{\delta x}{\delta P_X} \cdot \frac{P_X}{x}$$

$$e = -0{,}6\ R^{0,7} P_X^{-1,6} P_Y^{-0,2} \cdot \frac{P_X}{R^{0,7} P_X^{-0,6} P_Y^{-0,2}}$$

$\boldsymbol{e = -0,6}$ ***Une demande relativement inélastique.***

La variation du prix du bien X provoque une variation moins que proportionnelle de la quantité demandée.

Si le prix P_X augmente de 1% la quantité demandée diminue de 0,6 %.

❖ ***L'élasticité partielle croisée de la demande du bien X par rapport au prix du bien Y (P_Y) :***

$$e_{X/P_Y} = \frac{E\ x}{E\ P_Y} = \frac{\frac{\delta x}{x}}{\frac{\delta P_Y}{P_Y}} = \frac{\delta x}{\delta P_Y} \cdot \frac{P_Y}{x}$$

$$e_{X/P_Y} = -0{,}2\ R^{0,7} P_X^{-0,6} P_Y^{-1,2} \cdot \frac{P_Y}{R^{0,7} P_X^{-0,6} P_Y^{-0,2}}$$

$$\boldsymbol{e_{X/P_Y} = -0,2}$$

X et Y sont des biens complémentaires.

❖ ***L'élasticité partielle de la demande du bien X par rapport au revenu (R) :***

$$e_{X/R} = \frac{E\ x}{E\ R} = \frac{\frac{\delta x}{x}}{\frac{\delta R}{R}} = \frac{\delta x}{\delta R} \cdot \frac{R}{x}$$

$$e_{X/R} = 0{,}7\ R^{1,7} P_X^{-0,6} P_Y^{-0,2} \cdot \frac{R}{R^{0,7} P_X^{-0,6} P_Y^{-0,2}}$$

$\boldsymbol{e_{X/R}}$ **=0,7**

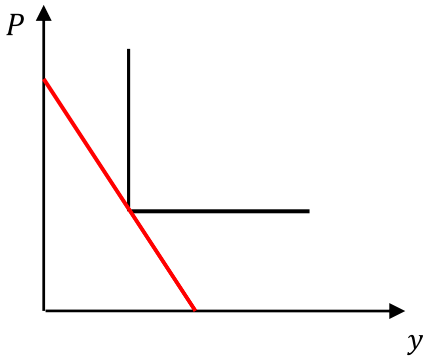
X est un bien normal.

Exemple : une variation de 5% du revenu provoque $(5 \cdot 0{,}7) = 3{,}5\%$ de la quantité demandée du bien X.

Rappel du cour :

L'effet de substitution et l'effet du revenu

- On a vu lors de nos développements précédant que toutes variation des prix des produits consommées, comme aussi toute variation du revenu du consommateur modifie la structure des dépenses de l'individu rationnel qui cherche à obtenir le maximum de satisfaction.
- Pour traduire ses situations on utilise les concepts d'effet de substitution et l'effet de revenu.
- Supposons que le consommateur utilise deux produits (non complémentaire parce que dans le cas des biens complémentaires l'effet de substitutions sera nul/ voir figure) X et Y en quantités x et y au prix P_X et P_Y et qu'il dépense tout son revenu R à l'achat de ces deux produits.



- Admettons que le prix P_X du bien X diminue, notre consommateur sera normalement incité à acheterune quantité plus importante de X parce que :
- D'une part : il substituera X à Y, puisque X est devenu relativement moins chère que Y. Cette substitution se traduira par le déplacement du point d'équilibre $(P_1 \rightarrow P_2)$ $\Rightarrow$ l'effet de substitution.
- D'autre part : le consommateur sera devenu plus riche puisque la baisse de P_X équivaut pour lui à une augmentation de son revenu réel, donc pour une meme dépense il pourra se procurer d'avantage de produits. $\Rightarrow$ l'effet de revenu.
- Pour analyser l'effet de substitution et l'effet de revenu il existe deux méthodes : méthode de Hicks et méthode de Slutsky.

Premièrement : méthode de Hicks

- Hypothèse de Hicks : la substitution se fait à satisfaction constante.
- Je recherche la position d'équilibre avec la nouvelle structure de prix et avec une satisfaction constante U_1.
- Le passage de P_1 à P_2 constitue l'effet de substitution.
- Pour calculer la position P_2 on fait :

$$\begin{cases} Min\ R = P_X' \cdot x + P_Y \cdot y \\ {}^{S}/_{C}\ U_1 = U \end{cases}$$

(Minimiser R avec une satisfaction constante).
- L'effet de revenu : au point P_2 le consommateur ne consomme pas la totalité de son revenu et donc pour le consommer il passe du point P_2 au point P_3.
- Pour calculer l'effet de revenu on fait :

$$\begin{cases} \max U \\ {}^{S}/_{C}\ R = P_X' \cdot x + P_Y \cdot y \end{cases}$$

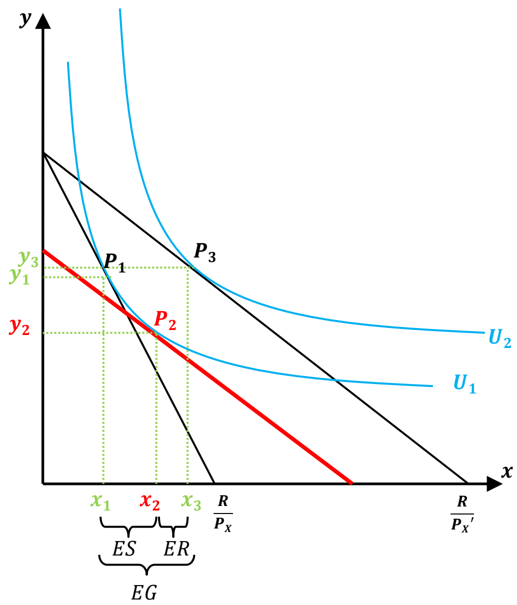


fig : méthode de Hicks

Deuxièmement : méthode de Slutsky

- Hypothèse de Slutsky : la substitution se fait à pouvoir d'achat constant.
- Pour définir l'effet de substitution il faut définir la position d'équilibre P_2 en commençant par la droite de budget qui doit répondre aux deux conditions :
    - ✓ Elle doit respecter la nouvelle structure de prix (parallèle à celle de P_3).
    - ✓ Elle doit passer par le point d'équilibre P_1 (c'est-à-dire que le pouvoir d'achat reste constant à l'initiale).
- Cette nouvelle ligne de budget va définir une nouvelle position d'équlibre P_2.
- Le passage de P_1 à P_2 constitue l'effet de substitution.
- Au point P_2 le consommateur à conserver le même pouvoir d'achat que P_1 or que son pouvoir d'achat a augmenté lorsque $\boldsymbol{P_X}$ a diminué. Et donc pour que le consommateur consomme la totalité de son revenu il va se déplacer au point P_3. (l'effet de revenu).
- Pour le calculer on fait :

$$\begin{cases} \max U \\ {}^{S}/_{C}\, R = P'_X \cdot x + P_Y \cdot y \end{cases}$$

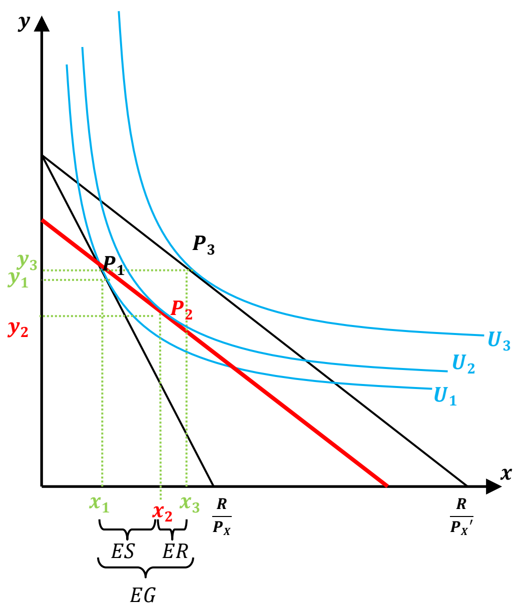


fig : Méthode de Slutsky

Et donc :

- ***Si*** $(\boldsymbol{ES})$ ***est positif*** $(\boldsymbol{x}\uparrow)$ ***et*** $(\boldsymbol{ER})$ ***est positif*** $(\boldsymbol{x}\uparrow) \Rightarrow$ ***bien normal ou bien supérieur.***
- ***Si*** $(\boldsymbol{ES})$ ***est positif*** $(\boldsymbol{x}\uparrow)$ ***et*** $(\boldsymbol{ER})$ ***est négatif*** $(\boldsymbol{x}\downarrow)$ ***avec*** $(\boldsymbol{ES}) > (ER) \Rightarrow$ ***bien inférieur.***
- ***Si*** $(\boldsymbol{ES})$ ***est positif*** $(\boldsymbol{x}\uparrow)$ ***et*** $(\boldsymbol{ER})$ ***est négatif*** $(\boldsymbol{x}\downarrow)$ ***avec*** $(\boldsymbol{ES}) < (ER) \Rightarrow$ ***bien de Giffen.***

- ***Le bien de Giffen se défini par les points suivants :***
    - ✓ ***C'est un bien inférieur.***
    - ✓ ***Il n'existe pas de bien substituable au bien considéré.***
    - ✓ ***Il représente un pourcentage considéré du revenu du consommateur.***

Exercice N° 02 :

Nous avons : $U = 4\,xy$
Avec $R = 2400$, $P_X = 40$, $P_Y = 80$

1. ***Déterminer l'équilibre du consommateur et le niveau de l'utilité :***

$$\begin{cases} Max\ U = 4\,xy \\ {}^{S}/_{C}\ 2400 = 40x + 80y \end{cases}$$

En utilisant la méthode mathématique :
De l'équation du budget on tire y en fonction de x comme suit :
$2400 = 40x + 80y$
$40x = 2400 - 80y$
$x = 60 - 2y$
En remplaçant x par sa valeur dans la fonction de l'utilité on obtient :
$U = 4\,xy$
$U = 4\,(60 - 2y)y$
$U = 240\,y\ - 8y^2$
La fonction d'utilité devient une fonction à une seule variable (y) pour maximiser cette fonction :

$$\begin{cases} U'_y = 0 \\ U''_y < 0 \end{cases}$$

$U'_y = 240 - 16y = 0$
$\Rightarrow y = 15 \quad x = 30 \quad U = 1800$

2. ***Calculer l'effet globale :***

(Méthode de J.R.Hicks)

$$l'effet\ globale = l'effet de\ substitution + l'effet du\ revenu$$

❖ ***L'effet de substitution :***

$$\begin{cases} Min\ R = 10x + 80y \\ {}^{S}/_{C}\ 1800 = 4\,xy \end{cases}$$

En utilisant la méthode géométrique :

$$\frac{Umg_X}{Umg_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{4y}{4x} = \frac{10}{80}$$
$$\Leftrightarrow x = 8y$$

En remplaçant dans la fonction de l'utilité :
$1800 = 4\,(8y)y$
$1800 = 32y^2$
$\Rightarrow y = 7{,}5 \quad x = 60 \quad R = 1200$
« L'effet de substitution s'agit de substituer 30 unités de x à 7,5 unités de y ».
$\Delta x = 60 - 30 = 30$
$\Delta y = 7{,}5 - 15 = -7{,}5$

❖ ***L'effet du revenu :***

$$\begin{cases} Max\ U = 4\,xy \\ {}^{S}/_{C}\ 2400 = 10x + 80y \end{cases}$$

En utilisant directement la condition d'équilibre :

$$\frac{Umg_X}{Umg_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{4y}{4x} = \frac{10}{80}$$
$$\Leftrightarrow x = 8y$$

En remplaçant dans l'équation du budget :
$2400 = 10\,(8y) + 80y$
$\Rightarrow \quad y = 15 \quad x = 120 \quad U = 7200$
« *Donc l'effet de revenu s'agit de l'augmentation des quantités achetés des deux biens X et Y* ».

$\Delta x = 1200 - 60 = 60$
$\Delta y = 15 - 7{,}5 = 7{,}5$

« *Donc l'effet globale s'agit de l'augmentation de la quantité demandée du bien X par 90 unités et la stabilité de la quantité demandée de Y* ».

$\Delta x = 30 + 60 = 90$
$\Delta y = -7{,}5 + 7{,}5 = 0$

3. ***Déterminer la nature du bien X à partir du graphe :***

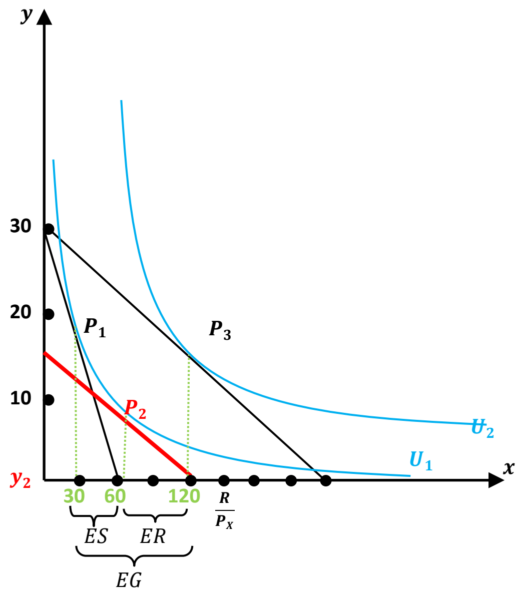


fig : représentation de l'effet de substitution et de l'effet de revenu par le recours à la méthode de Hicks.

Puisque (ES) ***est positif*** $(x\uparrow)$ ***et*** (ER) ***est positif*** $(x\uparrow)$ $\Rightarrow$ ***donc X est un bien normal ou bien supérieur.***

Remarque : pour faciliter la tache de la représentation graphique on commence par la représentation des trois droite de budget puis on passe a la représentation des deux courbes d'indifférence.

Exercice 03 :

1. *Etablir les fonctions de demande du consommateur :*

Il s'agit de déterminer les demandes Marshalliennes. Pour cela il faut résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} Max\ U = x_1\, x_2\ + 2x_1 \\ {}^{s}/_{c}\ R = P_1\, x_1 + P_2 x_2 \end{cases}$$

$$L = x_1\, x_2\ + 2x_1 + \lambda(R - P_1\, x_1 - P_2 x_2)$$

1ère condition :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta x_1} = x_2\ + 2 - \lambda P_1\ = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{x_2\ + 2}{P_1} \ldots\ldots\ldots(1) \\ \dfrac{\delta L}{\delta x_2} = x_1 - \lambda P_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{x_1}{P_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots(2) \\ \dfrac{\delta L}{\delta \lambda} = R - P_1\, x_1 - P_2 x_2 = 0 \Rightarrow R = P_1\, x_1 + P_2 x_2 \ldots(3) \end{cases}$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow \frac{x_2\ + 2}{P_1} = \frac{x_1}{P_2}$$

$$x_1 = \frac{P_2(x_2\ + 2)}{P_1} \ldots\ldots\ldots(4)$$

En remplaçant (4) dans (3) :

$$R = P_1 \frac{P_2(x_2\ + 2)}{P_1} + P_2 x_2$$

$$R = 2P_2 x_2 + 2P_2$$

$$x_2^* = \frac{R - 2P_2}{2P_2}$$

$$x_1^* = \frac{P_2\left(\dfrac{R - 2P_2}{2P_2}\ + 2\right)}{P_1}$$

$$x_1^* = \frac{R + 2P_2}{2P_1}$$

- L'hypothèse $R > 2P_2$ est faite pour éviter une solution en coin et garantir l'existence d'une solution intérieure pour laquelle $x_1^* > 0$ et $x_2^* > 0$.
- En effet si cette condition n'était pas respectée, nous aurions $x_2^* = 0$ et $x_1^* = \frac{R}{P_1}$

2. *Les quantités consommées à l'optimum lorsque* $\boldsymbol{R = 150\ ,\ P_1\ = 15\ ,\ P_2 = 30}$ ***:***

$$x_1^* = \frac{R + 2P_2}{2P_1} = \frac{150 + 2(30)}{2(15)} = 7$$

$$x_2^* = \frac{R - 2P_2}{2P_2} = x_2^* = \frac{150 - 2(30)}{2(30)} = 1{,}5$$

3. ***Calculer les élasticités-prix directes de la demande de chaque bien :***

« L'élasticité-prix directe de la demande du bien 1 mesure la sensibilité de cette demande à une variation du prix du bien 1, toutes choses égales par ailleurs ».

$$e_{x_1/P_1} = \frac{\textit{variation relative de la quantité}}{\textit{la variation relative du prix}} = \frac{\frac{dx_1}{x_1}}{\frac{dP_1}{P_1}} = \frac{dx_1}{dP_1}\cdot\frac{P_1}{x_1}$$

$$e_{x_1/P_1} = \frac{-2(R+2P_2)}{4\,P_1^2}\cdot\frac{2\,P_1^2}{(R+2P_2)}$$

$$e_{x_1/P_1} = -1$$

Ce qui signifie que si P_1 augmente de 1% la quantité demandée de x_1 va diminuer de 1%.
Donc la demande du bien 1 est une demande d'élasticité unitaire.

$$e_{x_2/P_2} = \frac{dx_2}{dP_2}\cdot\frac{P_2}{x_2}$$

$$\frac{dx_2}{dP_2} = \frac{-2(2P_2)-2(R-2P_2)}{2\,P_2^2} = \frac{-4P_2-2R+4P_2)}{2\,P_2^2} = \frac{-R}{2\,P_2^2}$$

$$e_{x_2/P_2} = \frac{-R}{2\,P_2^2}\cdot\frac{2\,P_2^2}{(R-2P_2)}$$

$$e_{x_2/P_2} = \frac{-R}{(R-2P_2)}$$

$R\mu > R-2P_2$ d'où $\frac{R}{(R-2P_2)} > 1$

Donc $e_{x_2/P_2} < -1$

La demande du bien 2 est relativement élastique.

4. ***Calculer l'élasticité-revenu de la demande du bien 1 et celle du bien 2 :***

« l'élasticité revenu de la demande du bien 1 mesure la sensibilité de la demande du bien 1 à une variation du revenu, toutes choses égales par ailleurs ».

$$e_{x_1/R} = \frac{\textit{variation relative de la quantité}}{\textit{la variation relative du revenu}} = \frac{\frac{dx_1}{x_1}}{\frac{dR}{R}} = \frac{dx_1}{dR}\cdot\frac{R}{x_1}$$

$$e_{x_1/R} = \frac{1}{2P_1}\cdot\frac{2P_1\,R}{(R+2P_2)} = \frac{R}{R+2P_2}$$

Cette élasticité est positive $e_{x_1/R} > 0$ et puisque $R < R+2P_2 \Rightarrow 0 < e_{x_1/R} < 1$

Quand le revenu du consommateur augmente de 1% la demande du bien 1 augmente de moins que 1%.

Donc le bien 1 est un bien normal et de première nécessité.

$$e_{x_2/R} = \frac{dx_2}{dR}\cdot\frac{R}{x_2}$$

$$e_{x_1/R} = \frac{1}{2P_2}\cdot\frac{2P_2\,R}{(R-2P_2)} = \frac{R}{R-2P_2}$$

Puisque $R > R-2P_2 \Rightarrow e_{x_1/R} > 1$

Quand le revenu du consommateur augmente de 1% la demande du bien 2 augmente de plus que 1%.

Donc le bien 2 est un bien de luxe (bien supérieur).

5. ***L'équation de la courbe de consommation-prix pour le bien 1 :***

L'équation de la courbe de consommation-prix pour le bien 1 se détermine de la façon suivante :

A l'optimum nous avons :

$$\frac{x_2\ +2}{P_1} = \frac{x_1}{P_2}$$

$$x_1 = \frac{P_2(x_2\ +2)}{P_1}$$

Dans notre cas il n'y a que P_1 qui varie, P_2 est constant et égal à 30 :

$$x_1 = \frac{30x_2\ +60}{P_1}$$

En remplaçant x_1 par sa valeur dans l'équation du budget on aura :

$$R = P_1\,x_1 + P_2x_2$$

$$150 = 30x_2\ + 60 + 30x_2$$

$x_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $x_2 = f(x_1)$

La courbe de consommation-prix pour le bien 1 est donc une droite parallèle à l'axe des abscisses d'ordonné $x_2 = 1{,}5$. Ceci signifie que lorsque le prix du bien 1 augmente, la demande de ce bien diminue, mais cette augmentation du prix n'a aucun effet sur la demande du bien 2 qui reste constante et égale à 1,5.

6. *Décomposer l'impact de la hausse du prix du bien 1 en utilisant la méthode de Hicks :*

Nous avons le premier point d'équilibre :
$R = 150$, $P_1 = 15$, $P_2 = 30$:
$\boldsymbol{x_1^* = 7} \quad \boldsymbol{x_2^* = 1,5} \quad \boldsymbol{U^* = {}^{49}/_2}$

❖ ***L'effet de substitution :***
$P_1 = 30$, $P_2 = 30$, $U^* = {}^{49}/_2$

$$\begin{cases} Min\ R = 30x_1 + 30x_2 \\ {}^{S}/_{C}\ {}^{49}/_2 = x_1 x_2 + 2x_1 \end{cases}$$

En utilisant la condition d'équilibre :

$$\frac{Umg_{x_1}}{Umg_{x_2}} = \frac{P_1}{P_2}$$
$$\frac{x_2 + 2}{x_1} = \frac{P_1}{P_2}$$
$$x_1 = x_2 + 2$$

En remplaçant x_1 par sa valeur :
${}^{49}/_2 = (x_2 + 2)\, x_2 + 2(x_2 + 2)$
${}^{49}/_2 = x_2^2 + 4x_2 + 4$
$x_2^2 + 4x_2 - 20,5 = 0$
$\Delta' = 24,5 \quad x_2' = 2,94 \quad x_2'' = -6,94$
$\boldsymbol{x_1^* = {}^{7}/_2} \quad \boldsymbol{x_2^* = 2,94} \quad \boldsymbol{R = 237}$
Le passage du point (P_1) au point (P_2) représente l'effet de substitution
$(ES = x_1'' - x_1' = 4,94 - 7 = -2,06)$
(*Effet de substitution négatif*).

❖ ***L'effet du revenu :***
$P_1 = 30$, $P_2 = 30$, $R = 150$

$$\begin{cases} Max\ U = x_1 x_2 + 2x_1 \\ {}^{S}/_{C}\ 150 = 30\, x_1 + 30x_2 \end{cases}$$

$$\frac{Umg_{x_1}}{Umg_{x_2}} = \frac{P_1}{P_2}$$
$$\frac{x_2 + 2}{x_1} = 1$$
$$x_1 = x_2 + 2$$

En remplaçant x_1 par sa valeur dans l'équation de budget on aura :

$150 = 30\,(x_2 + 2) + 30x_2$
$150 = 60x_2 + 60$
$\boldsymbol{x_1^* = {}^{7}/_2} \quad \boldsymbol{x_2^* = {}^{3}/_2} \quad \boldsymbol{U^* = 17,5}$

Le passage du point (P_2) au point (P_3) représente l'effet du revenu.
$(ER = x_1''' - x_1'' = {}^{7}/_2 - 4,94 = -1,44)$
(*effet de revenu négatif*).

$ES(-)et\ ER(-)\ \Rightarrow bien\ normal\ ou\ supérieur$

Théorie du comportement du producteur

Présentation générale de la théorie du comportement du producteur

Introduction générale :

- Dans le même cadre d'analyse on va étudier « la théorie du comportement du producteur » et comme introduction on va poser la question suivante : quel est l'objectif que poursuit une entreprise ? l'hypothèse la plus simple est que l'objectif du producteur s'agit de maximiser son profit, et pour cela le producteur doit déterminer le programme de production qui répond aux deux questions suivantes :
    - ❖ Comment produire ? le choix de la technique de production.
    - ❖ Combien produire ? le volume, la quantité de production.
- Il est donc nécessaire de caractériser la fonction de production, cette fonction décrit la relation entre la quantité produite d'un bien et les quantités des différents facteurs nécessaire à sa fabrication.
- Et par conséquent la théorie du comportement du producteur va porter sur les points suivants :
    - ✓ **La fonction de production.**
    - ✓ **Les notions de productivité totale, moyenne et marginale.**
    - ✓ **Les isoquantes et le TMST.**
    - ✓ **Le comportement rationnel du producteur.**
    - ✓ **L'homogénéité d'une fonction de production.**
    - ✓ **La règle de l'épuisement du produit (théorème d'Euler).**
    - ✓ **La fonction de Cobb-Douglas).**
    - ✓ **La fonction CES.**
    - ✓ **Les coûts de production en courte période (CT, CM, Cmg, SR, SF).**
    - ✓ **La maximisation du profit (directe et indirecte).**
    - ✓ **De la fonction de coût à la fonction de l'offre :**
        - ❖ **Détermination du niveau de production (concurrence).**
        - ❖ **Construction de la fonction de l'offre.**

Série d'exercice N° 06 :
(La fonction de production)

Exercice 01 :

Un bien noté Q est produit à l'aide de deux facteurs de production, du travail (L) et du capital (K). En courte période on considère que l'entreprise n'a pas la possibilité de faire varier son stock de capital (K). La production du bien Q varie alors en fonction du nombre d'unités de facteur (L) (une unité correspondant à une heure de travail), et la production réalisée en fonction de la valeur de (L) est donnée dans le tableau 1.

Unités de travail (L)	Nombre d'unités produites (Q)
0	0
1	64
2	224
3	442
4	640
5	800
6	864
7	864
8	784

Tableau 01 : la production (Q) en fonction de (L)

1. Rappeler les définitions des productivités totales, moyennes et marginales et les calculer à partir du tableau (01).
2. Représenter graphiquement les diverses courbes de productivités.
3. Quelle la productivité moyenne horaire lorsque $L = 4$ et $L = 6$?
4. Que signifie l'existence d'une productivité marginale positive ? négative ? nulle ?
5. Les valeurs des productivités du travail varient lorsque le nombre d'heures augmente. Quel lien peut-on établir entre la valeur de la productivité marginale et l'augmentation du nombre d'heures de travail. Même question pour la productivité totale.

