جامعة عبد الحميد بن باديس- مستغانم –
كلية العلوم الاقتصادية، علوم التسيير والعلوم التجارية
والعلوم المالية والمحاسبية

قسم علوم التسييـــــر

رياضيـــات المؤسســـة

مطبوعة بيداغوجية موجهة إلى طلبة السنة الثانية علوم التسييرLMD

د. خليـــفة الحاج (أستاذ محاضر "أ")

السنة الجامعية 2020-2021

"وقُــلْ رَبِّ زِدْنِـــي عِلْمـــاً"

{الآية 114، سورة طه}

فهرس المحتويـــــات

العنـــــوان	الصفحـــة
مقدمة	06
الفصل الأول: مدخل إلى بحوث العلميـــات	**07**
تمهيد	08
1- نبذة تاريخية عن بحوث العمليات	08
2- مفهوم بحوث العلميات	09
3- خصائص بحوث العمليات	10
4- أهمية بحوث العمليات	10
5- مجالات تطبيق بحوث العمليات	11
6- مزايا وعيوب تطبيق مفاهيم بحوث العلميات	11
الفصل الثاني: البرمجـــة الخطيـــة	**12**
تمهيد.	13
1- نشأة البرمجة الخطية.	13
2- مفهوم البرمجة الخطية.	13
3- استخدامات البرمجة الخطية.	14
4- شروط استخدام البرمجة الخطية.	14
5- فرضيات البرمجة الخطية.	15
6- صيغ نماذج البرمجة الخطية.	16
1.6. الصيغة النظامية أو القانونية.	16
2.6. الصيغة القياسية أو المعيارية.	20
7- تركيب نموذج البرمجة الخطية.	21
◄ تمارين الفصل الثاني	24
◄ حلول تمارين الفصل الثاني	30
الفصل الثالث: طرق حل مسائـــل البرمجـــة الخطيـــة	**39**
تمهيد	40
1. الطريقة البيانية.	40
2. الحالات الخاصة	45
1.2. حالة تعدد الحلول المثلى	45

2.2