Exercice 02 :

La production d'une usine automobile s'effectue à l'aide de 4 facteurs de production : les machines et les bâtiments (capital technique K_1) , des matières premières (capital circulant K_2) , du personnel de production (L_1), du personnel d'administration et de gestion (L_2). Donner la définition de la productivité totale, moyenne, et marginale de chaque facteur en soulignant les conditions qui doivent être admises pour poser ces définitions.

Exercice 03 :

A la suite d'une enquête d'une entreprise fabriquant un bien Q à l'aide d'un stock d'équipement donné K_0 et de facteur de travail L. On a pu constater que la quantité produite par unité de travail évoluait comme il est montré au tableau.

Nombre d'unités de facteur travail (L)	Quantité produite par unité de facteur (L)
0	0
1	10
2	12
3	13
4	13
5	12,2
6	11
7	9,43
8	8

Tableau (02) : quantité produite par unité de facteur (L)

1. Calculer la productivité totale et la productivité marginale du facteur travail et représenter les résultats dans un tableau.
2. Donner la représentation graphique des trois courbes de productivité du travail et délimiter à partir de cette représentation la zone dans laquelle on observe :
   - Une augmentation simultanée de la productivité totale, la productivité moyenne et la productivité marginale.
   - Une augmentation de la productivité totale et une diminution des productivités moyenne et marginale.
3. Avant de connaitre les résultats de cette enquête, le nombre d'unités de travail utilisé pour la fabrication du bien Q était égal à 6. En raisonnant par rapport à cette position, que devra décider l'entrepreneur, si le stock d'équipement ne peut être modifié, pour :
   - Accroitre la productivité marginale du travail. (fixer la limite des possibilités offertes).
   - Rendre maximum la productivité totale.

Rappel du cour :

Les facteurs de production et la fonction de production :

- ***Les facteurs de production***
  - ***Définition.***
  - ***Les caractéristiques.***

- ***La fonction de production***
  - ***Définition.***
  - ***La fonction de production de courte période.***
  - ***La fonction de production de longue période.***

Introduction :

- Quel est l'objectif que poursuit une entreprise (un producteur) ?
- L'hypothèse la plus simple est que l'objectif du producteur est de maximiser son profit, pour cela le producteur doit déterminer le programme de production qui répond aux deux questions suivantes :
  - ✓ Comment produire ? le choix de la technique de production.
  - ✓ Combien produire ? le volume, la quantité de production.
- Il est donc nécessaire de caractériser la fonction de production, cette fonction décrit la relation entre la quantité produite d'un bien quelconque et les quantités des différents facteurs nécessaires à sa fabrication.

Les facteurs de production et la fonction de production :

1. Les facteurs de production :

- Définition :

- *« Les facteurs de production (inputs) sont les biens et/ou services que le producteur utilise pour fabriquer ses propres biens et/ou services (output) ».*
- Lorsque les facteurs sont disponibles dans la nature (ex : la terre, le pétrole, le travail) il s'agit de facteurs dit primaires. Mais lorsqu'ils sont produits par d'autres entreprises ce sont des consommations intermédiaires (ex : les services d'assistance, informatique, l'acier).
- Le producteur combine ces facteurs d'une certaine manière pour réaliser sa production.

- Les caractéristiques :

- Les facteurs de production présentent les caractéristiques suivantes :
  - ✓ **La divisibilité :** un facteur de production est supposé pouvoir être utilisé dans des quantités aussi petite que possible.
  - ✓ **La substituabilité ou la complémentarité :** lorsque le producteur peut remplacer une quantité donnée d'un facteur de production par une quantité d'un autre facteur sans modifier son niveau de production, les facteurs sont dits substituables (ex : substitution entre machines et hommes). A l'inverse lorsque les facteurs de production doivent être combinés dans une proportion fixe pour qu'un certain niveau de production soit atteint ils sont complémentaires.
  - ✓ **La variabilité ou la fixité :** un facteur de production variable est un facteur dont la quantité varie en fonction du niveau de production (ex : matière première, travail) tandis qu'un facteur fixe est un facteur dont la quantité ne peut pas être modifiée pendant la période de production. Cette distinction est fonction de la période de temps considérée car en courte période il est impossible de modifier certains facteurs (ex : machines, bâtiments) par contre en longue période tous les facteurs de productions sont variables.

2. La fonction de production :

- Définition :

- *« La fonction de production décrit la relation entre la quantité produite d'un bien quelconque et les quantités de différents facteurs nécessaire à sa fabrication ».*
- En posant Q la quantité produite d'un bien (évaluée en unités physiques). K, L, T les quantités utilisées de chacun des facteurs. La fonction de production s'écrit :

$$Q = f(K, L, T)$$

K: le capital.
L: le travail (heures de travail).
T: terre (Hectares…).

- Le capital et le travail sont les deux facteurs retenus dans le cadre de notre analyse.

- La fonction de production de courte période :

- On courte période on suppose que le facteur capital est constant et que le facteur travail est variable et donc l'ajustement de la quantité produite se fait en variant les quantités utilisées du facteur travail (L).

- Dans ce cas la fonction de production s'écrit : $Q = f(\overline{K}, L)$, cette fonction permet de mettre en évidence trois concepts de productivités : la productivité totale, la productivité moyenne et la productivité marginale.
  - ✓ La productivité totale du travail se définit comme la production résultante de l'utilisation d'un certain nombre d'unités de facteur travail (L) avec une quantité fixée de l'autre facteur de production.
  - ✓ La productivité moyenne du travail (PM_L) est définie comme la quantité produite par unité de facteur travail. $PM_L = \frac{Q}{L}$.
  - ✓ La productivité marginale du travail (Pmg_L) est définie comme la quantité de produit Q supplémentaire résultante de l'augmentation de l'utilisation du facteur (L) par une seule unité.
    $Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$.

La représentation des trois productivités et l'analyse des formes des courbes et leurs positions respectives ainsi que la loi des rendements marginaux décroissants seront analysés à travers les exercices de la série.

- ***La fonction de production de longue période :***

On suppose que tous les facteurs de production sont variables. On verra ce point avec plus de détails en abordant la série de TD N° 02.

Série d'exercice N° 06 :

Exercice 01 :

1. *Les notions de productivité totale, moyenne et marginale :*

La production du bien Q est assurée à l'aide de deux facteurs de production, le travail (L) et le capital (K). Ceci peut s'écrire : $Q = f(K, L)$. En courte période le stock du capital est fixe donc : $Q = f(K_0\,, L)$.

❖ ***Les définitions :***

- La productivité totale du travail (PT_L) se définit comme la production résultante de l'utilisation d'un certain nombre d'unités de facteur travail (L) avec une quantité fixée de l'autre facteur de production.
- La productivité moyenne du travail (PM_L) est définie comme la quantité produite par unité de facteur travail. $PM_L = \frac{Q}{L}$.
- La productivité marginale du travail (Pmg_L) est définie comme la quantité de produit Q supplémentaire résultante de l'augmentation de l'utilisation du facteur (L) par une seule unité. $Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$.

❖ ***Calculer les valeurs de PT_L, PM_L et Pmg_L :***

L	Q	$PM_L = \frac{Q}{L}$	$Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$
0	**0**	/	/
1	**64**	**64**	**64**
2	**224**	**112**	**160**
3	**442**	**147,33**	**218**
4	**640**	**160**	**198**
5	**800**	**160**	**160**
6	**864**	**144**	**64**
7	**864**	**123,43**	**0**
8	**784**	**98**	**− 80**

2. *La représentation graphique :*

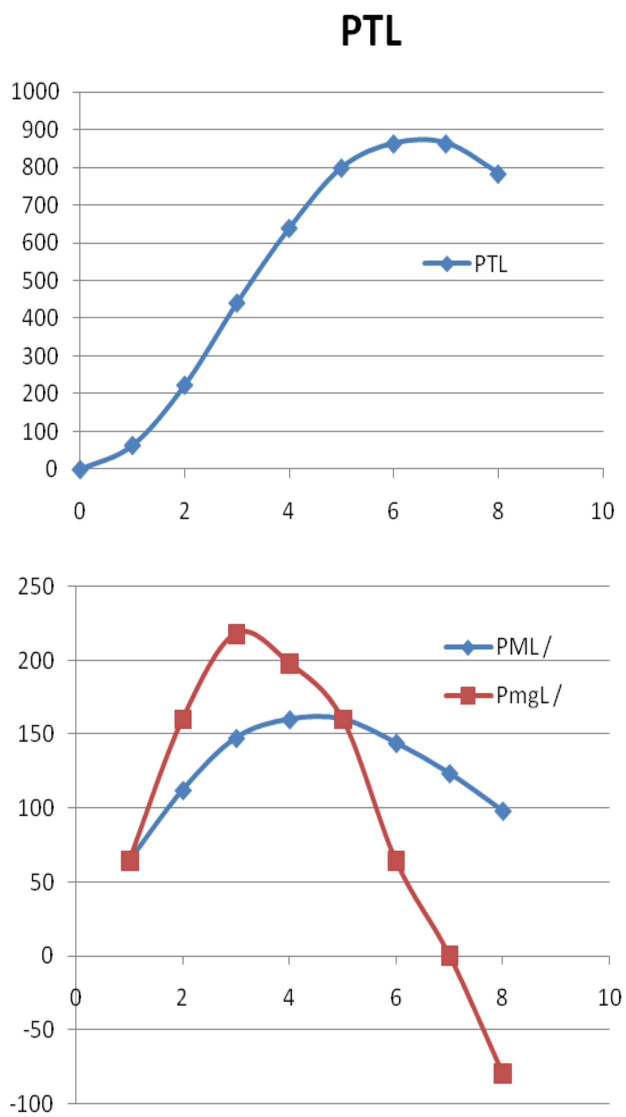


Fig : représentation graphique de PT_L, PM_L et Pmg_L

3. *La productivité horaire lorsque $L = 4$ et $L = 6$:*

- La productivité horaire est équivalente à la productivité moyenne du facteur L.

$L = 4 \Rightarrow Q = 640$

$$\Rightarrow la\ productivit\acute{e}\ horaire = PM_L = \frac{Q}{L} = 160$$

$L = 6 \Rightarrow Q = 864$

$$\Rightarrow la\ productivit\acute{e}\ horaire = PM_L = \frac{Q}{L} = 144$$

4. *La signification du signe de Pmg_L :*

- Pmg_L positive $\Rightarrow$ la productivité totale augmente du fait de l'utilisation d'une unité supplémentaire du facteur L.
- Pmg_L négative $\Rightarrow$ l'utilisation d'une unité supplémentaire du facteur L entraine une

baisse de la quantité totale produite. (ex : les engrais). Ex : quand L passe de 7 à 8, $\Delta Q = -80$.

- Pmg_L négative $\Rightarrow$ l'utilisation d'une unité supplémentaire du facteur L laisse la production totale inchangée. Ex : quand L passe de 6 à 7, $\Delta Q = 0$.

5. ***Le problème posé dans cette question est le suivant :***

- Quelle est la liaison entre une productivité marginale croissante ou décroissante et la production totale ?
- On peut constater soit sur le tableau ou sur la figure que :
  - ✓ Si $Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$ augmente la productivité totale s'accroit à un rythme qui s'accélère (entre $L = 0$ et $L = 3$).
  - ✓ Si $Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$ diminue la productivité totale s'accroit à un rythme ralenti la quantité de produit ajoutée à chaque utilisation additionnelle de facteur est de plus en plus faible (entre $L = 3$ et $L = 6$).
  - ✓ Quand $Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$ s'annule ($L = 7$) la courbe de productivité totale atteint son maximum.
  - ✓ Et enfin lorsque $Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$ est négative la productivité totale décroit.

On peut résumer ses diverses liaisons à l'aide du tableau suivant :

Valeur de L	0 1 2 3	4 5 6 7	8
$Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$	**positive**	**positive** nulle	**négative**
Sens de variation de $Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$	**croissante** maximum	**décroissante**	
Sens de variation de PT_L	**Croissance plus que proportionnelle à l'utilisation de L**	**Croissance moin que** maximum **proportionnelle à l'utilisation de L**	**décroissance**

Remarque (1) :

La loi des rendements marginaux décroissant
La loi de la productivité marginale décroissante

- ***« La loi des rendements marginaux décroissants énonce qu'un facteur variable ajouté en quantité égales à une quantité donnée d'un facteur fixe, entraine à partir d'un certain point une diminution des quantités additionnelles de production.***
- ***A partir du point d'inflexion de la courbe de productivité totale les rendements marginaux sont décroissants.***

Remarque (2) :

Exemple sur la décroissance de la productivité totale après le point maximum :

- ***Chaque machine a sa limite technique par exemple dans chaque 1000 unité produites 5 unités portent des defaults et en augmentant la vitesse et le temps du travail de cette machine elle peut atteindre 1200 unités produites mais parmi ces 1200 unité on trouve 210 unités portants des default et donc elles ne sont pas destinées à la vente ce qui nous donne :***
  - ✓ ***Dans le premier cas lorsqu'on travaillait moins (6 heures) on produisait 995 unités (1000–5).***
  - ✓ ***Dans le deuxième cas lorsqu'on travaillait plus (7 heures) on produisait 990 unités (1200–210).***
- ***Et c'est pour cela qu'il ne faut pas dépasser les limites de la machine mentionnées dans sa fiche technique.***
- ***On appelle ce phénomène la limite de la technique de production c'est-à-dire avec un certain nombre de machine et de travailleurs on ne peut pas dépasser un certain seuil de production (la production maximale) et la seule solution d'augmenter la production sera l'investissement et l'achat de nouveaux équipements ou bien l'utilisation d'une nouvelle technologie et dons tous ces cas le facteur K varie, donc nous nous trouvons dans la longue période.***

Exercice 02 :

Les quatre facteurs de production d'automobiles sont les suivants :

K_1 : le capital technique.

K_2 : le capital circulant.

L_1 : le personnel de production.

L_2 : le personnel administratif et de gestion.

Si on appelle Q le nombre d'unités de produit, on peut donc écrire la fonction de production :

$$Q = f(K_1, K_2, L_1, L_2)$$

- Pour chaque facteur, il est possible de définir une productivité totale, une productivité moyenne et une productivité marginale.
- Ces valeurs seront obtenues en considérant comme constants tous les facteurs de production, sauf un, celui dont on cherche à établir les productivités.

❖ ***Le facteur L_1 :***

- ✓ La productivité totale du facteur L_1 est la quantité produite des automobiles on utilisant un certain nombre d'unité de facteur L_1. Cette productivité sera obtenu en considérant que les valeurs K_1, K_2, L_2 sont fixées : $K_1 = \overline{K_1}$, $K_2 = \overline{K_2}$, $L_2 = \overline{L_2}$ et on fait varier la valeur de L_1.
  Donc $Q = f(\overline{K_1}, \overline{K_2}, L_1, \overline{L_2})$.
- ✓ La productivité moyenne du facteur L_1 est la quantité produite par unité de facteur L_1 . la PM_{L_1} sera obtenue en faisant le rapport :
  $$\frac{Q}{L_1} = \frac{f(\overline{K_1}, \overline{K_2}, L_1, \overline{L_2})}{L_1}$$
- ✓ La productivité marginale du facteur L_1 est la quantité de produit supplémentaire résultante de l'augmentation d'une unité de facteur L_1 les quantités des autres facteurs restants inchangées.
  La productivité marginale du facteur L_1 se calculera à partir du rapport $\frac{\Delta Q}{\Delta L_1}$.

❖ On pourrait de la même façon établir les productivités des autres facteurs.

Le facteur K_1 : $Q = f(K_1, \overline{K_2}, \overline{L_1}, \overline{L_2})$

Le facteur K_2 : $Q = f(\overline{K_1}, K_2, \overline{L_1}, \overline{L_2})$

Le facteur L_2 : $Q = f(\overline{K_1}, \overline{K_2}, \overline{L_1}, L_2)$ -

Exercice 03 :

1. *Calcule de la productivité totale et de la productivité marginale du facteur L :*

- Au tableau (2) on dispose de l'information sur la quantité produite par unité de facteur L. Donc on a la productivité moyenne.
- On sait que $PM_L = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = PM_L \cdot L$
- Le tableau suivant rassemble les calculs :

Nombre d'unité de facteur L	Quantité produite par unité de L $PM_L = \frac{Q}{L}$	Productivité totale $PT_L = PM_L \cdot L$	Productivité marginale $Pmg_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$
0	0	0	/
1	10	10	10
2	12	24	14
3	13	39	15
4	13	52	13
5	12,2	61	9
6	11	66	5
7	9,43	66	0
8	8	64	-2

2. *La représentation graphique et la délimitation des zones :*

A partir de la représentation graphique il est possible de délimiter les zones demandées :

❖ PT_L, PM_L, Pmg_L augmentent simultanément lorsque L passe de 0 à 3 unités.

❖ PT_L augmente et PM_L, Pmg_L diminuent lorsque L passe de 4 à 7 unités.

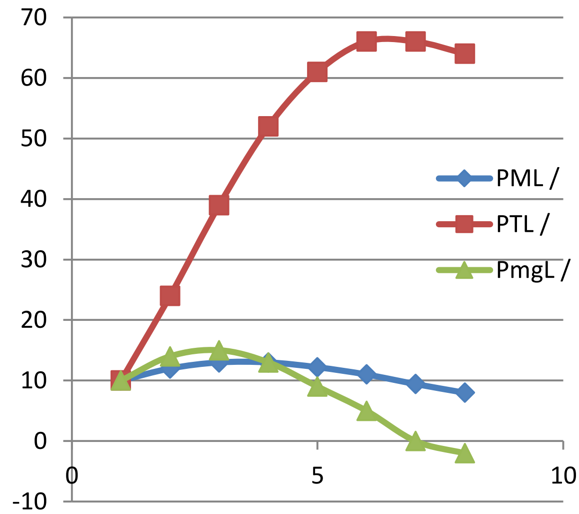


Fig : représentation graphiques des trois productivités : totale, moyenne et marginale.

3. Pour accroitre la Pmg_L l'entreprise doit réduire son utilisation du facteur L jusqu'à $L = 3$.
   L'adjonction de la troisième unité de facteur est celle qui conduit à la production additionnelle la plus élevée.
   Si l'objectif de l'entreprise est de rendre maximum la productivité totale PT_L , elle devra accroitre la quantité de Ljusqu'à 7, c'est-à-dire jusqu'au moment où la productivité marginale s'annule.

Série d'exercices N° 07
(La phase de production rationnelle)

Exercice 01 :

Un agriculteur désireux de connaître les possibilités de production de navets qui lui sont offertes sur un terrain de 1000 m^2 de superficie décide de procéder à des essais de culture. Il prépare à cet effet 8 parcelles de terrain rigoureusement identiques de un mètre carré de surface. Chaque parcelle est numérotée de 1 à 8. Sur la parcelle n°1 il sème 10 grammes de semences, sur la parcelle n°2, 20 grammes et ainsi de suite en ajoutant 10 grammes de plus à chaque nouvelle parcelle.

Les navets étant arrivés à maturité, l'agriculteur peut faire les constatations rassemblées au **tableau 1.**

Numéro d'ordre de la parcelle	**Accroissement de la production de navets sur chaque parcelle**
1	**20**
2	**50**
3	**65**
4	**60**
5	**55**
6	**26**
7	**18**
8	**0**

Tableau 1 : accroissement de production enregistré sur chaque parcelle.

1. Quels sont les facteurs considérés comme fixes dans la production envisagée ? quelles sont les productivités qui peuvent être calculées ?
2. En posant que l'unité de facteur de production « ***semence*** » est égale à 10 grammes, représenter les courbes de productivité qui peuvent être établies à partir du tableau 1.
   Quel sera le poids de semences nécessaire pour rendre maximum la productivité marginale sur la superficie de 1000 m^2 ?
3. Comment évolue le rapport (**superficie/facteur variable)** lorsque le nombre d'unité de facteur variable augmente ? qu'exprime le rapport envisagé ? comment évoluent les productivités moyenne et marginale lorsque ce rapport change ?
4. Démontrer que lorsque la courbe de productivité marginale est située au-dessus de la courbe de productivité moyenne, le pourcentage d'augmentation de la production de navets est supérieur à celui du facteur semence et inversement (vérifier qu'il en est bien ainsi en prenant un exemple dans chaque cas).
   Traduire ces observations en termes d'élasticités de production par rapport au facteur.

Exercice 02 :

En courte période, la production totale d'une entreprise varie en fonction du nombre d'unités employées du facteur travail (L), selon la relation : $PT = -L^3 + 10L^2 + 32L$

L'équipement utilisé et la technique de production ne peuvent être modifiés pendant la période considérée.

1. Calculer et représenter sur un graphique la PT, la PM et la Pmg du travail, pour L variant de 1 à 9.
2. Analyser la forme de la courbe de PT_L.
3. Analyser la forme des courbes de PM_L et de Pmg_L et expliquer leurs positions respectives.
4. Cette entreprise est-elle soumise à la loi des rendements décroissants ?
5. Déterminer la phase de production rationnelle de l'entreprise.

Exercice 03 :

On considère les trois fonctions de production suivantes :

$$Q_1 = K^{0,2}L^{0,5}$$
$$Q_2 = 2L^{3/4}K^{\beta}$$
$$Q_3 = 2\sqrt{L}\sqrt{K}$$

Q représente le produit, L et K les ressources travail et capital.

1. Etablir l'expression du TMST sur une isoquante dans le cas général d'une fonction de production $Q = f(K, L)$.
2. Exprimer le TMST pour les fonctions Q_1 et Q_2.
3. Quelle sera la valeur du TMST dans la fonction Q_3 , lorsque l'on pose $Q_3 = 2$ et $L = 3$?

Exercice 04 :

Une entreprise a pour fonction de production : $Q = 3K^{1/3}L^{2/3}$

1. Lorsque l'entreprise augmente la quantité de capital employée, la productivité marginale du capital est elle croissante, décroissante, constante ?
2. Définissez le TMST du travail au capital et établissez son expression dans la fonction de production donnée. Si on pose $L = 6$ et $K = 3$, quelle sera la valeur ?

Série d'exercice N° 07:

Rappel du cour :

La phase de production rationnelle

- L'entrepreneur rationnel doit délimiter un intervalle de définition de sa fonction de production, acceptable au regard d'un critère d'efficacité technique.
- Pour cela il convient d'apprécier le rapport qui lie la variation relative induite de la production $\left(\frac{\Delta PT}{PT}\right)$ à la variation relative du facteur travail $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$. Ce rapport mesure l'élasticité de la production par rapport au travail :

$$e_{Q/L} = \frac{\left(\frac{\Delta PT}{PT}\right)}{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)} = \frac{\Delta PT}{PT} \cdot \frac{L}{\Delta L} = \frac{\Delta PT}{\Delta L} \cdot \frac{L}{PT}$$

$$= \frac{\frac{\Delta PT}{\Delta L}}{\frac{PT}{L}} \Rightarrow e_{Q/L} = \frac{Pmg_L}{PM_L}$$

- Pour $0 < L < L_1$ (phase 1)

$Pmg_L > PM_L \Rightarrow e > 1$

L'entreprise n'a pas intérêt de se situer dans cette phase parce que la quantité de capital utilisée est très abondante par rapport à la quantité de travail utilisée donc le capital est sous-utilisé.

$e_{Q/L} > 1 \Rightarrow$ si L augmente de 1% la quantité augmente de plus que 1% (e %).

- Pour $L > L_2$ (phase 3)

$Pmg_L < 0 , PM_L > 0 \Rightarrow e < 0$

Si L augmente de 1% la quantité produite diminue de e %.

L'entreprise ne doit pas se situer dans cette phase parce que le travail est trop abondant par rapport au capital.

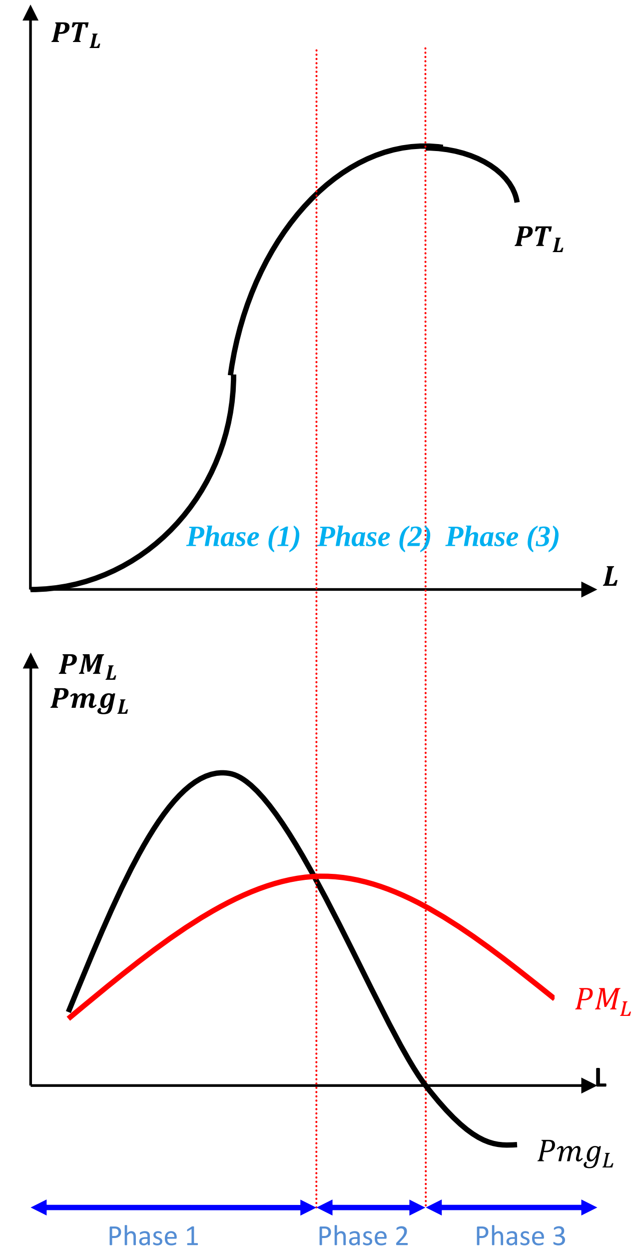
- Pour $L_1 < L < L_2$ (phase 2)

$PM_L > Pmg_L \Rightarrow 0 < e < 1$

Si L augmente de 1% la quantité produite augmente mais de moins que 1%.

C'est la seule phase rationnelle, elle correspond à la courbe de Pmg_L dans sa partie décroissante, positive et inférieur au maximum de PM_L.

La représentation graphique :



Exercice 01 :

1. La production agricole dont on demande d'étudier est réalisée à l'aide de trois facteurs :
   - Le facteur travail.
   - Le facteur terre.
   - Le facteur semence.

❖ Les facteurs considérés comme fixes dans la production envisagée sont :
   - La superficie ensemencée.
   - La main d'œuvre (travail).

❖ Les productivités qui pourront être calculées seront celles du facteur semence (S).
« Parce que dans cette exemple on fait varier le nombre de gramme de semence et on enregistre la production qui apparait chaque fois ».

2. Calcul des productivités :

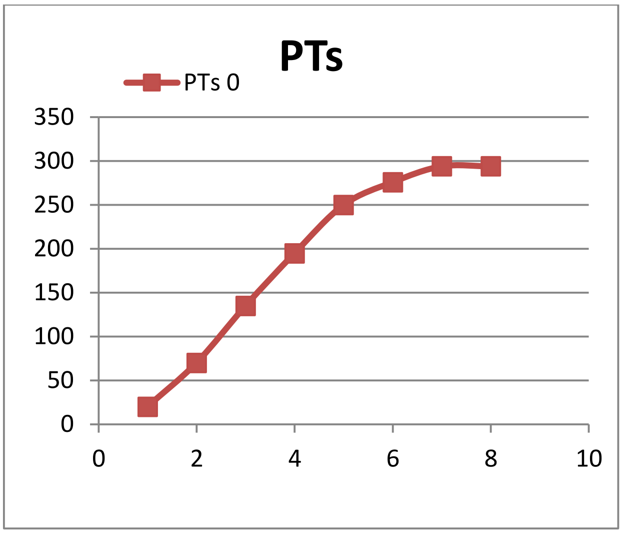
- Chaque unité du facteur (S) est égale à 10 grammes.
- Les résultats donnés au tableau permettant de connaitre la productivité marginale du facteur(S).
- A partir de la productivité marginale du facteur (S) on peut calculer la productivité totale et la productivité moyenne du facteur (S).
- Le tableau suivant montre : PT_S , PM_S, et Pmg_S :

S	Pmg_S	PT_S	PM_S
0	/	0	/
1	20	20	20
2	50	70	35
3	65	135	45
4	60	195	48,75
5	55	250	50
6	26	276	46
7	18	294	42
8	0	294	36,75

- La productivité marginale est maximale sur la parcelle n° 3 lorsqu'on passe à 30 grammes de semences par mètre carré. La production additionnelle est alors de 65 navets.
- Le poids de semences à utiliser sur les 1000 m^2 sera :

$$30 \times 1000 = 30000\ gr = 30\ Kg$$

La représentation graphique :



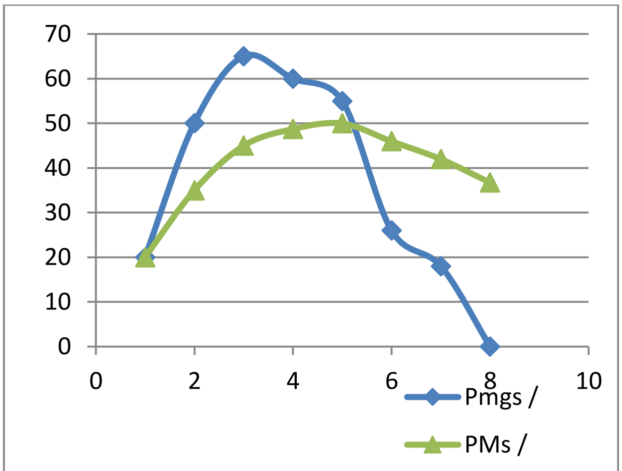


Fig : Représentation graphique des trois productivités : totale, moyenne et marginale.

3. Le rapport superficie/facteur variable :

❖ ***L'évolution du rapport superficie/facteur variable lorsque le nombre d'unités de facteur variable augmente :***

- Le facteur variable ici est S et la superficie reste inchangée.
- Le rapport superficie/facteur variable tendra à diminuer lorsque S augmente, si on donne la valeur 1 au numérateur de ce rapport, lorsque S croit on aura :

$$\frac{superficie}{S} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$$

❖ ***Qu'exprime le rapport envisagé ?***

Le rapport superficie/facteur variable exprime l'intensité de l'utilisation des facteurs de production.

Exemple :

$\frac{1}{1} = 1$ (10 gr de semence dans 1 m^2)

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ (10 gr dans 0,5 m^2)

$\frac{1}{3} = 0{,}33$ (10 gr dans 0,33 m^2)

❖ ***Comment évoluent PM_S et Pmg_S lorsque le rapport change :***

- Lorsque Le rapport superficie/facteur variable diminue PM_S et Pmg_S augmentent simultanément dans un premier temps jusqu'à ce que le rapport soit égale à $\frac{1}{3}$.
- Dans une seconde phase PM_S continue à augmenter jusqu'à ce que le rapport soit égale à $\frac{1}{5}$.
- Enfin dans une dernière phase, on observe une décroissance simultanée des deux productivités PM_S et Pmg_S jusqu'à ce que le rapport soit égale à $\frac{1}{8}$.

4. Lorsque la courbe de Pmg_S est située au dessus de la courbe de PM_S on peut écrire :

$$Pmg_S > PM_S \Rightarrow \frac{\Delta Q}{\Delta S} > \frac{Q}{S} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} > \frac{\Delta S}{S}$$

- **Le rapport $\frac{\Delta Q}{Q}$ représente le pourcentage d'augmentation de la production.**
- **Le rapport $\frac{\Delta S}{S}$ représente le pourcentage d'augmentation de la quantité du facteur S.**

- ***Lorsque $Pmg_S > PM_S$ le pourcentage d'augmentation de la production est supérieur à celui du facteur S et puisque***

$$e_{Q/S} = \frac{\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)}{\left(\frac{\Delta S}{S}\right)} = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \cdot \frac{S}{Q}$$

L'élasticité est supérieure à l'unité.

- ***Lorsque $Pmg_S < PM_S$ le pourcentage d'augmentation de la production est inférieur à celui du facteur S et L'élasticité est inférieure à l'unité.***

- **Exemple :**
- **Lorsque $Pmg_S > PM_S$:**

Lorsque S passe de 1 à 2 unités

$Pmg_S = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = 50 \quad PM_S = \frac{Q}{S} = 35$

$\Rightarrow Pmg_S > PM_S$

Lorsque $S = 1 \Rightarrow Q = 20$

Lorsque $S = 2 \Rightarrow Q = 70$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{50}{20} = 250\%$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{2-1}{1} = 100\%$$

Lorsque S augmente de 100%, Q augmente de 250%.

$$e_{Q/S} = \frac{\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)}{\left(\frac{\Delta S}{S}\right)} = \frac{250}{100} = 2{,}5$$

Lorsque $Pmg_S < PM_S$

Lorsque S passe de 6 à 7 unités

$Pmg_S = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = 18 \quad PM_S = 42$

$\Rightarrow Pmg_S < PM_S$

Lorsque $S = 6 \Rightarrow Q = 276$

Lorsque $S = 7 \Rightarrow Q = 294$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{294 - 276}{276} = 6{,}5\%$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{7-6}{6} = 16{,}66\%$$

Lorsque S augmente de 16,66%, Q augmente de 6,5%

$$e_{Q/S} = \frac{\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)}{\left(\frac{\Delta S}{S}\right)} = \frac{6{,}5}{16{,}66} = 0{,}39$$

Exercice 02 :

1. *Calculer PT_L , PM_L et Pmg_L :*

Nous avons :

$PT_L = -L^3 + 10L^2 + 32L$

$$PM_L = \frac{PT_L}{L} = \frac{-L^3 + 10L^2 + 32L}{L}$$

$= -L^2 + 10L + 32$

$$Pmg_L = \frac{\delta PT_L}{\delta L} = -3L^2 + 20L + 32$$

Les calculs des différentes productivités pour L variant de 1 à 9 unités sont présentés dans le tableau ci-dessous :

L	PT_L	PM_L	Pmg_L
1	41	41	49
2	96	48	60
3	159	53	65
4	224	56	64
5	285	57	57
6	336	56	44
7	371	53	25
8	384	48	0
9	369	41	-31

La représentation graphique :

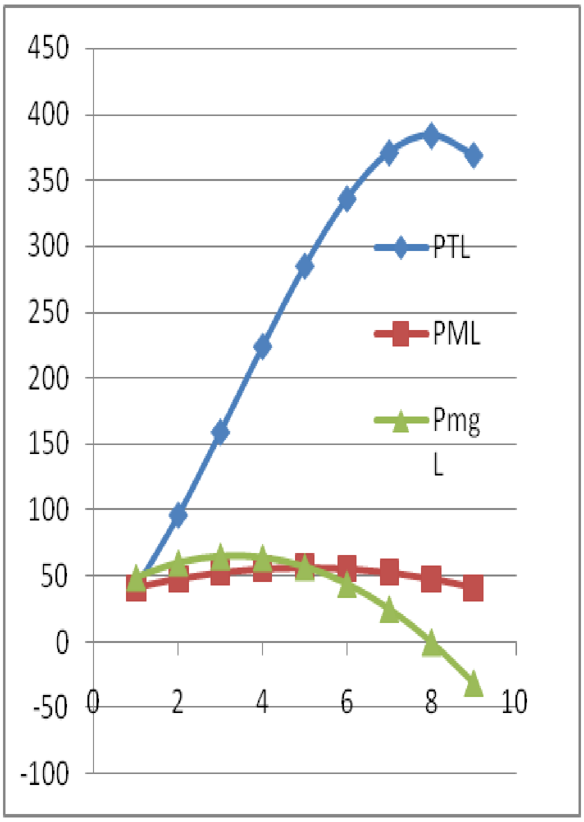


Fig : représentation graphique des courbes des trois productivités.

2. *Analyser la forme de la courbe de PT_L :*

L'analyse de la courbe de productivité totale impose l'étude des dérivées première et seconde de la fonction de PT_L :

- Etude de la dérivée première :

$$(PT_L)' = \frac{\delta PT_L}{\delta L} = Pmg_L$$

$= -3L^2 + 20L + 32$

Le signe de ce trinôme dépend du signe de son discriminant :

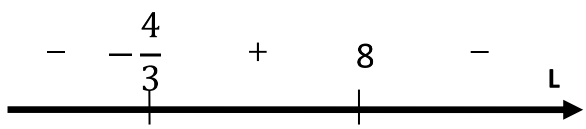
$\Delta' = b'^2 - ac = (10)^2 - 3 \cdot 32$

$= 196 > 0$

Donc Pmg_L s'annule pour les valeurs des racines L_1 et L_2 :

$$L_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-10 + \sqrt{196}}{-3} = -\frac{4}{3}$$
$$= -1{,}33$$

$$L_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-10 - \sqrt{196}}{-3} = -\frac{-24}{3} = 8$$



Donc $Pmg_L > 0$ pour $-\frac{4}{3} < L < 8$

$Pmg_L < 0$ pour $L < -\frac{4}{3}$ et $L > 8$

- <u>Etude de la dérivée seconde :</u>

$(PT_L)'' = -6L + 20$

Donc $(PT_L)'' = 0$ pour $L = \frac{10}{3}$

$(PT_L)'' > 0$ Pour $L < \frac{10}{3}$

$(PT_L)'' < 0$ Pour $L > \frac{10}{3}$

L	$-\infty$	$-1{,}33$	0	$\frac{10}{3}$	8 $+\infty$
$(PT_L)'$	− 0	+	+	+ 0	−
$(PT_L)''$	+	+	+ 0	−	−
(PT_L)			Croissante Et convexe	Croissante Et concave	décroissante max

- <u>Interprétation des résultats obtenus :</u>

Remarque : la fonction de production ne peut être considérée que pour les valeurs positives de L.

- ✓ Pour $0 < L < \frac{10}{3}$ PT_L est croissante à taux croissant pcq Pmg_L est positive et croissante.

- ✓ Pour $L = \frac{10}{3}$ il s'agit d'un point d'inflexion de la courbe de PT_L pcq $(PT_L)'' = 0$
- ✓ Pour $\frac{10}{3} < L < 8$ PT_L est croissante à taux décroissant pcq Pmg_L est positive et décroissante.
- ✓ Pour $L = 8$ PT_L est maximum.
- ✓ Pour $L > 8$ PT_L est décroissante pcq Pmg_L est négative.

3. ***<u>Analyser la forme des courbes de PM_L et Pmg_L :</u>***

- La courbe de Pmg_L :

$\mathrm{Pmg_L}$ est croissante lorsque $0 < L < \frac{10}{3}$ elle atteint son maximum pour $\mathrm{L} = \frac{10}{3}$ et elle devient décroissante pour $\mathrm{L} > \frac{10}{3}$.

- La courbe de $\mathbf{PM_L}$:

La courbe de PM_L est croissante lorsque $0 < L < 5$, elle atteint son maximum pour $L = 5$ et elle devient décroissante pour $L > 5$.

Parce que : $(PM_L)' = -2L + 10$

$\Rightarrow (PM_L)' = 0$ pour $L = 5$.

- ***Expliquer les positions respectives des courbe de PM_L et Pmg_L :***

✓ La courbe de productivité marginale est située au-dessus de la courbe de productivité moyenne quand celle-ci est croissante :

Démonstration :

PM_L croissante $\Rightarrow (PM_L)' > 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{PT_L}{L}\right)' > 0 \Rightarrow \frac{(PT_L)'L - L\,(PT_L)}{L^2} > 0$$

$$\Rightarrow Pmg_L \cdot L - (PT_L) > 0$$

$$\Rightarrow Pmg_L > \frac{(PT_L)}{L} \Rightarrow Pmg_L > PM_L$$

Donc Pmg_L au-dessus de PM_L.

✓ La courbe de Pmg_L coupe la courbe de PM_L en son maximum:

Démonstration :

PM_L maximum $\Rightarrow (PM_L)' = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{PT_L}{L}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{(PT_L)'L - L\,(PT_L)}{L^2} = 0$$

$$\Rightarrow Pmg_L \cdot L - (PT_L) = 0$$

$$\Rightarrow Pmg_L = \frac{(PT_L)}{L} \Rightarrow Pmg_L = PM_L$$

✓ La courbe de productivité marginale est située au-dessous de la courbe de productivité moyenne quand celle-ci est décroissante :

Démonstration :

PM_L décroissante $\Rightarrow (PM_L)' < 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{PT_L}{L}\right)' < 0 \Rightarrow \frac{(PT_L)'L - L\,(PT_L)}{L^2} < 0$$

$$\Rightarrow Pmg_L \cdot L - (PT_L) < 0$$

$$\Rightarrow Pmg_L < \frac{(PT_L)}{L} \Rightarrow Pmg_L < PM_L$$

4. Cette entreprise est soumise à la loi des rendements marginaux décroissants parce qu'on a démontré et l'on peut observer sur la figure qu'à partir de l'emploi de $L = \frac{10}{3}$ unités de travail, la productivité marginale du travail décroit jusqu'à devenir négative pour $L > 8$.

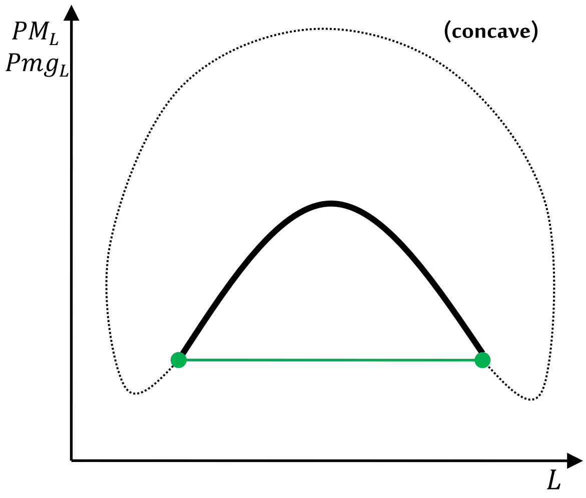
<u>5. La phase de production rationnelle de l'entreprise :</u>

L'entrepreneur rationnel cherche les combinaisons techniquement efficientes de facteurs de production.

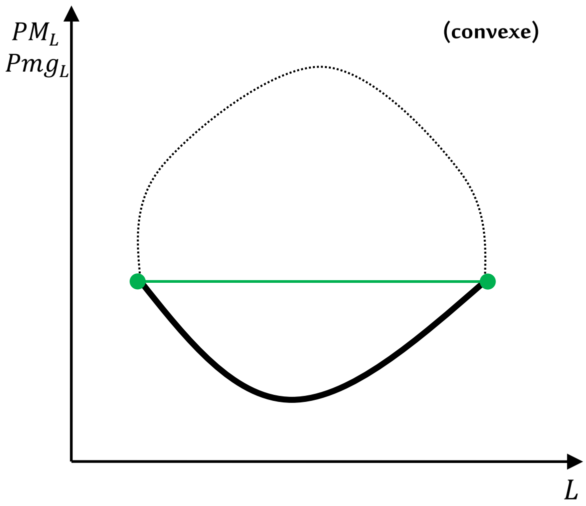
- Pour $L > 8$ $\left(e_{Q/L}\right) < 0$ l'entreprise ne doit pas se situer dans cette phase parce que la quantité de travail utilisée est très abondante par rapport à la quantité du capital utilisée.
- Pour $0 < L < 5$, $\left(e_{Q/L} > 1\right)$ l'entreprise ne doit pas se situer dans cette phase parce que la quantité du capital utilisée est très abondante par rapport à la quantité du travail utilisée.
- Pour $5 < L < 8$, $\left(0 < e_{Q/L} < 1\right)$ c'est la seule phase rationnelle, elle correspond à la courbe de Pmg_L dans sa partie décroissante, positive et inférieure au maximum de PM_L.

Remarque :

L'analyse des courbes de PM_L et de Pmg_L impose aussi l'étude des dérivées première et seconde de ces dernières sauf que la deuxième dérivée dans les deux cas sera toujours négatives parce que les courbes de PM_L et de Pmg_L sont toujours concaves comme le montre le graphe suivant :



Par contre la courbe convexe prendra la forme suivante :



Rappel du cour :

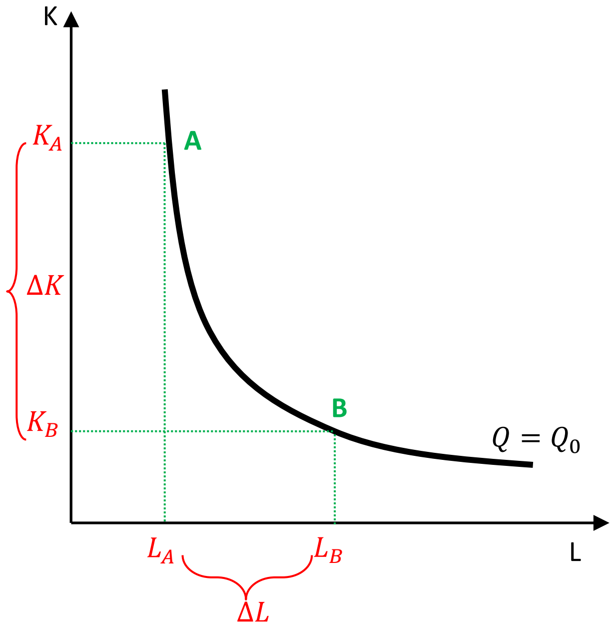
- ***Les isoquantes.***
- ***Le TMST (Taux Marginal de Substitution Technique)***

Les isoquantes :

Isoquantes = les courbes d'isoproduit

= les courbes d'égale production

- Dans le long terme les deux facteurs de production varient en même temps, dans ce cas on parle d'isoquantes. On fait un niveau donné de production peut être obtenu par des différentes combinaisons des deux facteurs, si on représente ses différentes combinaisons sur un graphiques on obtient une isoquante :



Exemple : au point A on utilise une grande quantité de K et une petite quantité de L.
Au point B on utilise une petite quantité de K et une grand quantité de L.

Définition :

« Une isoquante est l'ensemble des combinaisons des facteurs de production permettant d'obtenir le même niveau de production ».

Caractéristiques :

- Les isoquantes sont décroissantes et convexes par rapport à l'origine.
- Il existe une infinité d'isoquantes chacune des courbes correspondant à un niveau de production donné.
- Le niveau de production est d'autant plus élevé lorsqu'on se dirige vers le nord-est.
- Il est impossible que deux isoquantes se coupent dans le cas contraire le point d'intersection représente deux niveaux différents de production ce qui n'est pas logique.

Remarque :
L'équation de l'isoquante peut être obtenue comme suit :
Soit la fonction de production : $Q = f(K, L)$
pour un niveau donné de production Q_0 ***on a*** $Q_0 = f(K, L)$ ***et l'équation de l'isoquante s'écrira :*** $K = f(Q_0, L)$
Ex : $Q = 2 \cdot K \cdot L$
Pour $Q_0 = 3$ ***l'équation de l'isoquante :***

$$3 = 2 \cdot K \cdot L \Rightarrow K = {}^{3}/_{2L}$$

Le TMST :

Le taux marginal de substitution technique
=TMSF (entre facteur)
=TST (taux de substitution technique).
Puisque un niveau donné de production Q_0 peut être obtenu par des différentes combinaisons il est nécessaire de savoir le taux par lequel on substitue un facteur par un autre facteur.

Définition :

« Le TMST de L pour K mesure le nombre des unités de facteur K qui doit etre abandonné lorsqu'on augmente d'une unité l'utilisation du facteur L, la production restant inchangée ».

- Le TMST entre deux points A et B de l'isoquante est :

$$TMST_{LK} = -\frac{\Delta K}{\Delta L}$$

- Lorsque ΔL tend vers le zéro (ΔL est très petite) le rapport $\frac{\Delta K}{\Delta L}$ tend vers la pente de la tangente de l'isoquante en ce point.
  Le TMST dans ce cas s'exprime par :

$$TMST_{LK} = -\frac{dK}{dL} = \frac{Pmg_L}{Pmg_K}$$

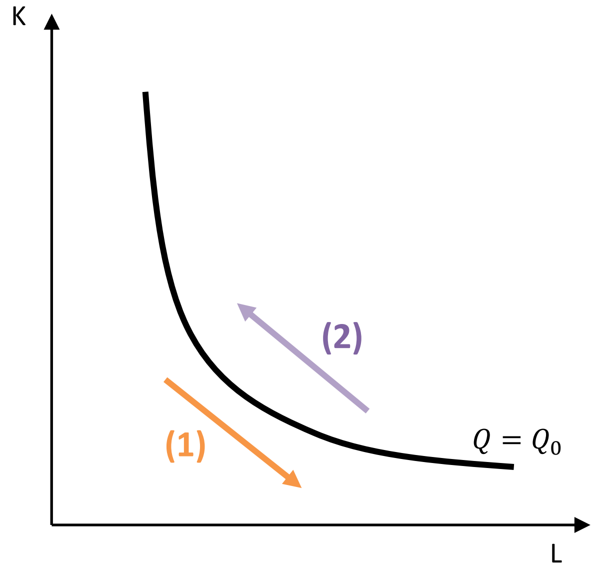
Remarque 1 :
L'analyse se fait avec la valeur du TMST et non par son expression parce que ses valeurs sont décroissantes.

Ex : $TMST_{LK} = \frac{2K}{3L}$

On ne dit pas qu'on doit abandonner 2 unités de K pour utilisé 3 unités supplémentaire de L. (c'est faux)

Par contre si $TMST_{LK} = \frac{2}{3}$ on peut dire que le producteur abandonne 2 unités de K pour utiliser 3 unités supplémentaires de L.

Remarque2 :



- Dans les deux sens (1) et (2) le TMST est négative et on ajoute le signe (–) pour le rendre positive.
- Mais dans le sens (1) :
  Le $TMST_{LK} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\frac{dK}{dL} = \frac{Pmg_L}{Pmg_K}$
- Mais dans le sens (2) :
- Le $TMST_{LK} = -\frac{\Delta L}{\Delta K} = -\frac{dL}{dK} = \frac{Pmg_K}{Pmg_L}$

Remarque 3* : *(Très importante)
« Les isoquantes reflètent la loi des rendements marginaux décroissants ».

Explication 1 :

Oui c'est vrai et on constate cet effet par les valeurs décroissantes du $TMST_{LK}$ (la pente) c'est-à-dire chaque fois on abandonne des quantités de plus en plus petite de K pour utiliser des unités supplémentaires de L (Pmg_L est décroissante).

Explication 2 :

Dans le long terme on suppose généralement que les rendements marginaux des facteurs sont décroissants et puisque le $TMST_{LK} = \frac{Pmg_L}{Pmg_K}$ le fait de l'augmentation de la quantité du facteur L utilisée dans la combinaison Pmg_L décroit et à l'inverse puisque K diminue dans la combinaison Pmg_K augmente et donc la valeur du $TMST_{LK}$ diminue cette valeur qui représente la pente et donc on peut dire que : « les isoquantes reflètent la loi des rendements marginaux décroissants ».

Exercice 03 :

1. ***Etablir l'expression du TMST sur une isoquante dans le cas général d'une fonction de production $Q = f(K, L)$:***

« La variation des quantités utilisées des facteurs de production provoque une variation de la quantité produite » ceci est traduit par la différentielle totale de la fonction de production $Q = f(K, L)$:

$$dQ = \frac{\delta Q}{\delta K} \cdot dK + \frac{\delta Q}{\delta L} \cdot dL$$

Le long d'une isoquante la production reste par définition inchangée donc $dQ = 0$

$Pmg_K \cdot dK + Pmg_L \cdot dL = 0$

$Pmg_K \cdot dK = -Pmg_L \cdot dL$

$-\frac{dK}{dL} = \frac{Pmg_L}{Pmg_K}$

$$\boldsymbol{TMST = \frac{Pmg_L}{Pmg_K}}$$

et donc le TMST est égal au rapport des productivités marginales.

2. ***Exprimer le TMST pour les fonctions Q_1 et Q_2 :***

$Q_1 = K^{0,2} \cdot L^{0,5}$

$Pmg_L = \frac{\delta Q}{\delta L} = 0,5\, K^{0,2} \cdot L^{-0,5}$

$Pmg_K = \frac{\delta Q}{\delta K} = 0,2\, K^{-0,8} \cdot L^{0,5}$

$TMST_{LK} = \frac{0,5\, K^{0,2} \cdot L^{-0,5}}{0,2\, K^{-0,8} \cdot L^{0,5}} = \boldsymbol{\frac{5\, K}{2\, L}}$

$Q_2 = 2\, L^{3/4}\, K^{\beta}$

$Pmg_L = \frac{\delta Q}{\delta L} = \frac{3}{2}\, L^{-1/4} K^{\beta}$

$Pmg_K = \frac{\delta Q}{\delta K} = 2\beta\, L^{3/4}\, K^{\beta - 1}$

$TMST_{LK} = \frac{\frac{3}{2}\, L^{-1/4} K^{\beta}}{2\beta\, L^{3/4}\, K^{\beta-1}} = \boldsymbol{\frac{3\, K}{4\, \beta\, L}}$

3. ***La valeur du TMST dans la fonction Q_3 lorsque $Q_3 = 2$ et $L = 3$:***

$Q_3 = 2\, L^{1/2} \cdot K^{1/2}$

$Pmg_L = L^{-1/2} \cdot K^{1/2}$

$Pmg_K = L^{1/2} \cdot K^{-1/2}$

$TMST = \frac{L^{-1/2} \cdot K^{1/2}}{L^{1/2} \cdot K^{-1/2}} = \boldsymbol{\frac{K}{L}}$

$L = 3\,,\, Q = 2$

$2 = 2 \cdot 3^{1/2} \cdot K^{1/2} \Rightarrow K^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow K = \frac{1}{3}$

$TMST = \frac{1/3}{3} = \frac{1}{9}$

2ème méthode :

Nous avons $Q = 2$

Trouvons l'équation de l'isoquante :

$2 = 2\, L^{1/2} \cdot K^{1/2}$

$K^{1/2} = \frac{2}{2\, L^{1/2}} \Rightarrow K = \frac{1}{L}$

$TMST_{LK} = -\frac{dK}{dL} = \frac{1}{L^2}$

$L = 3 \Rightarrow TMST = 1/9$

Donc le producteur doit abandonner $1/9$ unités de K pour utiliser une unité supplémentaire de L. « *Il doit abandonner une unité de K pour augmenter l'utilisation de L par 9 unités* ».

Exercice 04 :

$Q = 3\, K^{1/3}\, L^{2/3}$

1. Lorsque l'entreprise augmente la quantité de capital employée la productivité marginale du capital est décroissante parce que :

Nous avons $Pmg_K = \frac{\delta Q}{\delta K} = K^{-2/3}\, L^{2/3}$

Pour savoir si Pmg_K est croissante, décroissante ou bien constante on calcul sa première dérivé $(Pmg_K)'$ et on étudie son signe :

$(Pmg_K)' = -\frac{2}{3}\, K^{-5/3}\, L^{2/3}$

$\Rightarrow (Pmg_K)' < 0$ est toujours inférieur à zéro et donc Pmg_K est décroissante.

2. ***Définir le TMST et établir son expression :***

« *Le TMST est le nombre d'unités de facteur K qui doit être abandonné lorsqu'on augmente l'utilisation de facteur L par une seule unité, la production restant inchangée* ».

$TMST = \frac{Pmg_L}{Pmg_K}$

$Pmg_L = 2\, K^{1/3}\, L^{-1/3}$

$Pmg_K = K^{-2/3}\, L^{2/3}$

$$TMST = \frac{2\, K^{1/3}\, L^{-1/3}}{K^{-2/3}\, L^{2/3}} = \frac{2K}{L}$$

Pour $L = 6$ et $K = 3$

Le $TMST = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1$

« *Donc l'entreprise doit abandonner une unité de K pour utiliser une unité supplémentaire de facteur L* ».

Série d'exercices N° 08 : (L'équilibre du producteur)

Exercice 1 :

On considère les fonctions de production suivantes :

$$Q_1 = a \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha} - b \cdot L^{\beta} \cdot K^{1-\beta} \text{ avec } \begin{cases} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

$$Q_2 = \frac{a \cdot L^2 \cdot K(L+K)}{b(L^2+K^2)}$$

$$Q_3 = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} \cdot T^{\theta} \text{ avec } \alpha + \beta + \theta = 1{,}5$$

$$Q_4 = \sqrt{L^2 + 8KL}$$

$$Q_5 = \frac{T \cdot K + K \cdot L - T^2}{L^{\frac{3}{2}}}$$

Q représente à chaque fois la quantité produite, L le facteur travail, K le facteur capital et T le facteur terre.

Déterminer pour chacune de ces fonctions la nature des rendements dimensionnels ?

Exercice 2 :

La production d'un bien Q est assurée à l'aide de deux facteurs, le capital K et le travail L. La production réalisée à l'aide de diverses combinaisons (K, L) est donnée au tableau 1.

Point de production	Nombre d'unités de facteur		Quantité produite Q
	K	L	
A	6	2	200
B	4	3	200
C	3	5	200
D	5,5	1,5	175
E	3,5	2,5	175
F	2	5	175
G	4	1,5	140
H	2,7	2,3	140
I	2	4	140
J	3,5	1	100
K	2	2	100
L	1	4	100
M	3,5	0,5	65
N	1,5	1,5	65
O	1	3	65
P	2,5	0,5	35
Q	1	1	35
R	0,5	2,5	35

Tableau 1: production Q en fonction de K et L

L'équation de cout (ou de la droite d'isocoût), est donnée par la relation :

$CT = sL + iK$ (CT =Cout total, $s =$ taux de salaire et i =cout d'usage d'une unité de capital).

Le taux de salaire et le cout d'usage du capital sont fixés : $s = i = 2$.

1. Définir de manière succincte ce que l'on entend par comportement rationnel du producteur ou de l'entreprise.
2. Déterminer la position optimale de l'entreprise lorsque l'objectif de cette dernière est de réaliser une production $Q = 175$.

Quelle sera dans ce cas la valeur du profit à l'optimum si le prix unitaire du bien Q est $P = 0{,}4$?

3. Donner la représentation graphique des isoquantes et de l'optimum de la question 2.
4. Déterminer la production et la combinaison optimale de facteurs lorsque le budget disponible de l'entreprise est $CT = 8$.
5. Déterminer graphiquement le chemin d'expansion de l'entreprise ou « eutope » ; on admettra pour cela que les pris reste $s = i = 2$.

Exercice 3 :

La production d'un bien Q est assurée à l'aide de deux facteurs de production K (le capital) et L (le travail). La relation existante entre $Q, K \text{ et } L$ est la suivante : $Q = 2\sqrt{L}\sqrt{K}$

L'entrepreneur connait la forme de son équation de coût : $CT = 9L + 4K$

CT représente le cout total.

9 le cout d'une unité de travail.

4 le cout d'usage d'une unité de capital.

1. Sachant que l'entrepreneur est rationnel, déterminer la valeur de la quantité de chaque facteur demandée par ce dernier, pour mettre en œuvre une production $Q = 100$.
2. Vérifier si les conditions du deuxième ordre sont réalisées.
3. Ayant effectué le calcul des quantités optimales de facteurs, l'entrepreneur constate qu'il est dans l'impossibilité de dégager la somme nécessaire pour couvrir le

cout total de la production $Q = 100$. Il ne dispose que d'une somme $CT = 504$. compte tenu de cette contrainte, quelles seront les quantités optimales de facteurs K et L utilisées et quelle sera la valeur de la production Q correspondante ?

Exercice 4 :

Soit une entreprise produisant un seul bien. Cette entreprise à pour fonction de production : $Q = K^{\propto} L^{\beta}$ le prix du capital est P_K et celui du travail P_L . on notera C le cout total. Nous supposerons que cette entreprise a un budget a ne pas dépasser C_0 .

1. Déterminer à l'aide du Lagrangien les quantités optimales des facteurs pour ce producteur.
2. Cette fonction est-elle homogène ? de quel degré ?
3. Si $\beta = {}^{1}/_{3}$ quelle serait la nature des rendements d'échelle ?
4. Application numérique : soit $P_K = 8$, $P_L = 4$, $C_0 = 48$ et $\beta = {}^{1}/_{3}$
   - Quelle est le niveau de production de cette firme a l'optimum lorsqu'elle a des rendements d'échelle constants ?
   - Quelle serait son nouveau niveau de production si cette entreprise décidait de doubler ses facteurs de production ? pourquoi ?
   - Quelle serait les nouvelles quantités des facteurs optimales si le prix du travail doublait ?

Exercice 5:

Une entreprise ne fabrique qu'un seul produit et a comme fonction de production :

$$Q = K^{\frac{1}{4}} \cdot L^{\frac{1}{2}}$$

Ou K représente la quantité de facteur capital utilisée et L la quantité de facteur travail utilisée. On note P_K et P_L respectivement les prix du capital et du travail.

1. Calculer la combinaison d'inputs L^* et K^* qui permet d'assurer à l'entreprise la moindre dépense. (on ne vérifiera pas les conditions suffisantes)
2. Calculer la combinaison d'inputs L^* et K^* à l'optimum on utilisant la méthode mathématique.
3. En déduire l'équation du sentier d'expansion. Faire une représentation graphique de ce dernier si $P_L = 1$, $P_K = 2$
4. Déterminer la moindre dépense ainsi que la fonction de coût total qui lui est associée.
5. Interpréter le multiplicateur de Lagrange et le calculer de deux façons différentes.

Série d'exercices N° 08 :

Rappel du cour :

- ***Les rendements d'échelle***
- ***L'homogénéité d'une fonction de production***

❖ ***Les rendements d'échelle (les rendements dimensionnels):***

- Les rendements d'échelles caractérisent la fonction de production, ils indiquent comment se modifie la quantité produite lorsque les quantités des facteurs de productions utilisées varient dans les mêmes proportions.
- La fonction de production sera dite à rendements d'échelle constants si la quantité produite varie dans les mêmes proportions que les quantités de facteurs utilisés.
- Elle sera dite à rendements d'échelle croissants si la variation de la quantité produite est plus que proportionnelle.
- Elle sera dite à rendements d'échelle décroissants si la variation de la quantité produite est moins que proportionnelle.

❖ ***L'homogénéité d'une fonction de production :***

- On dit qu'une fonction (à deux variables) est homogène de degré m si en multipliant les quantités de facteurs par une constante λ , la fonction est multipliée par λ^m

C'est-à-dire :

$Q = f(L, K)$

$Q^* = f(\lambda L, \lambda K) = \lambda^m f(L, K) = \lambda^m Q$

Il y à 3 cas :

- Si $m = 1 \Rightarrow Q^* = f(\lambda L, \lambda K) = \lambda f(L, K) = \lambda Q$

⇒ ***rendements d'échelle constants.***

- Si $m > 1 \Rightarrow Q^* = f(\lambda L, \lambda K) = \lambda^m f(L, K) = \lambda^m Q > \lambda Q$

⇒ ***rendements d'échelle croissants.***

- Si $m < 1 \Rightarrow Q^* = f(\lambda L, \lambda K) = \lambda^m f(L, K) = \lambda^m Q < \lambda Q$

⇒ ***rendements d'échelle décroissants.***

Remarque :

- ***Si lorsqu'on augmente les quantités de K et L la production reste inchangé ⇒ la production a atteint son maximum.***
- ***Si lorsqu'on augmente les quantités de K et L la production diminue ⇒ on a dépassé le maximum (sortie de l'intervalle de rationalité).***
- ***Si le degré d'homogénéité $m = 0$ la production reste inchangée meme si on multiplie les quantités utilisée des facteurs de production.***

Série d'exercices N° 08 :

Exercice 01 :

La nature des rendements d'échelle :

On sait que la nature des rendements d'échelle d'une fonction est définie par la connaissance du degré d'homogénéité :

Si le degré=1 ⇒ rendements constants

Si le degré<1 ⇒ rendements décroissants

Si le degré>1 ⇒ rendements croissants.

✓ $Q_1 = a \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha} - b \cdot L^{\beta} \cdot K^{1-\beta}$ avec $\begin{cases} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$

$$Q_1{}^* = a \cdot (\lambda L)^{\alpha} \cdot (\lambda K)^{1-\alpha} - b \cdot (\lambda L)^{\beta} \cdot (\lambda K)^{1-\beta}$$

$$Q_1{}^* = a \cdot \lambda\, L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha} - b \cdot \lambda\, L^{\beta} \cdot K^{1-\beta}$$

$$Q_1{}^* = \lambda \left(a \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha} - b \cdot L^{\beta} \cdot K^{1-\beta}\right)$$

$$Q_1{}^* = Q_1$$

Cette fonction est homogène de degré 1 ⇒ les rendements d'échelle sont constants.

✓ $Q_2 = \frac{a \cdot L^2 \cdot K(L+K)}{b(L^2+K^2)}$

$$Q_2 = \frac{a \cdot L^3 \cdot K + a \cdot L^2 \cdot K^2}{b(L^2 + K^2)}$$

$$Q_2^* = \frac{a \cdot (\lambda L)^3 \cdot (\lambda K) + a \cdot (\lambda L)^2 \cdot (\lambda K)^2}{b[(\lambda L)^2 + (\lambda K)^2]}$$

$$Q_2^* = \frac{\lambda^4\, (a \cdot L^3 \cdot K + a \cdot L^2 \cdot K^2)}{\lambda^2\, b(L^2 + K^2)}$$

$$Q_2^* = \lambda^2\, Q_2$$

Cette fonction est homogène de degré 2 ⇒ les rendements d'échelle sont croissants.

✓ $Q_3 = b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} \cdot T^{\theta}$ avec $\alpha + \beta + \theta = 1{,}5$

$$Q_3^* = b \cdot (\lambda L)^{\alpha} \cdot (\lambda K)^{\beta} \cdot (\lambda T)^{\theta}$$

$$Q_3^* = \lambda^{\alpha+\beta+\theta} \left(b \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} \cdot T^{\theta}\right)$$

$$Q_3^* = \lambda^{\alpha+\beta+\theta}\, Q_3$$

$$Q_3^* = \lambda^{1,5}\, Q_3$$

Cette fonction est homogène de degré 1,5 ⇒ rendements d'échelle sont croissants.

✓ $Q_4 = \sqrt{L^2 + 8KL}$

$$Q_4^* = \sqrt{(\lambda L)^2 + 8(\lambda K)(\lambda L)}$$

$$Q_4^* = \lambda \sqrt{L^2 + 8KL}$$

$$Q_4^* = \lambda\, Q_4$$

Cette fonction est homogène de degré 1 ⇒ les rendements d'échelle sont constants.

✓ $Q_5 = \frac{T \cdot K + K \cdot L - T^2}{L^{\frac{3}{2}}}$

$$Q_5^* = \frac{(\lambda T) \cdot (\lambda K) + (\lambda K) \cdot (\lambda L) - (\lambda T)^2}{(\lambda L)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Q_5^* = \frac{\lambda^2\, (T \cdot K + K \cdot L - T^2)}{\lambda^{\frac{3}{2}}\, L^{\frac{3}{2}}}$$

$$Q_5^* = \lambda^{\frac{1}{2}}\, Q_5$$

Cette fonction est homogène de degré $\frac{1}{2}$ ⇒ les rendements d'échelle sont décroissants.

Rappel de cour :

❖ ***de l'équilibre du producteur :***
- ***Définition.***
- ***Méthode de Lagrange.***
- ***Méthode mathématique.***
- ***Détermination géométrique de l'optimum du producteur (méthode graphique).***

❖ ***Détermination de l'équilibre du producteur :***

- La théorie néoclassique de la firme assigne à cette dernière un objectif unique : la maximisation de son profit total et donc le producteur atteint son équilibre lorsqu'il réalise le profit le plus élevé possible.
- Dans ce contexte le producteur doit rechercher les conditions optimales de production lui permettant :
  - ✓ Soit de maximiser sa production pour un cout donné.
  - ✓ Soit de minimiser le cout nécessaire à la réalisation d'un niveau de production donné.
  - ✓ Soit tout simplement réaliser un maximum de profit, c'est-à-dire obtenir l'écart le plus grand entre la recette totale et le cout total.

Pour rechercher la combinaison optimale permettant l'équilibre du producteur il existe trois méthodes :

- ✓ La méthode de Lagrange.
- ✓ La méthode mathématique.
- ✓ La détermination géométrique de l'équilibre du producteur.

❖ ***La méthode de Lagrange :***

Le problème auquel le producteur se trouve confronté est le suivant :

Maximiser la production pour un cout donné CT_0 ce problème peut être formulé mathématiquement comme suit :

$$\begin{cases} Max\ Q = f(K,L) \\ {}^{S}/_{C}\ CT_0 = K\,P_K + L\,P_L \end{cases}$$

Le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = f(K,L) + \lambda(CT_0 - K\,P_K - L\,P_L)$$

Pour maximiser la production on doit maximiser la fonction de Lagrange, pour cela deux conditions doivent être remplis :

- ✓ **Première condition :** (condition nécessaire) les dérivée partielle par rapport à K, L et λ s'annulent en même temps en obtenant ainsi 3 équations à résoudre et en obtenant aussi les valeurs de K, L et λ.

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta L} = Pmg_L - \lambda\,P_L = 0 \ \Rightarrow \lambda = \dfrac{Pmg_L}{P_L} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta K} = Pmg_K - \lambda\,P_K = 0 \ \Rightarrow \lambda = \dfrac{Pmg_K}{P_K} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\lambda} = CT_0 - K\,P_K - L\,P_L = 0 \Rightarrow CT_0 = K\,P_K + L\,P_L \ldots (3) \end{cases}$$

$$(\mathbf{1}) = (\mathbf{2}) \Leftrightarrow \frac{Pmg_L}{P_L} = \frac{Pmg_K}{P_K} \Leftrightarrow \frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

La condition d'équilibre

En remplaçant dans l'équation (3) on obtiendra les valeurs de K et L et λ.

- ✓ **La deuxième condition : (condition suffisante)**

L'extremum sera un maximum si $\delta^2\ \mathcal{L}$ la différentielle totale seconde de la fonction de Lagrange est une forme quadratique définie négative.

- Trouvons $\delta^2\ \mathcal{L}$ **: ($\delta^2\ \mathcal{L}$ est une matrice)**

$$\delta^2\ \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta L\,\delta L} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta L\,\delta K} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta L\,\delta\lambda} \\ \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta K\,\delta L} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta K\,\delta K} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta K\,\delta\lambda} \\ \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\lambda\,\delta L} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\lambda\,\delta K} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\lambda\,\delta\lambda} \end{pmatrix}$$

- Construire le déterminant Hessien bordé c'est-à-dire le déterminant du système d'équations obtenu à partir du développement de $\delta^2\ \mathcal{L}$ puis étudier le signe de ce dernier :

$$|H| = \begin{vmatrix} \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta L\,\delta L} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta L\,\delta K} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta L\,\delta\lambda} \\ \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta K\,\delta L} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta K\,\delta K} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta K\,\delta\lambda} \\ \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\lambda\,\delta L} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\lambda\,\delta K} & \dfrac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\lambda\,\delta\lambda} \end{vmatrix}$$

Si $|H| > 0 \Rightarrow \delta^2 \mathcal{L}$ est définie négative (Maximum)
Si $|H| < 0 \Rightarrow \delta^2 \mathcal{L}$ est définie positive (Minimum)

❖ ***La méthode mathématique :***

Le problème posé est le suivant :

$$\begin{cases} Max\ Q = f(K, L) \\ {}^{S}/_{C}\ CT_0 = K\ P_K + L\ P_L \end{cases}$$

A partir de l'équation de cout total on peut tirer L en fonction de K ou l'inverse

$$L = \frac{CT_0 - K\ P_K}{P_L}$$

Et en remplaçant L par son équation à la fonction de production $Q = f(K, L)$

Cette dernière devienne une fonction à une seule variable K pour la maximiser deux conditions sont imposées :

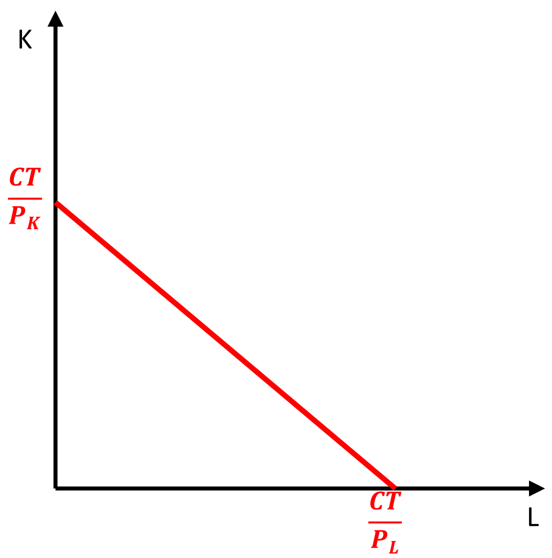
$$\begin{cases} Q'_K = 0 \\ Q''_K < 0 \end{cases}$$

❖ ***La détermination géométrique de l'optimum du producteur (méthode graphique) :***

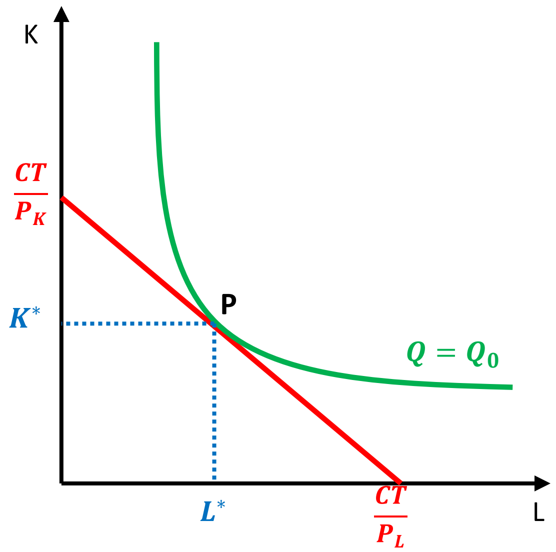
La tangence entre l'isoquante et la droite d'isocoût permet de déterminer l'optimum du producteur.

- La première étape s'agit de représenter la droite d'isocoût qui à pour équation l'équation de cout $CT = K\ P_K + L\ P_L$ et pour la représenter on met :

$$K = \frac{CT}{P_K} - \frac{P_L}{P_K} \cdot L$$



- La deuxième étape s'agit de trouver l'isoquante la plus éloignée ayant au moins un point de tangence avec la droite d'isocoût.



- Au point de tangence (P) la pente de l'isoquante $\left(\frac{dK}{dL} = -\frac{Pmg_L}{Pmg_K}\right)$ est égale à la pente de la droite d'isocoût $\left(-\frac{P_L}{P_K}\right)$ donc :

A l'équilibre nous avons : $\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K}$

Exercice 02 :

1. ***Définition du comportement rationnel du producteur ou de l'entreprise :***

On dit qu'il y a comportement rationnel chaque fois que l'entreprise cherche à obtenir un maximum de production pour un coût donné, ou bien à minimiser le coût nécessaire pour réaliser une production donnée, ou bien encore à obtenir l'écart le plus grand entre la recette totale et le coût total.

2. ***Déterminer la position optimale de l'entreprise lorsque l'objectif de cette dernière est de réaliser une production $Q = 175$:***

- L'entreprise a pour objectif la réalisation d'une production $Q = 175$, si elle est rationnelle, elle va chercher à mettre en œuvre cette production au moindre coût.
- Trois combinaisons de facteurs permettent de réaliser $Q = 175$: **D**, **E**, **F**.
- Calculons le coût nécessaire dans chacun des trois cas :

La combinaison D ($K = 5{,}5$; $L = 1{,}5$)

$$CT = 2(1{,}5) + 2(5{,}5) = 14$$

La combinaison E ($K = 3{,}5$; $L = 2{,}5$)

$$CT = 2(2{,}5) + 2(3{,}5) = 12$$

La combinaison F ($K = 2$; $L = 5$)

$$CT = 2(5) + 2(2) = 14$$

Donc E est la position optimale de l'entreprise.

- Le profit à l'optimum :

L'équation du profit s'écrit

$\pi = RT - CT$

$\pi = P \cdot Q - (sL + iK)$

Pour la combinaison E

$\pi = (0{,}4 \cdot 175) - (12) = 58$

Remarque :

La recette totale est la même quelque soit le point de l'isoquante $Q = 175$ donc la différence entre RT et CT sera par conséquent fonction du coût total, elle sera maximum lorsque le coût sera minimum.

3. ***La représentation graphique des isoquantes et de l'équilibre :***

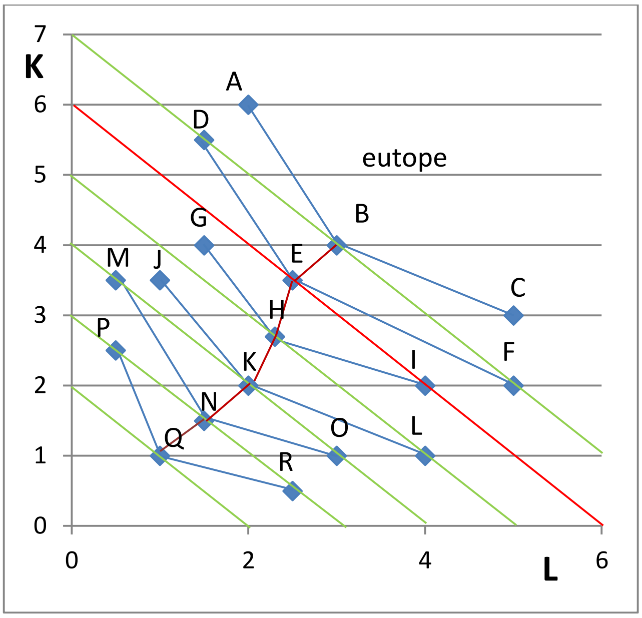


Fig : représentation graphique de l'eutope.

4. ***La production et la combinaison optimale de facteurs pour $CT = 8$:***

- Dans ce cas on cherche une production maximale pour un coût donné $CT = 8$:

L'équation de l'isocoût s'écrira

$CT = 2L + 2K = 8$

$\Rightarrow K = -L + 4$

- Toutes les combinaisons de facteur (K,L) qui réalise la relation $K + L = 4$, le choix s'effectuera entre ces trois combinaisons :

Pour M ($K = 3{,}5$; $L = 0{,}5$) $\Rightarrow Q = 65$

Pour K ($K = 2$; $L = 2$) $\Rightarrow Q = 100$

Pour O ($K = 1$; $L = 3$) $\Rightarrow Q = 65$

Donc K sera la combinaison optimale.

5. Le chemin d'expansion ou l'eutope de l'entreprise est le lieu des combinaisons de facteur (K,L) optimales définies pour des prix de facteurs restants constants et un coût total variable (courbe de consommation-revenu pour le consommateur).

- Puisque les prix des facteurs restent inchangés, le lieu des points optimaux sera obtenu à partir des points de contact entre les isoquantes et la droite de coût lorsque cette dernière se déplace parallèlement à elle-même dans le plan (KOL) et les points de l'eutope sont : Q,N,K,H,E,B.

Exercice 03 :

1. ***Déterminer la quantité demandée de chaque facteur pour mettre en œuvre une production $Q = 100$:***

Le problème d'optimisation posé ici est celui de la recherche du coût minimum permettant de réaliser une production donnée $Q = 100$:

Donc on peut écrire :

$$\begin{cases} Min\ CT = 9L + 4K \\ S/_C\ 100 = 2\sqrt{L}\sqrt{K} \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Lagrange :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = 9L + 4K + \lambda(100 - 2L^{0,5}K^{0,5})$$

1ère condition (condition nécessaire) :

Les dérivées partielles de L par rapport aux trois variables L, K, λ doivent s'annuler en même temps :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta L} = 9 - \lambda L^{-0,5}K^{0,5} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{9}{L^{-0,5}K^{0,5}} \ldots\ldots(1) \\ \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta K} = 4 - \lambda L^{0,5}K^{-0,5} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{4}{L^{0,5}K^{-0,5}} \ldots\ldots(2) \\ \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\lambda} = 100 - 2L^{0,5}K^{0,5} = 0 \Rightarrow 100 = 2L^{0,5}K^{0,5} \ldots(3) \end{cases}$$

En mettant (1) et (2) $\Leftrightarrow \frac{9}{L^{-0,5}K^{0,5}} = \frac{4}{L^{0,5}K^{-0,5}}$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{L^{-0,5}K^{0,5}}{L^{0,5}K^{-0,5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{K}{L}$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{9}{4} \cdot L \quad \ldots.(4)$$

En remplaçant (4) dans l'équation (3) : $100 = 2L^{0,5}\left(\frac{9}{4} \cdot L\right)^{0,5}$

$$100 = 2L^{0,5}\frac{3}{3}L^{0,5}$$

$$100 = 3 \cdot L \quad \Rightarrow L = \frac{100}{3}$$

Et $K = \frac{9}{4} \cdot L \ \Rightarrow$ K= 75

Donc $L = \frac{100}{3}$ et K= 75 est la combinaison de facteurs qui permet d'obtenir un coût minimum sur l'isoquante $Q = 100$.

2. ***Vérification des conditions du deuxième ordre (la condition suffisante) :***

Pour que l'optimum défini à la question précédente corresponde à un minimum de coût il faut que $\delta^2\mathcal{L}$ soit une forme quadratique définie positive.

Ceci est réalisé si le déterminant de la matrice des coefficients de $\delta^2\mathcal{L} = |H|$ est négative $|H| < 0$, ce déterminant est composé des dérivées partielles secondes de $\mathcal{L}$ par rapport à K , L , λ .

$$\delta^2\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0,5\ \lambda L^{-1,5}K^{0,5} & -0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} & -L^{-0,5}K^{0,5} \\ -0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} & 0,5\ \lambda L^{0,5}K^{-1,5} & -L^{0,5}K^{-0,5} \\ -L^{-0,5}K^{0,5} & -L^{0,5}K^{-0,5} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant $|H|$:

$$|H| = -L^{-0,5}K^{0,5}\begin{vmatrix} -0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} & -L^{-0,5}K^{0,5} \\ 0,5\ \lambda L^{0,5}K^{-1,5} & -L^{0,5}K^{-0,5} \end{vmatrix}$$
$$+L^{0,5}K^{-0,5}\begin{vmatrix} 0,5\ \lambda L^{-1,5}K^{0,5} & -L^{-0,5}K^{0,5} \\ -0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} & -L^{0,5}K^{-0,5} \end{vmatrix}$$

$$|H| = -L^{-0,5}K^{0,5}(0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5}L^{0,5}K^{-0,5} + 0,5\ \lambda L^{0,5}K^{-1,5}L^{-0,5}K^{0,5}) + L^{0,5}K^{-0,5}(-0,5\ \lambda L^{-1,5}K^{0,5}\ L^{0,5}K^{-0,5} - 0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5}\ L^{-0,5}K^{0,5})$$

$$|H| = -L^{-0,5}K^{0,5} \cdot (0,5\ \lambda K^{-1} + 0,5\ \lambda K^{-1}) + L^{0,5}K^{-0,5}(0,5\ \lambda L^{-1} - 0,5\ \lambda L^{-1})$$

$$|H| = -L^{-0,5}K^{0,5}\ (\lambda K^{-1}) + L^{0,5}K^{-0,5}(-\lambda L^{-1})$$

$$|H| = -\lambda L^{-0,5}K^{-0,5} - \lambda L^{-0,5}K^{-0,5}$$

$$|H| = -2\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} < 0$$

$\Rightarrow$ $\delta^2\mathcal{L}$ est définie positive donc l'optimum définie à la question précédente est un minimum.

Les conditions du deuxième ordre :

$|H| > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\delta^2\mathcal{L}}$ est définie négative ⇒ un maximum

$|H| < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\delta^2\mathcal{L}}$ est définie positive ⇒ un minimum

<u>Deuxième méthode pour calculer le déterminant :</u>

$$|H| = \left|\begin{matrix} 0,5\ \lambda L^{-1,5}K^{0,5} & -0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} & -L^{-0,5}K^{0,5} \\ -0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} & 0,5\ \lambda L^{0,5}K^{-1,5} & -L^{0,5}K^{-0,5} \\ -L^{-0,5}K^{0,5} & -L^{0,5}K^{-0,5} & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0,5\ \lambda L^{-1,5}K^{0,5} & -0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} \\ -0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} & 0,5\ \lambda L^{0,5}K^{-1,5} \\ -L^{-0,5}K^{0,5} & -L^{0,5}K^{-0,5} \end{matrix}$$

$$|H| = (0,5\ \lambda L^{-1,5}K^{0,5}) \cdot (0,5\ \lambda L^{0,5}K^{-1,5}) \cdot (0) + (-0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5}) \cdot (-L^{0,5}K^{-0,5}) \cdot (-L^{-0,5}K^{0,5}) + (-L^{-0,5}K^{0,5}) \cdot (-0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5}) \cdot (-L^{0,5}K^{-0,5}) - (-L^{-0,5}K^{0,5}) \cdot (0,5\ \lambda L^{0,5}K^{-1,5}) \cdot (-L^{-0,5}K^{0,5}) - (0,5\ \lambda L^{-1,5}K^{0,5}) \cdot (-L^{0,5}K^{-0,5}) \cdot (-L^{0,5}K^{-0,5}) - (-0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5}) \cdot (-0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5}) \cdot (0)$$

$$|H| = -0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} - 0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} - 0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} - 0,5\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5}$$

$|H| = -2\ \lambda L^{-0,5}K^{-0,5} < 0 \Rightarrow$ **$\boldsymbol{\delta^2\mathcal{L}}$ est définie positive et donc l'optimum est un minimum.**

3. Pour atteindre le niveau de production $Q = 100$ l'entreprise doit utiliser les quantités $L = \frac{100}{3}$ et K= 75 donc le coût total est :

   $CT = 9\left(\frac{100}{3}\right) + 4(75)$

   $CT = 600$

   - Le budget disponible de l'entreprise est $CT = 504$ et donc le programme de production sera :

$$\begin{cases} Max\ Q = 2\sqrt{L}\sqrt{K} \\ {}^{S}/_{C}\ 504 = 9L + 4K \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Lagrange :

$$\mathcal{L} = 2L^{0,5}K^{0,5} + \lambda(504 - 9L - 4K)$$

1ère condition (condition nécessaire) :

$$\begin{cases} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta L} = L^{-0,5}K^{0,5} - 9\,\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{L^{-0,5}K^{0,5}}{9} \dots\dots(1) \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta K} = L^{0,5}K^{-0,5} - 4\,\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{L^{0,5}K^{-0,5}}{4} \dots\dots(2) \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\lambda} = 504 - 9L - 4K = 0 \Rightarrow 504 = 9L + 4K\dots(3) \end{cases}$$

(1) et (2) $\Leftrightarrow \frac{L^{-0,5}K^{0,5}}{9} = \frac{L^{0,5}K^{-0,5}}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{L^{-0,5}K^{0,5}}{L^{0,5}K^{-0,5}} = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{K}{L} = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow K = \frac{9}{4} \cdot L$ ….(4)

En remplaçant (4) dans l'équation (3) :

$504 = 9L + 4\left(\frac{9}{4} \cdot L\right)$

$\Rightarrow L = 28$

$\Rightarrow K = 63$

Donc pour $CT = 504$ la combinaison optimale est $L = 28$ et $K = 63$ et la production sera :

$Q = 2\sqrt{28}\sqrt{63}$

$Q = 84$

❖ Le développement du déterminant de la matrice de coefficients de $\delta^2\mathcal{L}$ montrerait qu'il s'agit d'une forme quadratique définie négative ($|H| > 0$) et que l'optimum obtenu est bien un maximum.

Exercice 04 :

1. ***Déterminer les quantités optimales des facteurs :***

$$\begin{cases} Max\ Q = K^\alpha L^\beta \\ S/_C\ C_0 = K\ P_K + L\ P_L \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = K^\alpha L^\beta + \lambda(C_0 - K\ P_K - L\ P_L)$$

1ère condition (condition nécessaire) :

$$\begin{cases} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta L} = \beta\ K^\alpha L^{\beta-1} - \lambda\ P_L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\beta\ K^\alpha L^{\beta-1}}{P_L} \ldots..(1) \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta K} = \alpha\ K^{\alpha-1} L^\beta - \lambda\ P_K = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha\ K^{\alpha-1}L^\beta}{P_K} \ldots..(2) \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\lambda} = C_0 - K\ P_K - L\ P_L = 0 \Rightarrow C_0 = K\ P_K + L\ P_L..(3) \end{cases}$$

(1) et (2) $\Leftrightarrow \frac{\beta\ K^\alpha L^{\beta-1}}{P_L} = \frac{\alpha\ K^{\alpha-1}L^\beta}{P_K}$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta\ K^\alpha L^{\beta-1}}{\alpha\ K^{\alpha-1}L^\beta} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta K}{\alpha L} = \frac{P_L}{P_K}$$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{K} = \frac{\propto}{\beta}\frac{P_L}{P_K}\cdot \boldsymbol{L}$ ….(4)

En remplaçant (4) dans l'équation (3) :

$$C_0 = \frac{\propto}{\beta}\frac{P_L}{P_K}\cdot L\ P_K + L\ P_L$$

$$C_0 = \frac{(\propto + \beta)P_L \cdot L}{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{L^*} = \frac{\boldsymbol{\beta\ C_0}}{(\propto + \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{P_L}}$$

$$K^* = \frac{\propto}{\beta}\frac{P_L}{P_K}\cdot L^*$$

$$K^* = \frac{\propto}{\beta}\frac{P_L}{P_K}\cdot\frac{\beta\ C_0}{(\propto + \beta)P_L} \Rightarrow \boldsymbol{K^*} = \frac{\boldsymbol{\alpha\ C_0}}{(\propto + \boldsymbol{\beta})\ \boldsymbol{P_K}}$$

2. ***L'homogénéité de la fonction :***

En multipliant les quantités de facteurs de production par une constante λ on aura : $Q^* = (\lambda K)^\alpha(\lambda L)^\beta$

$Q^* = \lambda^{\propto+\beta}\ K^\alpha L^\beta$

$Q^* = \lambda^{\propto+\beta} Q$

Donc cette fonction est homogène de degré $(\propto + \beta)$.

3. ***La nature des rendements d'échelle si $\boldsymbol{\beta = \frac{1}{3}}$:***

Nous avons $\beta = \frac{1}{3}$ et le degré d'homogénéité est $(\propto + \beta)$ donc :

- Si $(\propto + \beta) = 1 \Leftrightarrow \propto + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow \propto = \frac{2}{3}$

  $\Rightarrow$ Les rendements d'échelle sont **constants**.
- Si $(\propto + \beta) > 1 \Leftrightarrow \propto + \frac{1}{3} > 1 \Leftrightarrow \propto > \frac{2}{3}$

  $\Rightarrow$ Les rendements d'échelle sont **croissants**.
- Si $(\propto + \beta) < 1 \Leftrightarrow \propto + \frac{1}{3} < 1 \Leftrightarrow \propto < \frac{2}{3}$

  $\Rightarrow$ Les rendements d'échelle sont **décroissants**.

4. ***Application numérique :***

$P_K = 8,\ P_L = 4\ ,\ C_0 = 48\ ,\ \beta = \frac{1}{3}$

a. Le niveau de production à l'optimum lorsque les rendements d'échelle sont constants :

Rendements d'échelle constants $\Leftrightarrow (\propto + \beta) = 1$

$$\Leftrightarrow \propto + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow \propto = \frac{2}{3}$$

Calculons les quantités optimales des facteurs :

$$L^* = \frac{\beta\ C_0}{(\propto + \beta)P_L} \Rightarrow \boldsymbol{L = 4}$$

$$K^* = \frac{\alpha\ C_0}{(\propto + \beta)\ P_K} \Rightarrow \boldsymbol{K = 4}$$

Et le niveau de production à l'optimum :

$Q = K^\alpha L^\beta = 4$

b. Le nouveau niveau de production de cette entreprise si elle décide de doubler les quantités de ses facteurs de production :

$Q = 4 \cdot 2 \Rightarrow Q = 8$

Parce que les rendements d'échelle de cette fonction sont constants donc la quantité produite varie dans les mêmes proportions que les quantités des facteurs utilisés.

c. Les nouvelles quantités de facteurs si le prix du travail doublait :

$P_L = 2 \cdot 4 = 8$

$$L^* = \frac{\beta\ C_0}{(\propto + \beta)P_L} \Rightarrow \boldsymbol{L = 2}$$

$$K^* = \frac{\alpha\ C_0}{(\propto + \beta)\ P_K} \Rightarrow \boldsymbol{K = 4}$$

Et le niveau de production à l'optimum :

$$Q = K^\alpha L^\beta = \boldsymbol{2^{\frac{5}{3}}}$$

Remarque (1) :

- ***On a trouvé :*** $L^* = \frac{\beta C_0}{(\propto+\beta)P_L}$
- ***On remarque que*** P_K ***n'existe pas dans la fonction de demande de L et donc on peut dire que K et L sont indépendants mais cela ne veut pas qu'il ne sont pas substituables.***
- ***Le terme indépendant signifie que la variation du prix de l'un d'eux n'affecte pas la quantité demandée du deuxième bien.***
- ***Et dans notre exemple les deux facteurs sont substituables (mais pas parfaitement substituable ⇒ c'est-à-dire substituabilité parfaite ⇒ on remplace une unité du premier par une unité du deuxième).***
- ***Pour mesurer la substituabilité entre les facteurs on utilise le concept « d'élasticité de substitution ».***

Remarque (2) :

- ***On parle de la substitution entre les facteurs lorsque la quantité produite est constante (sur la même isoquante) mais lorsque la quantité change on ne parle plus de substitution on parle d'un nouveau point d'équilibre.***

Exercice 05 :

1. ***Calculer la combinaison L^* et K^* qui minimise la dépense de l'entreprise :***

Soit Q_0 un niveau d'output donné, le programme est le suivant :

$$\begin{cases} Min\ CT = K\,P_K + L\,P_L \\ {}^{s}/_{c}\ Q_0 = K^{\frac{1}{4}}\,L^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Lagrange :

$$\mathcal{L} = K\,P_K + L\,P_L + \lambda\left(Q_0 - K^{\frac{1}{4}}\,L^{\frac{1}{2}}\right)$$

A l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta L} = P_L - \dfrac{1}{2}\lambda K^{\frac{1}{4}}\,L^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\,P_L}{K^{\frac{1}{4}}\,L^{-\frac{1}{2}}} \ldots..(1) \\ \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta K} = P_K - \dfrac{1}{4}\lambda K^{-\frac{3}{4}}\,L^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{4\,P_K}{K^{-\frac{3}{4}}\,L^{\frac{1}{2}}} \ldots..(2) \\ \dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\lambda} = Q_0 - K^{\frac{1}{4}}\,L^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow Q_0 = K^{\frac{1}{4}}\,L^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots..(3) \end{cases}$$

En mettant (1) et (2) $\Leftrightarrow \frac{2\,P_L}{K^{\frac{1}{4}}\,L^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4\,P_K}{K^{-\frac{3}{4}}\,L^{\frac{1}{2}}}$

$$\Leftrightarrow \frac{P_L}{2\,P_K} = \frac{K^{\frac{1}{4}}\,L^{-\frac{1}{2}}}{K^{-\frac{3}{4}}\,L^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P_L}{2\,P_K} = \frac{K}{L}$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{P_L}{2\,P_K}\cdot L \quad \ldots.(4)$$

En remplaçant (4) dans l'équation (3) : $Q_0 = \left(\frac{P_L}{2\,P_K}\cdot L\right)^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{2}}$

$$Q_0 = \left(\frac{P_L}{2\,P_K}\right)^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

$$L^{\frac{3}{4}} = Q_0\left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\left[L^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}} = \left[Q_0\left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{4}{3}}$$

$$\boldsymbol{L^* = Q_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$K^* = \frac{P_L}{2\,P_K}\cdot L^*$$

$$K^* = \frac{P_L}{2\,P_K}\cdot Q_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{K^* = Q_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{-\frac{2}{3}} = Q_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{P_L}{2\,P_K}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

L^* et K^* représentent les demandes optimales d'inputs qui assurent à l'entreprise à l'entreprise la moindre dépense.

2. ***Calcule de la combinaison L^* et K^* en utilisant la méthode mathématique :***

$$\begin{cases} Min\ CT = K\,P_K + L\,P_L \ldots.(1) \\ {}^{s}/_{c}\ Q_0 = K^{\frac{1}{4}}\,L^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots.(2) \end{cases}$$

Nous avons $Q_0 = K^{\frac{1}{4}}\,L^{\frac{1}{2}}$

$(2) \Leftrightarrow L^{\frac{1}{2}} = Q_0\,K^{-\frac{1}{4}}$

$\quad \Leftrightarrow L = Q_0^2\,K^{-\frac{1}{2}}$……..(3)

En remplaçant (3) dans (1) :

$$CT = K\,P_K + Q_0^2\,K^{-\frac{1}{2}}\,P_L$$

Pour minimiser CT deux conditions doivent être réalisé : $(CT)' = 0$, $(CT)'' > 0$

$$(CT)'_K = P_K - \frac{1}{2}Q_0^2\,K^{-\frac{3}{2}}\,P_L = 0$$

$$\Rightarrow 2\,P_K = Q_0^2 P_L\,K^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow K^{-\frac{3}{2}} = \frac{2\,P_K}{Q_0^2 P_L}$$

$$\Rightarrow \left[K^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} = \left[\frac{Q_0^2 P_L}{2\,P_K}\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{K^* = Q_0^{\frac{4}{3}}\cdot\left(\frac{P_L}{2\,P_K}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$L^* = Q_0^2\,K^{*-\frac{1}{2}}$$

$$L^* = Q_0^2\left[Q_0^{\frac{4}{3}}\cdot\left(\frac{P_L}{2\,P_K}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$L^* = Q_0^2\,Q_0^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{P_L}{2\,P_K}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{L^* = Q_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

3. ***L'équation du sentier d'expansion :***

Nous savons que le sentier d'expansion est l'ensemble des combinaisons optimales, pour déterminer son équation il suffit de prendre les conditions d'optimalité :

A l'optimum nous avons : $\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K}$

$$\frac{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{4}}\,L^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}\lambda K^{-\frac{3}{4}}\,L^{\frac{1}{2}}} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{K}{\frac{1}{2}\,L} = \frac{P_L}{P_K}$$

$\boldsymbol{K = \frac{P_L}{2\,P_K}\cdot L}$ **l'équation du sentier d'expansion.**

Elle est de la forme $\boldsymbol{K = a\cdot L}$ donc c'est une droite.

Application numérique : $P_L = 1,\ P_K = 2$ donc $\boldsymbol{K = \frac{1}{4}\cdot L}$

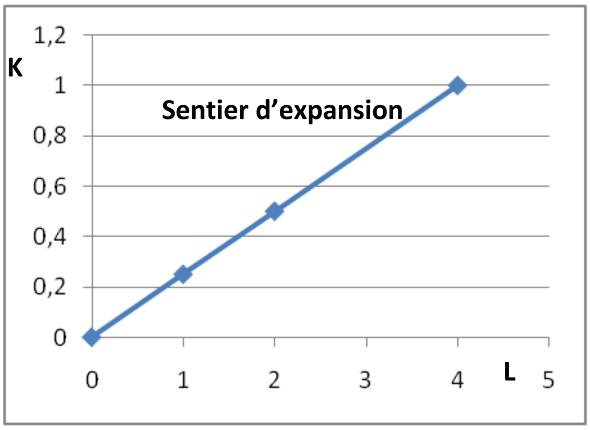


Fig : le sentier d'expansion

4. <u>*La moindre dépense et la fonction de coût total :*</u>

$CT^* = K^* \, P_K + L^* \, P_L$

$$CT^* = Q_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{-\frac{2}{3}} P_K + Q_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{\frac{1}{3}} P_L$$

$$CT^* = Q_0^{\frac{4}{3}} \left[\left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{-\frac{2}{3}} P_K + \left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{\frac{1}{3}} P_L\right]$$

$$CT^* = Q_0^{\frac{4}{3}} \left[2^{-\frac{2}{3}} P_K^{-\frac{2}{3}} P_L^{\frac{2}{3}} P_K + 2^{\frac{1}{3}} P_K^{\frac{1}{3}} P_L^{-\frac{1}{3}} P_L\right]$$

$$CT^* = Q_0^{\frac{4}{3}} \left[2^{-\frac{2}{3}} P_L^{\frac{2}{3}} P_K^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} P_L^{\frac{2}{3}} P_K^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$CT^* = Q_0^{\frac{4}{3}} P_L^{\frac{2}{3}} P_K^{\frac{1}{3}} \left(2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$\boldsymbol{CT^* = Q_0^{\frac{4}{3}} \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} P_L^{\frac{2}{3}} P_K^{\frac{1}{3}}}$$

La fonction de cout total mesure la dépense minimale quand le niveau de production varie, les prix des facteurs restant constants.
Pour déterminer cette fonction de cout total, on remplace Q_0 par Q dans l'équation de CT et on obtient :

$$\boldsymbol{CT = Q^{\frac{4}{3}} \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} P_L^{\frac{2}{3}} P_K^{\frac{1}{3}}}$$

5. <u>*Interprétation du multiplicateur de Lagrange λ :*</u>

Prenons le problème sous une formulation générale :

$$\begin{cases} Min\ CT = K\,P_K + L\,P_L \\ {}^{s}/_{c}\ Q_0 = Q \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Lagrange :

$$\mathcal{L} = K\,P_K + L\,P_L + \lambda(Q_0 - Q)$$

A l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta L} = P_L - \lambda\,Pmg_L = 0 \Rightarrow P_L = \lambda\,Pmg_L \\ \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta K} = P_K - \lambda\,Pmg_K = 0 \Rightarrow P_K = \lambda\,Pmg_K \end{cases}$$

En prenant la différentielle totale de $CT = K\,P_K + L\,P_L$

$d\,CT = P_K dK + P_L dL$

$d\,CT = \lambda\,Pmg_K\,dK + \lambda\,Pmg_L\,dL$

$d\,CT = \lambda\,(Pmg_K\,dK + Pmg_L\,dL)$

$d\,CT = \lambda\,dQ$

$\lambda = \frac{d\,CT}{dQ} = Cmg$ (Le coût marginal)

<u>Calculer la valeur du multiplicateur de Lagrange (λ) :</u>

<u>1ère méthode :</u>

Nous avons $\lambda = Cmg = \frac{\delta CT}{\delta Q}$

$$\lambda = \frac{4}{3} Q^{\frac{1}{3}} \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} P_L^{\frac{2}{3}} P_K^{\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{\lambda = Q_0^{\frac{1}{3}}\, 2^{\frac{4}{3}}\, P_L^{\frac{2}{3}} P_K^{\frac{1}{3}}}$$

<u>2ème méthode :</u>

Il suffit de prendre l'équation (1) des conditions d'optimisation et remplace K et L par K^* et L^* :

$$\lambda = \frac{2\,P_L}{K^{*\frac{1}{4}} L^{*-\frac{1}{2}}}$$

$$\lambda = 2\,P_L \cdot K^{*-\frac{1}{4}} L^{*\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = 2\,P_L \cdot \left[Q_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{1}{4}} \left[Q_0^{\frac{4}{3}} \left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = 2\,P_L Q_0^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{\frac{1}{6}} Q_0^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2\,P_K}{P_L}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\lambda = 2\,P_L Q_0^{\frac{1}{3}}\, 2^{\frac{1}{3}}\, P_K^{\frac{1}{3}}\, P_L^{-\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{\lambda = Q_0^{\frac{1}{3}}\, 2^{\frac{4}{3}}\, P_L^{\frac{2}{3}} P_K^{\frac{1}{3}}}$$

<u>Remarque :</u>

Dans le cas de maximisation on aura : $\lambda = \frac{dQ}{d\,CT}$
Si la variation de coût $dCT = 1$ *donc* λ *est l'accroissement de la production résultant du desserrement de la contrainte budgétaire d'une unité.*
Donc λ *est l'accroissement de la production résultant de l'augmentation du budget d'une seule unité.*

Rappel de cour : ***Le théorème d'Euler***

Soit $f(K, L)$ une fonction homogène de degré m. D'après le théorème d'Euler, nous avons :

$$\boldsymbol{K \cdot f'_K + L \cdot f'_L = m \cdot f(K, L)}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{K \cdot Pmg_K + L \cdot Pmg_L = m \cdot Q}$

1. **Si $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$:**

- Dans ce cas d'après Euler nous avons $K \cdot Pmg_K + L \cdot Pmg_L = 1 \cdot Q$
- Donc si l'entreprise paie chaque facteur de production à sa productivité marginale alors la rémunération totale des facteurs est égale à la production.
- On dit que le produit est épuisé et que l'entreprise ne dégage ni profit ni perte. C'est la règle de l'épuisement du produit.

2. **Si $\boldsymbol{m} < 1$:**

- Dans ce cas d'après Euler nous avons $K \cdot Pmg_K + L \cdot Pmg_L = m \cdot Q < Q$
- Donc si l'entreprise paie chaque facteur à sa productivité marginale alors la rémunération totale des inputs est strictement inférieure à la production.
- L'entreprise réalise ainsi un profit.

3. **Si $\boldsymbol{m} > 1$:**

- Dans ce cas d'après Euler nous avons $K \cdot Pmg_K + L \cdot Pmg_L = m \cdot Q > Q$
- Donc si l'entreprise paie chaque facteur à sa productivité marginale alors la rémunération totale des facteurs est strictement supérieure à la production.
- L'entreprise réalise ainsi une perte.

Suite de l'exercice 01 :

Question 02 : quelles sont les fonctions de production qui vérifient la règle de l'épuisement du produit.

Réponse :

Les fonctions de production qui vérifient la règle de l'épuisement du produit :

- Nous savons que seules les fonctions de production homogènes de degré 1 c'est-à-dire linéaires homogènes, vérifient la règle de l'épuisement du produit.
- En effet, dans ce cas, d'après le théorème d'Euler nous savons que :
  $K \cdot Pmg_K + L \cdot Pmg_L = 1 \cdot Q$
- Donc si l'entreprise paie chaque facteur de production à sa productivité marginale alors la rémunération totale des facteurs est égale à la production.
- On dit que le produit est épuisé et que l'entreprise ne dégage ni profit ni perte. C'est la règle de l'épuisement du produit.
- Seules les fonctions : Q_1, Q_4 qui vérifient cette règle.

Rappel du cour :

La fonction de Cobb-Douglas

La production Q est fonction des quantités de travail L et de capital K utilisées.
La fonction de Cobb-Douglas s'écrit :

$$\boldsymbol{Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}}$$

Sachant que :
A: le paramètre de dimension ($A > 0$)
α et β : sont des paramètres positifs.

Caractéristiques :

1. ***Cette fonction est destinée aux grands projets industriels et ce à long terme.***

2. ***La formes des isoquantes :***

On va étudier la forme des isoquantes pour un niveau quelconque de production $Q = Q_0$.
On a :

$$Q_0 = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$$

$$K^{\beta} = \frac{Q_0}{A} \cdot L^{-\alpha} \Rightarrow K = \left[\frac{Q_0}{A}\right]^{\frac{1}{\beta}} \cdot L^{\frac{-\alpha}{\beta}}$$

L'équation de l'isoquante.

- $1^{\text{ère}}$ dérivée (croissante ou décroissante)
- $2^{\text{ème}}$ dérivée (convexe ou concave).

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{Q_0}{A}\right]^{\frac{1}{\beta}} \cdot L^{\frac{-\alpha}{\beta}-1} = -\frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{Q_0}{A}\right]^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{L^{\frac{-\alpha}{\beta}}}{L}$$

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{K}{L} < 0$$

$\Rightarrow$ *l'isoquante est décroissante.*

$$\frac{d^2K}{d\,L^2} = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\left[\frac{dK}{dL} \cdot L - K\right]}{L^2}$$

Nous savons que $\frac{dK}{dL} < 0 \Rightarrow \left[\frac{dK}{dL} \cdot L - K\right] < 0$

$\Rightarrow \frac{d^2K}{d\,L^2} > 0$

donc *l'isoquante est concave par rapport à l'origine.*

3. ***Relation entre PM_L et Pmg_L :***

$$Pmg_L = \frac{\delta Q}{\delta L} = \alpha \cdot A \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{\beta} \;\ldots..(1)$$

$$PM_L = \frac{Q}{L} = A \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{\beta} \;\ldots..(2)$$

A partir de (1) et (2) on remarque que :

$$Pmg_L = \alpha\, PM_L$$

De même que : $Pmg_K = \beta\, PM_L$

4. ***Le TMST de cette fonction :***

$$TMST_{LK} = -\frac{dK}{dL} = \frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{\alpha \cdot A \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{\beta}}{\beta \cdot A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta-1}} = \frac{\alpha K}{\beta L}$$

TMST de L pour K mesure le nombre d'unités de facteur K qui doit être abandonné lorsqu'on augmente L par une unité.

5. ***L'homogénéité de la fonction Cobb-Douglas :***

On multipliant les quantités utilisées de facteur K et L par une constante λ on aura :

$$Q^* = A \cdot (\lambda L)^{\alpha} \cdot (\lambda K)^{\beta}$$
$$Q^* = \lambda^{\alpha+\beta}\left(A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}\right)$$
$$Q^* = \lambda^{\alpha+\beta}\, Q$$

Cette fonction est homogène de degré $(\alpha+\beta)$ et donc :
Si $(\alpha+\beta) = 1$ les rendements d'échelles sont constants.
Si $(\alpha+\beta) > 1$ les rendements d'échelles sont croissants.
Si $(\alpha+\beta) < 1$ les rendements d'échelles sont décroissants.

6. ***Les élasticités de la production par rapport au travail et au capital ne sont autre que les exposantes de ces derniers :***

$$e_{Q/L} = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dL}{L}} = \frac{dQ}{Q} \cdot \frac{L}{dL} = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q}$$

$$e_{Q/L} = \alpha \cdot A \cdot L^{\alpha-1} \cdot K^{\beta} \cdot \frac{L}{A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}} = \alpha > 0$$

Donc lorsqu'on augmente la quantité utilisée de facteur L de 1% la quantité augmente de α%.

$$e_{Q/K} = \beta \;(meme\ commentaire)$$

Remarque 01 :

On peut démontrer que $Pmg_L = \alpha\, PM_L$ *en utilisant l'élasticité comme suit :*

$$e_{Q/L} = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dL}{L}} = \frac{dQ}{Q} \cdot \frac{L}{dL} = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q}$$

$$\Rightarrow e_{Q/L} = Pmg_L \cdot \frac{L}{Q} = Pmg_L \cdot \frac{1}{\frac{Q}{L}}$$

$$= Pmg_L \cdot \frac{1}{PM_L}$$

$$\Rightarrow e_{Q/L} = \frac{Pmg_L}{PM_L}$$

Et puisque on sait que

$$e_{Q/L} = \alpha$$

donc $\alpha = \frac{Pmg_L}{PM_L} \Rightarrow Pmg_L = \alpha\, PM_L$

Remarque 02 :

Soit la fonction $Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$

On dit que cette fonction est une fonction de Cobb-Douglas si $\alpha + \beta = 1$ *et donc la fonction peut s'écrire :*

$$Q = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}$$

On dit que cette fonction est de type Cobb-Douglas si $\alpha + \beta \neq 1$

Rappel de cour :

Les fonctions CES

- Les fonctions CES (*Constant Elasticity of Substitution*) sont des fonctions de production à élasticité de substitution constante.
- L'élasticité de substitution est égale au rapport entre la variation relative du rapport des facteurs de production et la variation relative du TMST, soit :

$$\theta = \frac{\frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)}}{\frac{\Delta\, TMST}{TMST}} = \frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\Delta\, TMST} \cdot \frac{TMST}{\left(\frac{K}{L}\right)}$$

- L'élasticité de substitution permet de mesurer le pourcentage de variation du rapport d'utilisation des facteurs lorsque le TMST varie de 1%. Elle indique donc le degré de substitution entre les facteurs le long de l'isoquante puisqu'elle fait référence aux variations du TMST et permet de mettre en évidence la plus ou moins forte convexité de cette isoquante. (Puisque le TMST mesure la pente de l'isoquante).
- De façon générale les fonctions CES peuvent s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{Q(K,L) = A(\alpha\, L^{\rho} + \beta K^{\rho})^{1/\rho}}$$

Avec : $A, \alpha, \beta > 0 \ , \rho \leq 1$
A est le paramètre de dimension.
$\alpha \ et \ \beta$ sont des constantes.

Caractéristiques :

1. ***L'homogénéité de la fonction CES :***

On constate que :

$$Q^*(\lambda K, \lambda L) = A[\alpha\,(\lambda L)^{\rho} + \beta(\lambda K)^{\rho}]^{1/\rho}$$
$$Q^*(\lambda K, \lambda L) = A[\lambda^{\rho}(\alpha\, L^{\rho} + \beta K^{\rho})]^{1/\rho}$$
$$Q^*(\lambda K, \lambda L) = \lambda\, A(\alpha\, L^{\rho} + \beta K^{\rho})^{1/\rho}$$
$$Q^*(\lambda K, \lambda L) = \lambda Q$$

⇒ La fonction CES est homogène de degré 1.
⇒ Les rendements d'échelles sont constants.

2. ***La productivité marginale des facteurs :***

$$Pmg_L = \frac{\delta Q}{\delta L}$$
$$Pmg_L = A \cdot \frac{1}{\rho} \cdot (\alpha\, L^{\rho} + \beta K^{\rho})^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot (\rho\alpha L^{\rho-1})$$
$$Pmg_L = \alpha A(\alpha\, L^{\rho} + \beta K^{\rho})^{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot L^{\rho-1}$$
$$L^{\rho-1} = \frac{1}{L^{1-\rho}} = \left(\frac{1}{L}\right)^{1-\rho} = \left(\frac{1^{\rho}}{L^{\rho}}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} = \left(\frac{1}{L^{\rho}}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$
$$Pmg_L = \alpha A\left(\alpha\, L^{\rho} \cdot \frac{1}{L^{\rho}} + \beta K^{\rho} \cdot \frac{1}{L^{\rho}}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$
$$Pmg_L = \alpha A\left(\alpha + \beta\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

$$Pmg_K = \beta A(\alpha\, L^{\rho} + \beta K^{\rho})^{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot K^{\rho-1}$$
$$Pmg_K = \beta A\left(\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho} + \beta\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}$$

3. ***Le TMST :***

$$TMST = \frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{\alpha A(\alpha\, L^{\rho} + \beta K^{\rho})^{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot L^{\rho-1}}{\beta A(\alpha\, L^{\rho} + \beta K^{\rho})^{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot K^{\rho-1}}$$
$$TMST = \frac{\alpha \cdot L^{\rho-1}}{\beta \cdot K^{\rho-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{L}{K}\right)^{\rho-1}$$

On constate que si $\rho = 0$

$$TMST = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{K}{L}$$

Donc le TMST est identique à celui de la fonction de type Cobb-Douglas.

Série d'exercices N° 09 :
(Les coûts de production)

Exercice 01 :

Soit une entreprise dont les couts sont tels que :

Quantités produites	Coûts totaux
1	100
2	130
3	155
4	170
5	183,33
6	220
7	350

1. Calculer les coûts moyens et les coûts marginaux de cette entreprise. Faire un tableau.
2. Représenter sur un graphique CM , Cmg et $CT(Q)$. Commenter.
3. Quelle est le seuil de rentabilité ?

Exercice 02 :

En courte période, le coût variable total d'une entreprise (CVT) varie en fonction de la quantité produite Q selon la relation :

$$\boldsymbol{CVT = Q^3 - 10\,Q^2 + 50\,Q}$$

L'entreprise considérée supporte aussi un coût fixe total $CF = 72$

1. Calculer et représenter sur un graphique le coût total, le coût moyen et le coût marginale et le coût variable moyen de l'entreprise, pour les valeurs entières de Q comprise entre 0 et 9 unités.
2. Commenter la forme de la courbe de coût total de l'entreprise et vérifier l'existence d'un point d'inflexion.
3. Expliquer les positions respectives des courbes de coût moyen et de coût marginal de l'entreprise.
4. Après avoir analyser les positions respectives des courbes de coût variable moyen et de coût marginal de l'entreprise, analyser les positions respectives des courbes de coût moyen et de coût variable moyen.

Exercice 03 :

Une entreprise est caractérisée par la fonction de production suivante :

$$\boldsymbol{Q = L^{\frac{1}{4}}\,K^{\frac{1}{4}}}$$

K est la quantité de capital utilisée et L est la quantité de travail. Le prix de K est $P_K = 3$ et celui de L est $P_L = 1$.

1. On se situe à court terme. L'entreprise possède une quantité de capital fixe égale à 16. Calculez le coût total, le coût moyen et le coût marginal à court terme.
2. On se situe maintenant à long terme. Etablissez les fonctions de coût total, coût moyen et coût marginal.

Exercice 04 :

Nous savons que dans le cas d'une fonction de production $Q = 3\,K^{\frac{1}{4}}\,L^{\frac{1}{4}}$, la fonction de coût total de courte période s'écrit :

$$\boldsymbol{C(Q)_{cp} = \left(\frac{P_L}{1296}\right)Q^4 + 16\,P_K}$$

Et la fonction de coût total de longue période s'écrit :

$$\boldsymbol{C(Q)_{lp} = \frac{1}{9}\,Q^2(P_LP_K)^{0.5}}$$

On suppose que le prix unitaire du capital est $P_K = 1$, et que le prix unitaire du travail est $P_L = 4$. On note $\boldsymbol{P}$ le prix de l'output.

1. En courte période, déterminer le niveau de l'output qui maximise le profit de l'entreprise.

2. Même question en longue période en procédant par :
   a. Une maximisation indirecte du profit ;
   b. Une maximisation directe du profit.

Rappel de cour :

Les couts de production

- Le cout de production représente l'ensemble des dépenses nécessaires à l'obtention d'un volume de production donné.
- La théorie micro-économique des couts considère que le problème de la combinaison optimale des facteurs a été résolu au préalable et donc la fonction de cout relie le cout de production aux quantités produites dans les conditions optimales.
- Dans ce contexte le problème de l'entreprise s'agit de choisir le niveau de production pour lequel ses profits seront les plus élevés.
- Mais la situation de l'entreprise n'est pas la même à court terme et à long terme.
- Le court terme est définit comme la période pendant laquelle un producteur peut accroitre la production dans la mesure où sa capacité de production le lui permet. La courte période est donc caractérisée par la fixité des équipements $(K = cst)$ l'ajustement du niveau de la production se faisant par modification de la quantité de travail ou de matières premières.
- Par contre le long terme se définit comme la période qui permet la modification dans l'échelle de la production et le volume de l'outillage et de l'équipement (tout les facteurs de production sont variable K, L ...).
- Donc le court terme et le long terme ne sont pas définies en terme de calendrier, elle varieront suivant le type de l'entreprise ou du produit.

1. Les couts de production en courte période :

- Après avoir déterminé la combinaison produite optimale, le producteur peut déduire le cout total des facteurs qu'il doit utiliser pour produire le niveau de production fixé. Ce cout comprend donc celui du facteur fixe et celui du facteur variable pour la quantité produite donnée.
- Donc la fonction de cout total de courte période indique le cout minimal supporté par le producteur pour chaque niveau de production, compte tenu des prix des facteurs et de l'existence de facteurs fixes.

a. Les différents types de couts :

Il y a trois types de couts :

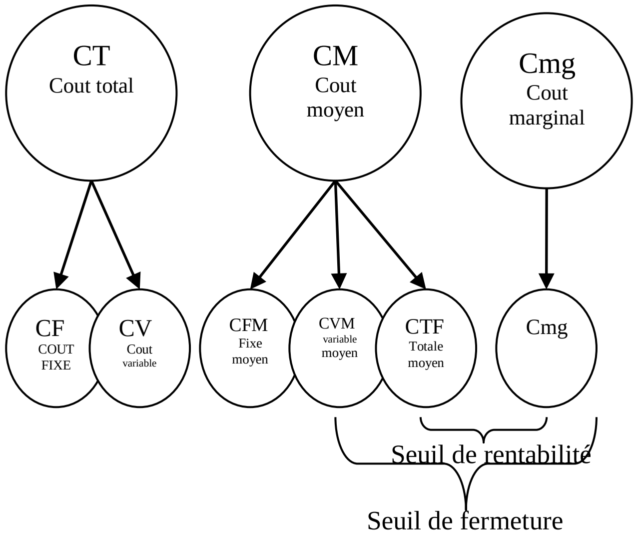


Fig : les trois types de couts.

Coût total : c'est la dépense minimale qu'une entreprise doit engager pour atteindre un niveau de production donné « elle mesure le coût minimum pour chaque niveau de production avec les prix fixes des facteurs ».

Coût fixe : le coût qui ne varie pas avec les quantités produites.
Coût variable : c'est le coût qui dépend du niveau de production.

Coût moyen total (CTM) : il représente le coût nécessaire pour produire une unité de produit. $\left(CM = \frac{CT}{Q}\right)$.

Coût variable moyen (CVM) : il représente le coût variable nécessaire pour produire une unité de produit.

Coût fixe moyen (CFM) : il représente le coût fixe nécessaire pour produire une unité de produit.

Coût marginal (Cmg) : est le coût supplémentaire lorsqu'on augmente la quantité produite par une unité. $(Cmg = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{\delta CT}{\delta Q})$

b. La représentation graphique :

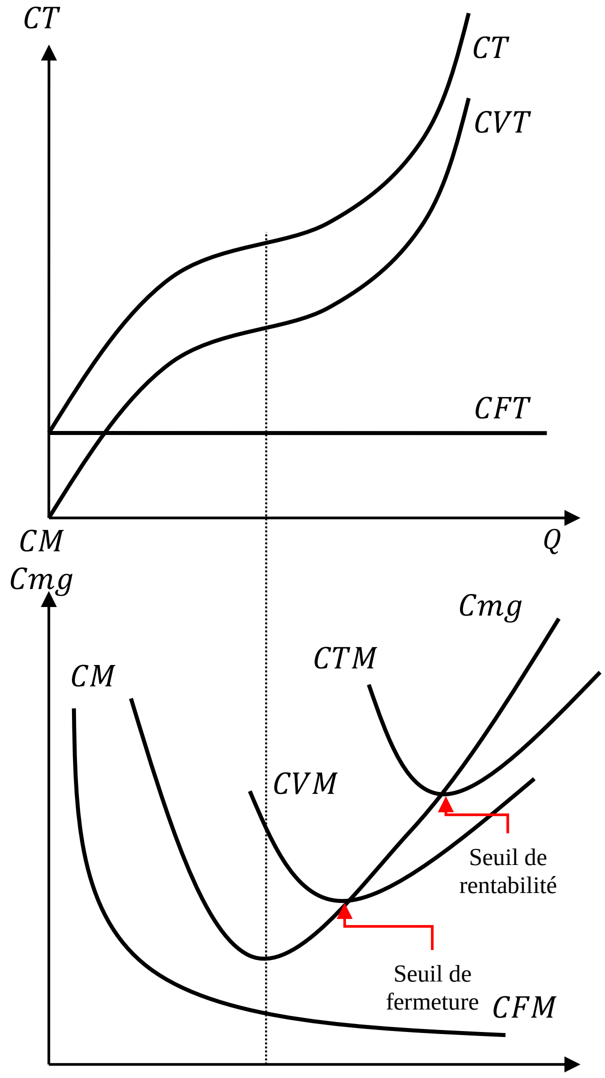


Fig : la représentation graphique des différents types de coûts

2. Les coûts de production en longue période :

- Le coût total de longue période indique le coût minimal de production pour chaque niveau de production lorsque tous les facteurs de production sont variables.
- La fonction du coût total peut être obtenue en résolvant un programme de minimisation du coût de production sous la contrainte d'un niveau de production donné quand tous les facteurs sont variables.

La représentation graphique :

Le coût total de longue période :

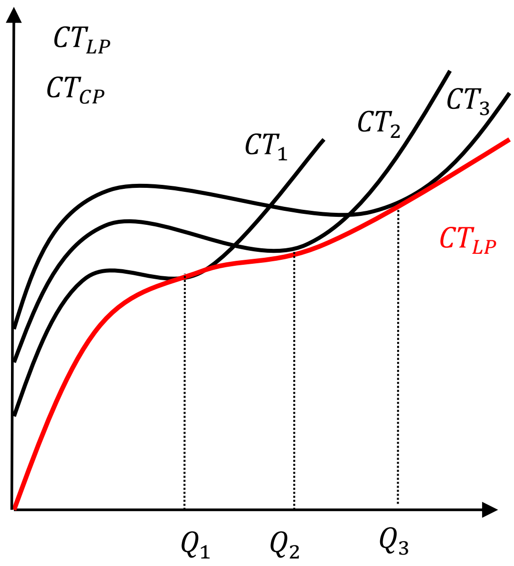


Fig : courbe de CT de longue période

La courbe de CT_{LP} correspond à l'enveloppe inférieure des courbes de courte période.

Le coût moyen CM et le coût marginal Cmg :

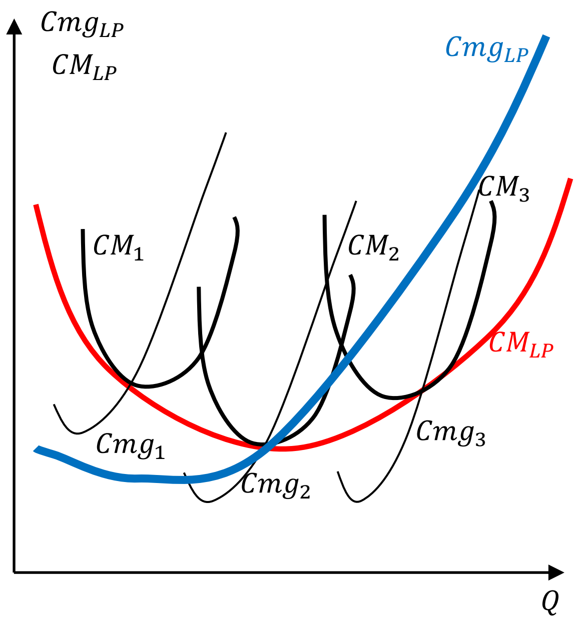


Fig : représentation graphique du coût moyen et coût marginal de longue période.

La courbe de CM_{LP} est la courbe enveloppe inférieure des courbes de coût moyen de courte période.

Exercice 01 :

1. ***Calculer les coûts moyens et les coûts marginaux :***

Q	CT	$CM = \frac{CT}{Q}$	$Cmg = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$
1	100	100	/
2	130	65	30
3	155	51,67	25
4	170	42,5	15
5	183,33	36,66	13,33
6	220	36,66	36,67
7	350	50	130

2. ***La représentation graphique de CT, CM et Cmg :***

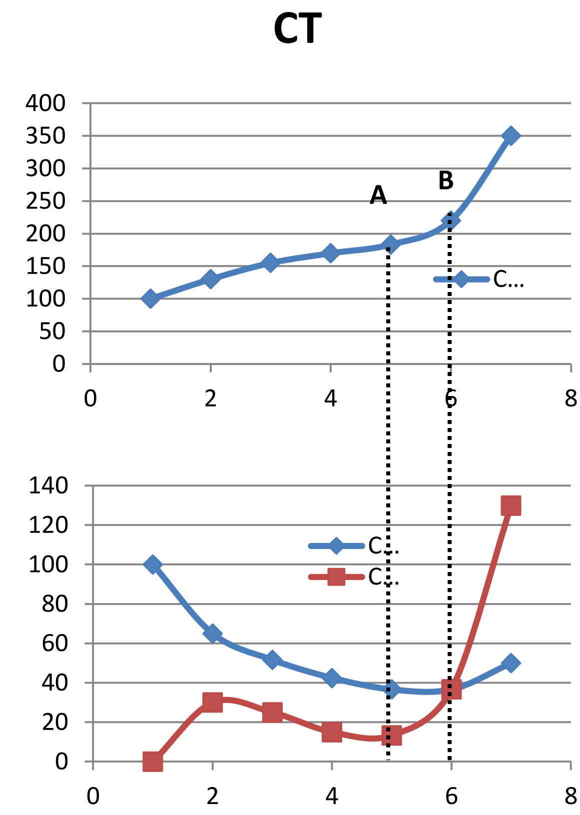


Fig : représentation graphique de CT, CM et Cmg.

Commentaire :

- Les courbe de coût marginal et de cout moyen ont une forme de U.
- Le coût marginal est décroissant jusqu'au point (5, 13.33) et croissant lorsque $Q > 5$.
- Le coût marginal atteint son minimum au point A qui correspond au point d'inflexion de la courbe de coût total.
- Le coût moyen est décroissant jusqu'au point B (6, 36.66) et décroissant au-delà. Donc le point B est le minimum de CM.
- La courbe de coût marginal coupe la courbe de c moyen dans le minimum de cette dernière.
- Concernant la courbe de CT nous pouvons distinguer trois phases :

  a. La phase des coûts décroissants $Q \in [1\ ,5[$ cette phase correspond à la phase des rendements croissants.
  b. La phase des coûts croissants $Q \in [5\ ,7[$ cette phase correspond à la phase des rendements décroissants.
  c. La phase des coûts infinis $Q \geq 7$. En effet dés que $Q > 6$ le coût total et le coût marginal ont une allure exponentielle les coûts deviennent alors infinis et les rendements négatifs.

3. ***Le seuil de rentabilité :***

« le seuil de rentabilité est le prix minimum que doit pratiquer l'entrepreneur pour dégager un profit positif ou nul ».
Il est égal au minimum du coût moyen le seuil de rentabilité dans ce cas est :

$$P = CM(6) = 36{,}66$$

Exercice 02 :

$CVT = Q^3 - 10\ Q^2 + 50\ Q$
$CF = 72$

1. *Calculer CT, CM, Cmg, CVM:*

$CT = CVT + CF = Q^3 - 10\ Q^2 + 50\ Q + 72$

Le coût moyen (CM) est le coût supporté par unité de produit $CM = \frac{CT}{Q}$

$$CM = \frac{Q^3 - 10\ Q^2 + 50\ Q + 72}{Q}$$

$$CM = Q^2 - 10\ Q + 50\ + \frac{72}{Q}$$

Le coût marginal (Cmg) est égal à la dérivé de la fonction de coût total par rapport à la quantité produite :

$$Cmg = \frac{\delta CT}{\delta Q} = 3\ Q^2 - 20\ Q + 50$$

Le coût variable moyen (CVM) est le coût variable supporté par unité produite :

$$CVM = \frac{CVT}{Q} = \frac{Q^3 - 10\ Q^2 + 50\ Q}{Q} = Q^2 - 10\ Q + 50$$

Les valeurs des coûts pour L variant de 1 à 9 unités sont calculées au tableau suivant :

Q	CT	CM	Cmg	CVM
0	72	/	50	50
1	113	113	33	41
2	140	70	22	34
3	159	53	17	29
4	176	44	18	26
5	197	39,4	25	25
6	228	38	38	26
7	275	39,29	57	29
8	344	43	82	34
9	441	49	113	41

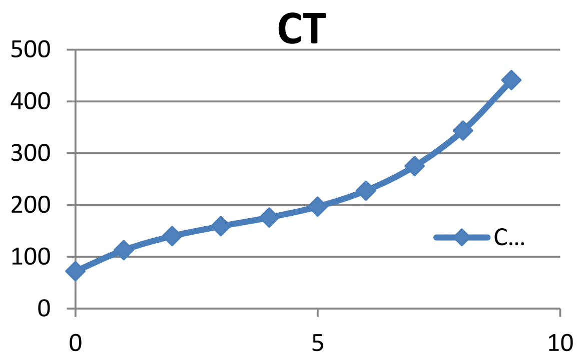
❖ ***La représentation graphique : (voir fig)***

2. *Commenter la forme de la courbe de coût total (CT) :*

❖ La fonction de coût total est une fonction croissante de la quantité produite.
❖ Une analyse plus précise de la fonction de coût total doit s'appuyer sur l'étude de sa dérivé (Cmg).

A partir de la représentation graphique on peut faire les observations suivantes :

- Pour $0 < Q < 3$ Cmg est positif et décroissant donc ***le coût total croit à taux décroissant.***
- Pour $Q > 3$ Cmg est positif et croissant donc ***le coût total croit à taux croissant.***
- Au point (I) $(Q = 3, CT = 159)$ la fonction de CT *cesse d'etre concave et devient convexe*, le point (I) est donc un point d'inflexion.



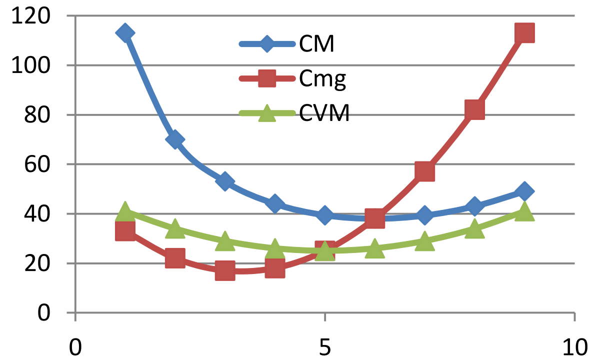
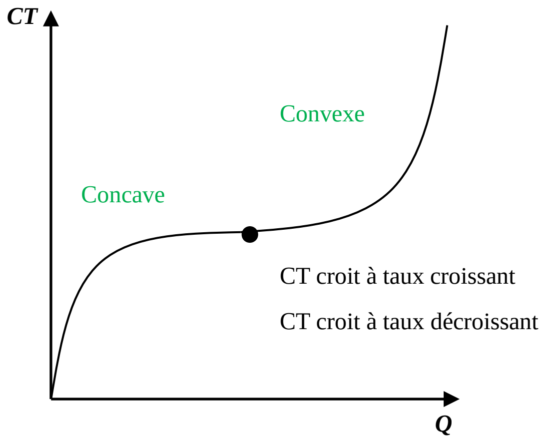


Fig : représentation graphique des différentes courbe de coût

Remarque :

La fonction de coût total :



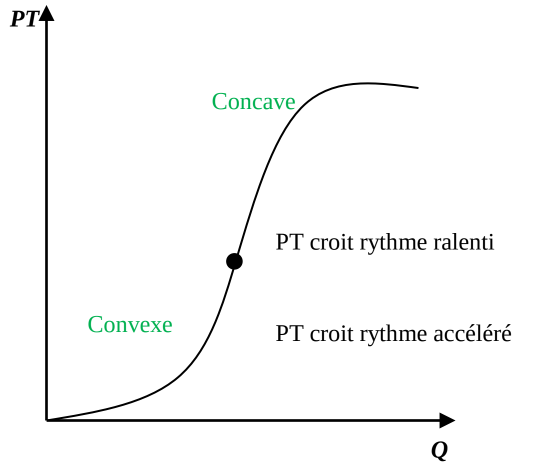


Fig : courbe de CT et courbe de PT.

❖ ***Vérification de l'existence d'un point d'inflexion (I) :***

Au point d'inflexion :

- La dérivée seconde de la fonction de coût total doit être nulle.
- La dérivée première de (CT) Cmg ne doit pas changer de signe.

Premièrement :

$$(CT)'' = \frac{d^2CT}{d\,Q^2}$$

$(CT)'' = Cmg' = 6Q - 20$

$(CT)'' = 0 \Leftrightarrow 6Q - 20 = 0$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{20}{6} = 3{,}33$$

Deuxièmement :

Etude du signe de la première dérivée :

$(CT)' = Cmg = 3\,Q^2 - 20\,Q + 50$

Cmg est toujours positive.

Pourquoi ?

« Un trinôme de deuxième degré $y = ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de (a) si son discriminant est négatif ».

Dans notre cas calculons le discriminant réduit

Δ' : $b = -20 \Rightarrow b' = -10$

$\Delta' = {b'}^2 - ac = -50$

$\Delta' < 0$ et puisque $a > 0$ Cmg est toujours positif.

Donc pour $Q = \frac{10}{3}$:

$(CT)'' = 0$

$(CT)'$ne change pas de signe .

On dit que (I) est un point d'inflexion pour la fonction (PT).

3. Les positions respectives des courbes de CM et de Cmg :

Pour expliquer les positions respectives de CM et de Cmg . Calculons la dérivée première de la fonction de CM et étudions son signe :

$$CM' = \frac{d\,CM}{d\,Q} \quad avec\ CM = \frac{CT}{Q}$$

$$CM' = \frac{\frac{d\,CT}{d\,Q} \cdot Q - CT}{Q^2} = \frac{Cmg \cdot Q}{Q^2} - \frac{CT}{Q^2}$$

$$CM' = \frac{Cmg}{Q} - \frac{CT}{Q^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Cmg} - \boldsymbol{CM})$$

Donc CM' a le même signe que $(Cmg - CM)$

- Pour $(Cmg - CM) < 0 \Rightarrow \begin{cases} CM' < 0 \\ Cmg < CM \end{cases}$

  Le coût moyen décroit tant que le coût marginal lui est inférieur.

- Pour $(Cmg - CM) = 0 \Rightarrow \begin{cases} CM' = 0 \\ Cmg = CM \end{cases}$

  Le coût moyen atteint son minimum, il est égal au coût marginal. $(Q = 6,\ CM = Cmg = 38)$

- Pour $(Cmg - CM) > 0 \Rightarrow \begin{cases} CM' > 0 \\ Cmg > CM \end{cases}$

  Le coût moyen croit tant que le coût marginal lui est supérieur.

4. Positions respectives des courbes de CVM et de Cmg :

Nous avons : $CVM = \frac{CVT}{Q}$ avec $CVT = CVT(Q)$

Calculons la dérivée première de CVM :

$$CVM' = \frac{\frac{d\ CVT}{d\ Q} \cdot Q - CVT}{Q^2}$$

Or que $CVT' = Cmg$
Parce que : $CVT = CT - CF$
et $CVT' = CT' = Cmg$
$CVT' = 3\ Q^2 - 20\ Q + 50$

Donc on peut écrire :

$$CVM' = \frac{Cmg \cdot Q - CVT}{Q^2} = \frac{Cmg}{Q} - \frac{CVT}{Q^2}$$
$$CVM' = \frac{1}{Q}(Cmg - CM)$$

CVM' à le même signe que $(Cmg - CM)$.

- Pour $(Cmg - CVM) < 0 \Rightarrow \begin{cases} CVM' < 0 \\ Cmg < CVM \end{cases}$
  Donc CVM décroit tant que le coût marginal lui est inférieur.

- Pour $(Cmg - CM) = 0 \Rightarrow \begin{cases} CVM' = 0 \\ Cmg = CVM \end{cases}$
  Quand CVM atteint son minimum, il est égal au coût marginal. ($Q = 5,\ CVM = Cmg = 25$)

- Pour $(Cmg - CVM) > 0 \Rightarrow \begin{cases} CVM' > 0 \\ Cmg > CVM \end{cases}$
  CVM croit dans ce cas le coût marginal lui est supérieur.

<u>Position respective de CM et CVM :</u>

Le coût variable moyen (CVM) est égal à la différence entre CM et CFM (coût fixe moyen) : $CVM = CM - \frac{CF}{Q}$

- ❖ On observe dans le graphe que la courbe de CVM est située sous la courbe de CM.
- ❖ Plus la quantité produite est grande plus les deux courbes tendent à se rejoindre.

Parce que :

$$CVM = CM - \frac{CF}{Q}$$

Le coût fixe moyen est une fonction décroissante, plus la quantité augmente plus le CFM diminue et plus les deux coûts tendent à devenir égaux.

<u>Exercice 03 :</u>

1. <u>*Calcul du cout total, cout moyen et cout marginal à court terme :*</u>

- A court terme, la quantité du facteur capital est $\overline{K} = 16$. Nous en déduisons que :
  $Q = L^{\frac{1}{4}}\ (16)^{\frac{1}{4}}$
  $Q = 2\ L^{\frac{1}{4}}$
- La valeur optimale de L est donc : $L^* = \frac{Q^4}{16}$
- Le coût total s'écrit $CT = \overline{K}\ P_K +\ L^*\ P_L$
  Pour $P_L = 1$ et $P_K = 3$ et $\overline{K} = 16$ et $L^* = \frac{Q^4}{16}$
  Nous trouvons que la fonction de coût total a l'expression suivante :

$$\boldsymbol{CT(Q) = \frac{Q^4}{16} + 48}$$

- Le coût moyen se calcule de la façon suivante :

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{\frac{Q^4}{16} + 48}{Q}$$
$$\boldsymbol{CM = \frac{Q^3}{16} + \frac{48}{Q}}$$

- Le coût marginal se calcule comme suit :

$$Cmg = \frac{\delta\ CT}{\delta\ Q}$$
$$\boldsymbol{Cmg = \frac{1}{4} Q^3}$$

2. <u>*Calcul du coût total, coût moyen et coût marginal à long terme :*</u>

- A long terme, il n'y a plus que des facteurs variables. Pour déterminer la fonction de coût total de long terme notée $CT_{LT}(Q)$ il faut résoudre le programme du producteur qui cherche à minimiser son coût de production de long terme sous la contrainte d'un niveau de production donné Q_0.

$$\begin{cases} Min\ CT = L\ P_L + K\ P_K \\ {}^{s}/_{c}\ Q_0 = L^{\frac{1}{4}}\ K^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Lagrange :

$$\mathcal{L} = L\ P_L + K\ P_K + \lambda\left(Q_0 -\ L^{\frac{1}{4}}\ K^{\frac{1}{4}}\right)$$

A l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta L} = P_L - \dfrac{1}{4}\lambda L^{\frac{-3}{4}}\ K^{\frac{1}{4}} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{4\,P_L}{L^{\frac{-3}{4}}\ K^{\frac{1}{4}}} \ldots\ldots(1) \\ \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta K} = P_K - \dfrac{1}{4}\lambda L^{\frac{1}{4}}\ K^{\frac{-3}{4}} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{4\,P_K}{L^{\frac{1}{4}}\ K^{\frac{-3}{4}}} \ldots\ldots(2) \\ \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda} = Q_0 - L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} = 0 \Rightarrow Q_0 = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} \ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

En mettant (1) et (2) $\Leftrightarrow \frac{4\,P_L}{L^{\frac{-3}{4}}\ K^{\frac{1}{4}}} = \frac{4\,P_K}{L^{\frac{1}{4}}\ K^{\frac{-3}{4}}}$

$\Leftrightarrow \frac{P_L}{P_K} = \frac{K}{L}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{K = \frac{P_L}{P_K} \cdot L}$ ….(4)

En remplaçant (4) dans l'équation (3) :

$$Q_0 = L^{\frac{1}{4}} \left(\frac{P_L}{P_K} \cdot L \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$Q_0 = L^{\frac{1}{2}} \left(\frac{P_L}{P_K} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$L^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{P_K}{P_L} \right)^{\frac{1}{4}} Q_0$$

$$\left[L^{\frac{1}{2}} \right]^2 = \left[\left(\frac{P_K}{P_L} \right)^{\frac{1}{4}} Q_0 \right]^2$$

$$\boldsymbol{L^* = \left(\frac{P_K}{P_L} \right)^{\frac{1}{2}} Q_0^2}$$

$$K^* = \frac{P_L}{P_K} \cdot L^*$$

$$K^* = \frac{P_L}{P_K} \cdot \left(\frac{P_K}{P_L} \right)^{\frac{1}{2}} Q_0^2$$

$$\boldsymbol{K^* = \left(\frac{P_K}{P_L} \right)^{-\frac{1}{2}} Q_0^2}$$

Le coût minimum de long terme est alors égal à :

$$CT_{LT} = L^* P_L + K^* P_K$$

$$CT_{LT} = \left(\frac{P_K}{P_L} \right)^{\frac{1}{2}} Q_0^2\, P_L + \left(\frac{P_K}{P_L} \right)^{-\frac{1}{2}} Q_0^2\, P_K$$

$$CT_{LT} = P_K^{\frac{1}{2}} P_L^{\frac{1}{2}} Q_0^2 + P_K^{\frac{1}{2}} P_L^{\frac{1}{2}} Q_0^2$$

$$\boldsymbol{CT_{LT} = 2\, (P_K P_L)^{\frac{1}{2}} Q_0^2}$$

Finalement, nous pouvons écrire la fonction de cout total sou la forme suivante :

$$\boldsymbol{CT_{LT} = 2\, (P_K P_L)^{\frac{1}{2}} Q^2}$$

Pour tout niveau de production Q

- Et pour $P_L = 1$ et $P_K = 3$

$$\boldsymbol{CT_{LT} = 2\sqrt{3}\, Q^2}$$

<u>Exercice 04 :</u>

1. ***<u>Déterminer le niveau de l'output qui maximise le profit de l'entreprise en courte période :</u>***

Il s'agit pour l'entreprise de maximiser son profit π :

$$\pi = RT - CT$$

$$\pi = P \cdot Q - CT$$

$$\pi = P \cdot Q - CT(Q)_{CP}$$

$$\pi = P \cdot Q - \left[\left(\frac{P_L}{1296} \right) \cdot Q^4 + 16 P_K \right]$$

Avec $P_K = 1$ et $P_L = 4$

$$\boldsymbol{\pi = P \cdot Q - \frac{Q^4}{324} - 16}$$

A l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} \pi'_Q = 0 \Rightarrow P - \dfrac{Q^3}{81} = 0 \Rightarrow Q^* = (81P)^{\frac{1}{3}} \\ \pi''_Q < 0 \Rightarrow \pi''_Q = -\dfrac{Q^2}{27} < 0 \end{cases}$$

Donc en produisant $Q^* = (81P)^{\frac{1}{3}}$ l'entreprise maximise son profit.

2. ***<u>Déterminer le niveau de l'output qui maximise le profit de l'entreprise en longue période :</u>***

   a. ***Maximisation indirecte du profit :***

- La maximisation indirecte du profit consiste dans un premier temps à déterminer la fonction de coût total via une minimisation des coûts de l'entreprise pour un niveau d'output donné.
- Or nous savons que ce programme admet pour solution :

$$CT(Q)_{LP} = \frac{2}{9} Q^2 (P_L \cdot P_K)^{0,5}$$

- Dans un second temps, on maximise le profit de la firme en tenant en compte de cette fonction de coût total.
- Donc il s'agit pour l'entreprise de maximiser son profit :

$$\pi = P \cdot Q - CT(Q)_{LP}$$

$\pi = P \cdot Q - \frac{2}{9} Q^2 (P_L \cdot P_K)^{0,5}$ $\quad /P_K = 1$ et $P_L = 4$

$$\pi = P \cdot Q - \frac{4}{9} Q^2$$

A l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} \pi'_Q = 0 \Rightarrow P - \dfrac{8}{9} Q = 0 \Rightarrow Q^* = \dfrac{9P}{8} \\ \pi''_Q < 0 \Rightarrow \pi''_Q = -\dfrac{8}{9} < 0 \end{cases}$$

Donc en produisant $Q^* = \frac{9P}{8}$ l'entreprise maximise son profit.

b. Maximisation indirecte du profit :

La maximisation indirecte du profit consiste à maximiser :

$$\pi = P \cdot Q - KP_K - LP_L$$

$$\pi = P \cdot \left(3K^{\frac{1}{4}} \cdot L^{\frac{1}{4}}\right) - KP_K - LP_L$$

A l'optimum nous avons :

$$\begin{cases} \pi'_L = 0 \\ \pi'_K = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}PK^{\frac{1}{4}} \cdot L^{-\frac{3}{4}} - P_L = 0 \\ \frac{3}{4}PK^{-\frac{3}{4}} \cdot L^{\frac{1}{4}} - P_K = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}P\, K^{\frac{1}{4}} \cdot L^{-\frac{3}{4}} = P_L \dots\dots (1) \\ \frac{3}{4}P\, K^{-\frac{3}{4}} \cdot L^{\frac{1}{4}} = P_K \dots\dots (2) \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations on aura :

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{\frac{3}{4}P\, K^{\frac{1}{4}} \cdot L^{-\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}P\, K^{-\frac{3}{4}} \cdot L^{\frac{1}{4}}} = \frac{P_L}{P_K} \quad /P_K = 1 \text{ et } P_L = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{K}{L} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow K = 4L$$

En remplaçant K par son expression dans l'équation (1) :

$$\frac{3}{4}P\,(4L)^{\frac{1}{4}} \cdot L^{-\frac{3}{4}} = 4$$

$$\frac{3}{4}P\, 4^{\frac{1}{4}} \cdot L^{-\frac{1}{2}} = 16$$

$$\Rightarrow L^{-\frac{1}{2}} = \frac{16}{3P \cdot 2^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \left[L^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2} = \left[\frac{16}{3P \cdot 2^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}$$

$$\Rightarrow L^* = \left[\frac{3P \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{16}\right]^2$$

$$\Rightarrow L^* = \frac{18P^2}{256} \Rightarrow \boldsymbol{L^* = \frac{9P^2}{128}}$$

$$K^* = 4L^* \Rightarrow K^* = 4 \cdot \frac{9P^2}{128}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{K^* = \frac{9}{32}P^2}$$

On doit vérifier aussi la deuxième condition (la deuxième dérivée) :

$$\pi'' = \begin{pmatrix} \pi''_{LL} & \pi''_{LK} \\ \pi''_{KL} & \pi''_{KK} \end{pmatrix}$$

$$\pi'' = \begin{pmatrix} -\frac{9}{16}P\, K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{7}{4}} & \frac{3}{16}P\, K^{-\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{3}{16}P\, K^{-\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}} & -\frac{9}{16}P\, K^{-\frac{7}{4}}L^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$$

Etudiant le signe de cette forme quadratique et pour cela calculons le déterminant :

$$\pi'' = \begin{vmatrix} -\frac{9}{16}P\, K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{7}{4}} & \frac{3}{16}P\, K^{-\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{3}{16}P\, K^{-\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}} & -\frac{9}{16}P\, K^{-\frac{7}{4}}L^{\frac{1}{4}} \end{vmatrix}$$

$$\pi'' = \left(-\frac{9}{16}P\, K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{7}{4}}\right)\left(-\frac{9}{16}P\, K^{-\frac{7}{4}}L^{\frac{1}{4}}\right) - \left(\frac{3}{16}P\, K^{-\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}\right)\left(\frac{3}{16}P\, K^{-\frac{3}{4}}L^{-\frac{3}{4}}\right)$$

$$\pi'' = \frac{81}{256}P^2\, K^{-\frac{3}{2}}L^{-\frac{3}{2}} - \frac{9}{256}P^2\, K^{-\frac{3}{2}}L^{-\frac{3}{2}}$$

$$\pi'' = \frac{72}{256}P^2\, K^{-\frac{3}{2}}L^{-\frac{3}{2}} > 0$$

Donc π'' est une forme quadratique définie négative et l'optimum est un maximum de profit.

On peut aussi calculer le niveau d'output qui maximise le profit :

$$Q^* = 3(K^*)^{\frac{1}{4}} \cdot (L^*)^{\frac{1}{4}}$$

$$Q^* = 3\left(\boldsymbol{\frac{9}{32}P^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\boldsymbol{\frac{9P^2}{128}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$Q^* = 3P\left(\boldsymbol{\frac{9}{32}} \cdot \boldsymbol{\frac{9}{128}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\boldsymbol{Q^* = \frac{9}{8}P}$$

Série d'exercices N° 10 (L'offre du producteur)

Exercice 01 :

Deux entreprise A et B fabriquent le même bien Q et offrent ce bien sur un marché en situation de concurrence.

On sait:

- Que le prix d'équilibre du marché est $P = 8$.
- Que la courbe de coût total de l'entreprise (A) a pour expression :

$$\boldsymbol{CT_A = 15\,Q - 6\,Q^2 + Q^3}$$

- Que la courbe de coût total de l'entreprise (B) a pour expression :

$$\boldsymbol{CT_B = 4\,Q + Q^3 - 3\,Q^2}$$

Ces deux courbes de coûts sont des courbes de courte période.

1. Quelle sera la valeur du profit réalisé par chaque entreprise, si on admet que ces dernières ont un comportement rationnel ?
2. Quelles seront les valeurs de $\boldsymbol{P}$ à partir desquelles les entreprise A et B seront éliminées du marché du bien Q ?
3. Donner sur un même graphique la représentation des courbes d'offre de chaque entreprise.

Exercice 2 :

Une entreprise offre le produit $\boldsymbol{Q}$ qu'elle fabrique sur un marché de concurrence parfaite.

Le prix de marché du bien est $\boldsymbol{P = 27}$.

L'entreprise supporte un coût de production total qui varie avec la quantité produite (voir le tableau).

Quantité $\boldsymbol{Q}$	**Cout total** $\boldsymbol{CT}$
0	0
1	50
2	60
3	66
4	84
5	105
6	132
7	175
8	224
9	315

1. Calculer la quantité $\boldsymbol{Q}$ que l'entreprise doit offrir pour obtenir un profit total maximum.
2. Quelle relation existe à l'équilibre entre la recette marginale et le coût marginal de l'entreprise ? montrer pourquoi il en est ainsi.
3. Donner la représentation graphique des courbe de recette total ($\boldsymbol{RT}$), de recette moyenne ($\boldsymbol{RM}$), de recette marginale ($\boldsymbol{Rmg}$), de profit ($\boldsymbol{\pi}$), de cout total ($\boldsymbol{CT}$), de cout moyen ($\boldsymbol{CM}$), et de cout marginal ($\boldsymbol{Cmg}$). Déterminer sur ces figures la position optimale de l'entreprise lorsque $\boldsymbol{P = 27}$.

   A l'aide des graphiques, déterminer les zones dans lesquelles l'entreprise peut faire un profit, et subir des pertes.
4. Quel est le prix du marché à partir duquel l'entreprise égalisera sa recette totale et son coût total à l'équilibre ?
5. Déterminer la courbe d'offre de produit $\boldsymbol{Q}$ de l'entreprise.

Rappel de cour :

De la fonction de coût à la fonction de l'offre de l'entreprise

1. ***Détermination du niveau de production en situation de concurrence :***

- Le producteur cherche par hypothèse à maximiser son profit.
- Dans un cadre concurrentiel le producteur n'a pas de possibilités d'action sur les prix des facteurs ni sur le prix de vente.
- La seul variable d'action du producteur est le niveau de production.
- Nous savons que : $\pi = \bar{P} \cdot Q - CT$ pour que le profit soit maximum il faut que la dérivée s'annule :

$$\pi'_Q = \bar{P} - Cmg = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\bar{P} - Cmg}$$

- « Le profit sera donc au maximum pour le volume de production tel que le coût marginal soit égal au prix de vente ».
- Faisons la représentation graphique :

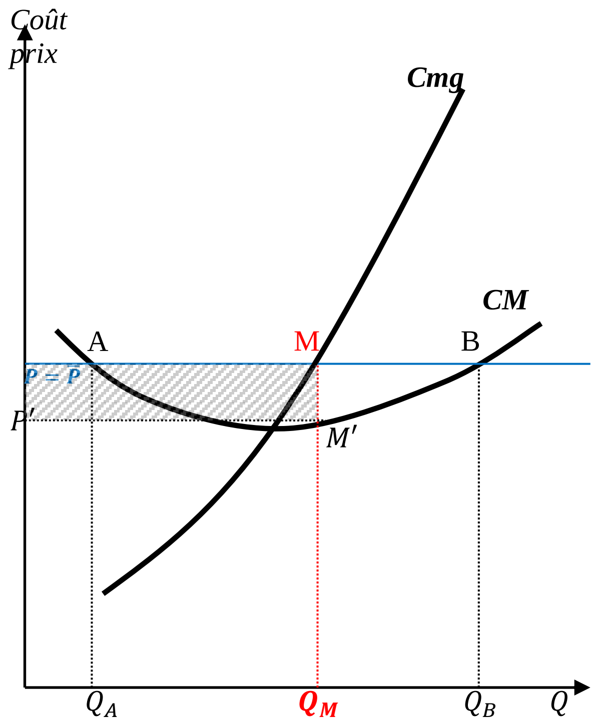


Fig : détermination du niveau de production permettant d'atteindre le maximum de profit

- ❖ La courbe de (CM) est une courbe en U qui est coupé en son minimum par la courbe de (Cmg).
- ❖ Le prix est indépendant du volume de production est donc représenté par une droite parallèle à l'axe des abscisse et d'ordonné $P = \bar{P}$.
- ❖ Le niveau de production correspondant au ***profit maximum*** est $\boldsymbol{Q_M}$ point d'intersection de Cmg et de $P = \bar{P}$.
- ❖ Si $\boldsymbol{Q < Q_M}$ par exemple ($Q = Q_A$) le prix de vente est supérieur au Cmg donc l'accroissement de la production est toujours avantageux tant que $Q < Q_M$.
- ❖ Si $\boldsymbol{Q > Q_M}$ nous avons $Cmg > \bar{P}$ c'est-à-dire que la production d'une unité supplémentaire coute plus qu'elle ne rapporte.
- ❖ Le profit est donc maximum pour $Q > Q_M$.
- ❖ ***Le profit par unité produite*** se définit par : $\frac{\pi}{Q} = \frac{\bar{P} \cdot Q - CT}{Q} = \boldsymbol{\bar{P} - CM}$
  Ce profit se lit sur le graphe comme différence d'ordonnés entre ($P = \bar{P}$) et (CM).
- ❖ Le profit unitaire (et le profit global) s'annulent pour $\boldsymbol{P = CM}$ ($Q = Q_A$ *et* $Q = Q_B$)
- ❖ Pour $Q < Q_A$ ou $Q > Q_B$ le profit est ***négatif***.
- ❖ Pour $Q_A < Q < Q_B$ le profit est ***positif***.
- ❖ Pour $Q = Q_M$ le profit est ***maximum*** et son niveau peut être apprécié graphiquement par la surface ($PMM'P'$).

2. ***La construction de la fonction d'offre du producteur :***

- ❖ La quantité offerte par le producteur dépend donc de ses conditions de production (résumées par les courbes de Cmg et de CM) et du prix de vente ($P = \bar{P}$).
- ❖ On constate que le niveau de production permettant au producteur de maximiser son profit sera différent pour des niveaux de prix différents $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$..., la réaction de l'entreprise à une variation des prix est déterminée par le tracé de la courbe de Cmg.

- Puisque la courbe de *Cmg* coupe la courbe de *CM* au minimum de cette dernière, tout niveau de ***prix inférieur*** à l'ordonné $\overline{P_0}$ de ce minimum entrainerait des pertes pour le producteur. L'offre est donc nulle pour $P < \overline{P_0}$.

- Donc $Q = Q(P)$ avec $Q'(P)$>0 : l'offre du producteur rationnel est fonction croissante du prix.

- Puisque la quantité (Q) est fonction du prix (P) normalement le graphe sera renversé $Q = f(P)$ $Q: ordonné; P: abcisse$. Donc il y a un renversement de la représentation mais cela ne doit pas entrainer de confusion car : ***c'est la quantité offerte par l'entreprise qui a été construite en fonction du niveau du prix supposé exogène.***

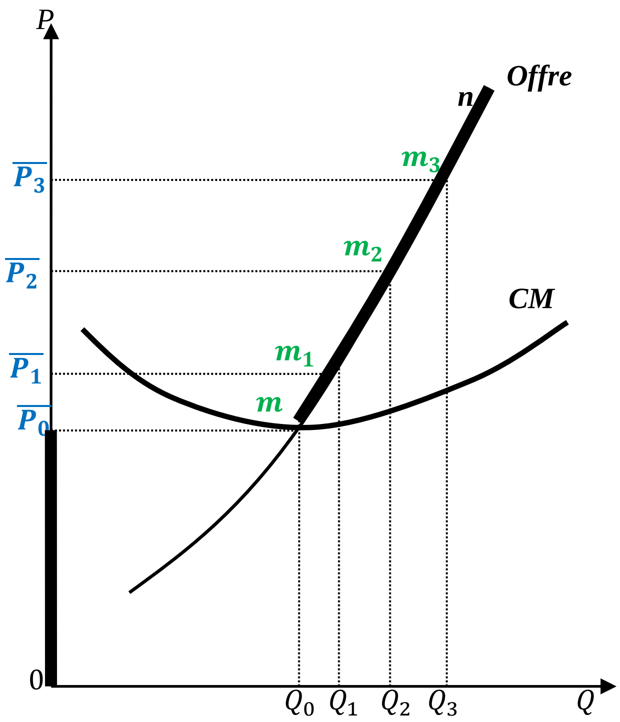


Fig : la construction de la courbe d'offre $\mathbf{O\overline{P_0}mn}$

Remarque :
Dans certaines références la fonction d'offre de l'entreprise commence à partir du minimum de CVM et non pas CM parce que en longue période CVM=CM donc on peut généraliser.

Exercice 01 :

1. ***Le profit réalisé par chaque entreprise :***

❖ ***Etude de l'entreprise A :***

$\pi_A = RT - CT$

$\pi_A = P \cdot Q - (Q^3 - 6Q^2 + 15Q)$

$\pi_A = 8 \cdot Q - Q^3 - 6Q^2 + 15Q$

$\pi_A = -Q^3 + 6Q^2 - 7Q$

Le profit de l'entreprise A sera maximum lorsque :

$\frac{d\pi_A}{dQ} = 0$ et $\frac{d^2\pi_A}{dQ^2} < 0$

$$\frac{d\pi_A}{dQ} = -3Q^2 + 12Q - 7 = 0$$

$\Delta = 60$; $Q_1 = 3{,}3$; $Q_2 = 0{,}7$

$$\frac{d^2\pi_A}{dQ^2} = -6Q + 12 < 0$$

$\Rightarrow -6Q < -12 \Rightarrow Q > 2$

Donc cette expression est négative pour $Q > 2$ donc la racine $Q_1 = 3{,}3$ est celle qui maximise le profit.

Pour cette valeur :

$\pi_A = -(3{,}3)^3 + 6(3{,}3)^2 - 7(3{,}3) \Rightarrow \pi_A = 6{,}3$

❖ ***Etude de l'entreprise B :***

$\pi_B = RT - CT$

$\pi_B = P \cdot Q - (Q^3 - 3Q^2 + 4Q)$

$\pi_B = -Q^3 + 3Q^2 + 4Q$

Le profit de l'entreprise B sera maximum pour :

$\frac{d\pi_B}{dQ} = 0$ et $\frac{d^2\pi_B}{dQ^2} < 0$

$$\frac{d\pi_B}{dQ} = -3Q^2 + 6Q + 4 = 0$$

$\Delta = 84$; $Q_1 = -0{,}58$; $Q_2 = 2{,}53$

$$\frac{d^2\pi_A}{dQ^2} < 0 \Leftrightarrow -6Q + 6 < 0$$

$\Rightarrow -6Q < -6$

$\Rightarrow Q > 1$

Cette expression sera négative pour $Q > 1$ donc $Q_2 = 2{,}53$ est la quantité à offrir pour rendre maximum le profit :

$\pi_B = -(2{,}53)^3 + 3(2{,}53)^2 + 4(2{,}53)$

$\pi_B = 13{,}12$

2. ***Les valeurs de P à partir desquelles les entreprises A et B seront éliminées du marché du bien Q :***

- Pour qu'une entreprise soit éliminée du marché du bien, il faut que sa recette totale soit inférieur à son coût total ou encore que la recette moyenne soit inférieure au coût moyen :

$$RT < CT \Rightarrow \frac{RT}{Q} < \frac{CT}{Q} \Rightarrow RM < CM$$

- On sait qu'en situation de concurrence

$$RM = \frac{RT}{Q} = \frac{P \cdot Q}{Q} = P \Rightarrow \boldsymbol{P < CM}$$

- Les courbes de coût moyen des entreprises A et B sont des paraboles (trinôme du deuxième degré) donc le CM décroit passe par un minimum et recommence à augmenter.
- Tant que le prix unitaire du bien sera supérieur ou égal au minimum de CM l'entreprise réalisera un profit ou équilibrera RT et CT et continuera donc à offrir son produit.
- Lorsque P sera inférieur au minimum du coût moyen, l'entreprise fera des pertes et elle sera éliminée du marché.
- On peut rechercher les valeurs de (P) pour les deux cas envisagés :

❖ ***L'entreprise (A) :***

$CT_A = Q^3 - 6Q^2 + 15Q$

$$CM_A = \frac{CT_A}{Q} = Q^2 - 6Q + 15$$

On cherche le minimum de CM_A :

$$\frac{d(CM_A)}{dQ} = 2Q - 6 = 0 \Rightarrow Q = 3$$

$$\frac{d^2(CM_A)}{dQ^2} = 2 > 0$$

Donc pour $Q = 3$ la courbe de CM_A possède un minimum.

CM_A en ce point est $CM_A = 6$

Pour que l'entreprise (A) cesse d'offrir son produit, il faut donc que $P < 6$.

❖ ***L'entreprise (B) :***

$CT_B = Q^3 - 3Q^2 + 4Q$

$$CM_B = \frac{CT_B}{Q} = Q^2 - 3Q + 4$$

On cherche le minimum de CM_B :

$$\frac{d(CM_B)}{dQ} = 2Q - 3 = 0 \Rightarrow Q = \frac{3}{2}$$

$$\frac{d^2(CM_A)}{dQ^2} = 2 > 0$$

Donc pour $Q = \frac{3}{2}$ la courbe de CM_B possède un minimum.la valeur de CM_B correspondante est $\frac{7}{4}$

Pour que l'entreprise (B) cesse d'offrir son produit, il faut donc que $P < \frac{7}{4}$.

3. ***La représentation des courbes d'offre des deux entreprises :***

- Pour qu'une entreprise offre son produit il faut que cette offre permette de réaliser un profit nul ou positive qui corresponde à un minimum. Donc il faut que

$$\boldsymbol{P \geq CM \text{ et } Cmg = P}$$

- Ceci est réalisé sur la portion de la courbe de *Cmg* situé au dessus du minimum de CM.
- *Démonstration :*

  Il y a profit nul ou positif si :

$$RT \geq CT \Rightarrow \frac{RT}{Q} \geq \frac{CT}{Q} \Rightarrow P \geq CM$$

  Le profit est maximum pour :

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi}{dQ} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dRT}{dQ} - \dfrac{dCT}{dQ} = 0 \Leftrightarrow P = Cmg \\ \dfrac{d^2\pi}{dQ^2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2\pi}{dQ^2} = -\dfrac{d^2CT}{dQ^2} < 0 \end{cases}$$

  Parce que $\frac{d^2RT}{dQ^2} = 0$

  Donc la condition suffisante du maximum du profit est :

$$-\frac{d^2CT}{dQ^2} < 0 \Rightarrow \frac{d^2CT}{dQ^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{dCmg}{dQ} > 0$$

  Ceci implique la partie croissante de la courbe de Cmg.

- ❖ La courbe d'offre de l'entreprise A :

Pour $P = 6 \Rightarrow Q = 3$

Pour $P < 6 \Rightarrow Q = 0$

Pour $P > 6 \Rightarrow$ l'offre du bien Q est donnée par la courbe de Cmg_A.

Pour $P = 8 \Rightarrow Q = 3{,}3$

- ❖ La courbe d'offre de l'entreprise B :

Pour $P = \frac{7}{4} \Rightarrow Q = \frac{3}{2}$

Pour $P < \frac{7}{4} \Rightarrow Q = 0$

Pour $P > \frac{7}{4} \Rightarrow$ l'offre du bien Q est donnée par la courbe de Cmg_B.

Pour $P = 8 \Rightarrow Q = 2{,}53$

La représentation graphique :

$Cmg_A == 3Q^2 - 12Q + 15$ $\quad Min(3,6)$

$CM_A = \frac{CT_A}{Q} = Q^2 - 6Q + 15$ $\quad Min(2,3)$

$Cmg_B = 3Q^2 - 6Q + 4$ $\quad Min(\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$

$CM_B = Q^2 - 3Q + 4$ $\quad Min(1,1)$

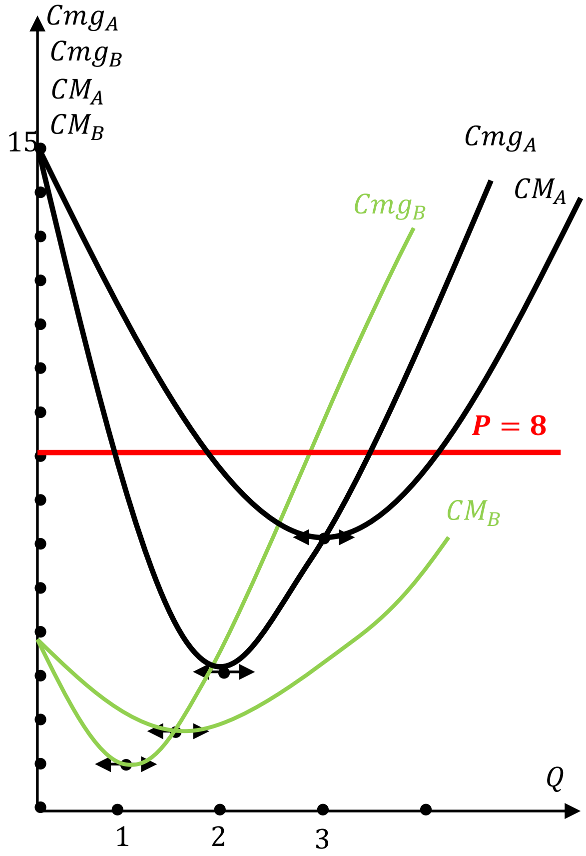


Fig : courbes d'offre des entreprises A et B.

Exercice 02 :

1. ***Calculer la quantité Q que l'entreprise doit offrir pour obtenir un profit total maximum :***

- Le profit $\pi = RT - CT$
  Et $RT = P \cdot Q$
- En situation de concurrence parfaite l'entreprise n'a pas la possibilité d'agir sur le prix de marché du bien ($P = 27$).
- Les calculs sont effectués au tableau suivant :

Q	RT	CT	π
0	**0**	**0**	**0**
1	**27**	**50**	**–23**
2	**54**	**60**	**−6**
3	**81**	**66**	**15**
4	**108**	**84**	**24**
5	**135**	**105**	**30**
6	**162**	**132**	**30**
7	**189**	**175**	**14**
8	**216**	**224**	**–8**
9	**243**	**315**	**–72**

- L'étude des résultats obtenus montre que $Q = 5$ et $Q = 6$ donnent le profit le plus élevé $\pi = 30$; on constatera ultérieurement que seule l'offre $Q = 6$ est à retenir.

2. ***La relation entre Rmg et Cmg à l'équilibre :***

- La recette marginale de l'entreprise est l'augmentation de recette obtenue pour une unité supplémentaire de bien Q vendu. Et le cout marginal est le cout supplémentaire résultant de l'augmentation de la production par une seule unité.
- Nous savons que $\pi = RT - CT$
- Au maximum nous avons :

$$\pi' = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta RT}{\delta Q} - \frac{\delta CT}{\delta Q} = 0$$

$$\Leftrightarrow Rmg - Cmg = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{Rmg = Cmg}$$

- Or nous savons qu'en situation de concurrence pure et parfaite $\boldsymbol{Rmg = P}$
  $(RT = P \cdot Q \Rightarrow Rmg = \frac{\delta RT}{\delta Q} = P)$
- Et donc on peut écrire : $\boldsymbol{Rmg = Cmg = P}$
- Donc en concurrence pure et parfaite le maximum de profit est obtenu lorsque la recette marginale est égale au cout marginal est égale au prix du marché.
- ***« Tant que le cout supplémentaire d'une unité de produit reste inférieur à la recette supplémentaire qu'elle procure l'entreprise à intérêt à continuer à offrir le bien. Si le cout supplémentaire devient supérieur à la recette supplémentaire l'intérêt de l'entreprise rationnelle disparait ».***

Max $\pi \Rightarrow Rmg = Cmg = P$ (concurrence parfaite)
Max $\pi \Rightarrow Rmg = Cmg$ (de manière générale)

- Dans le cas présent le profit est maximum lorsque $\boldsymbol{P = Rmg = Cmg = 27}$ ceci correspond à la production $Q = 6$.

3. ***La représentation graphique des courbes de RT, RM, Rmg, π, CT, CM et Cmg :***

Q	CT	CM	Cmg
0	**0**	**/**	**/**
1	**50**	**50**	**50**
2	**60**	**30**	**10**
3	**66**	**22**	**6**
4	**84**	**21**	**18**
5	**105**	**21**	**21**
6	**132**	**22**	**27**
7	**175**	**25**	**43**
8	**224**	**28**	**49**
9	**315**	**35**	**91**

Fig(1) ⇨ CT, RT, π
Fig(2) ⇨ CM, Cmg, RM, Rmg

Commentaire fig(1) :

- CT et RT se coupent en deux points A et B dans lesquels le profit est nul.
- Lorsque CT est au-dessus de RT l'entreprise subit des pertes et lorsqu'il est au-dessous de RT l'entreprise réalise un profit positif.
- Entre A et B le profit croît, atteint son maximum ($Q = 6$) et décroit ensuite.

Commentaire fig(2) :

- Les courbe de RM et de Rmg sont confondues ce qui est toujours le cas en concurrence parfaite.

$(\boldsymbol{RT = P \cdot Q \Rightarrow Rmg = \frac{\delta RT}{\delta Q} = P, RM = \frac{RT}{Q} = P})$

- RM coupe CM en A' et B', dans ces deux points $\pi = 0$.

- Lorsque $\boldsymbol{Cmg = Rmg = P}$ **(point H)** le profit est maximum ($Q = 6$)
  RT est égale à la surface **(OFHL)**
  CT est égal à la surface **(OMKL)**
  π est égal à la surface **(MFHK)**

- Le point (H) correspond le maximum de la courbe de profit, et il correspond à l'écart le plus grand entre la courbe de RT et CT.

4. <u>Le prix du marché à partir duquel l'entreprise égalisera sa recette totale et son cout total à l'équilibre :</u>

Nous avons deux conditions dans cette question :

- L'équilibre
- $RT = CT$ $(\pi = 0)$

- Pour qu'à l'équilibre l'entreprise ait une recette totale identique au cout total et donc un profit nul, il faut que :
  1ère $P = Cmg$ (condition d'équilibre)
  2ème $RM = CM$ (condition profit nul)

- Puisque en concurrence parfaite on a toujours : $RM = Rmg = P$

- On pourra écrire que le prix qui permet d'égaliser RT et CT à l'équilibre est celui pour lequel on a : $P = Cmg = CM$
  Ce qui se réalise au minimum de CM
  $P = 21$ est le prix qui donne π =0
  Pour $P < 21$ l'entreprise subirait des pertes.

5. <u>La courbe d'offre de produit Q de l'entreprise :</u>

- L'entreprise offre son produit si la vente de ce dernier rapporte un profit $\pi \geq 0$

- La question précédente a montré que pour $P = 21$ la quantité offerte était $Q = 5$ et qu'aucune offre n'était profitable pour $P < 21$

- La courbe d'offre de l'entreprise en concurrence parfaite est donnée par la partie ascendante de la courbe de cout marginal située au-dessus du minimum de CM.

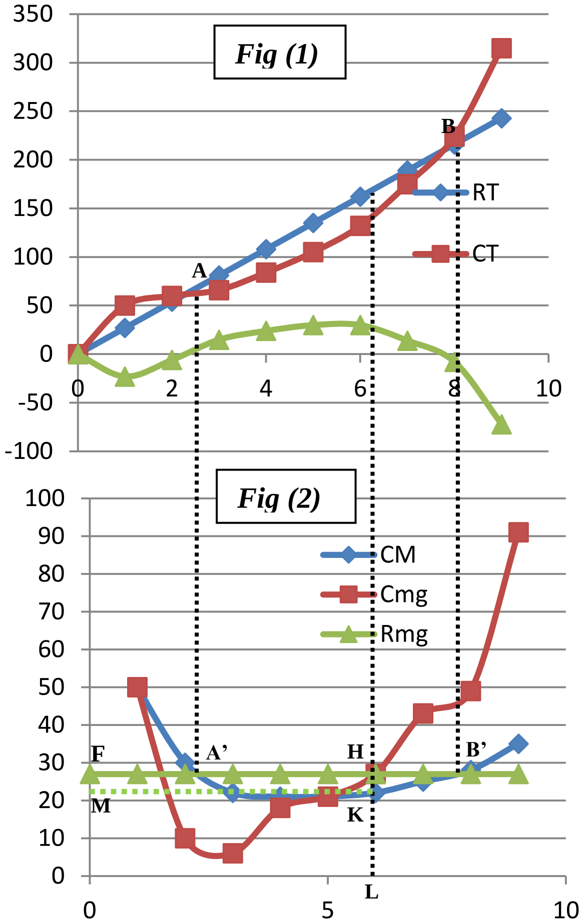


Fig (1)
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
-100
0
2
4
6
8
10
A
B
RT
CT
Fig (2)
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
5
10
CM
Cmg
Rmg
F
M
A'
H
K
B'
L

Tables des matières :

Bibliographie :

ABRAHAM-FROIS Gilbert, « ***Introduction à la micro-économie*** », Economica, Paris, France, 2004.

CARLUER Frédéric, « ***Leçons de microéconomie : exercices corrigés*** », Presses Universitaire de Grenoble, France, 2002.

CLERGEAU C, « ***Microéconomie : théorie de la demande*** », Edition du Seuil, Paris, France, 1999.

CYERT R.M ; MARCH J.G, « ***Processus de décision dans l'entreprise*** », Dunod, Paris, 1970.

FRISCH R, « ***Les lois techniques et économiques de la production*** »,Dunod, Paris, 1963.

GENEREUX J, « ***Economie politique : microéconomie*** » , 3ème édition, Hachette Supérieure, Paris, France, 2000.

GLAIS M, « ***Microéconomie*** », Economica, Paris, France, 1983.

GOULD J-P, FERGUSON C-E, « ***Théorie microéconomique*** », 5ème édition, Economica, Paris, France, 1982.

HUBER Jérome, TCHIBOZO Guy, « ***Microéconomie Tome 1 : consommateurs et producteurs*** », éditions Bréal, Paris, France, 1995.

JULLIEN Bruno, PICARD Pierre, « ***Eléments de microéconomie: exercices et corrigé*** » , 3ème édition, Montchrestien, Paris, France, 2002.

KUENNE K.E, « ***Microeconomic theory of the market mechanism : a general equilibrium approach*** », the Mac Millan company, New York, 1968.

LECAILLON J, « ***Analyse micro-économique*** », Cujas, 1985.

LUCCHINI Nathalie, « ***La microéconomie en fiches*** », les éditions Ellipses, Paris, France, 2011.

LUZI Alain, « ***Microéconomie : cours et exercices résolus*** », Hachette, Paris, France, 2009.

MALINVAUD E, « ***Leçons de théorie microéconomique*** », Dunod, Paris, France, 1982.

MANKIW N.G, « ***Principes de l'économie*** », Economica, Paris, France, 1998.

PERCHERON Serge, « ***Exercices de microéconomie*** », 7ème édition, Armand Colin, Paris, France, 2006.

PICARD P, « ***Eléments de microéconomie*** », 5ème édition, Montchertien, Paris, France, 1998.

PILLER Alain, « ***Microéconomie*** », Premium éditeur, Paris, France.

SCHOTTER A, « ***Microéconomie : une approche contemporaine*** » , Vuibert, 1998.

VARIAN H.R, « ***Introduction à la microéconomie*** », 4ème édition, Collection Prémisses, De Boeck Université, 2000.

Manuel de :

Micro-économie

(Consommateur et Producteur)

Résumés de cours
Et exercices avec solutions complètes

Dr. BENHAMOUDA Youcef
Maitre de conférences
Université Abdelhamid Ibn Badis
Mostaganem - Algérie

Ce manuel d'exercices corrigés de micro-économie est destiné aux étudiants des classes préparatoires, aux étudiants des sciences économiques et aussi aux élèves des écoles de commerce pour lesquels l'étude de l'analyse microéconomique se limite à une introduction aux phénomènes de consommation, de production et de formation des prix sur les différents types de marchés.
Deux parties sont ainsi développées : la théorie du comportement du consommateur, et la théorie du comportement du producteur. Au sein de chaque partie les séries d'exercices sont classées par thème. Au sein de chaque série d'exercices, les exercices sont classés par ordre croissant de difficulté.
Inspiré par des cours et des TD dispensé en classes préparatoires, ce manuel a donc pour objectif de présenter de façon claire et structurée les principes de l'analyse microéconomique conformément aux programmes des universités et des écoles de commerce, avec un recueil d'exercices d'application corrigés. Chaque série d'exercices est précédée d'un rappel de cour détaillé et simplifié, chaque idée est précédée dans le texte d'un tiret (-) pour faciliter aux étudiants la compréhension des différents concept

ISBN : 978-9931-9751-1-3

9 789931 975113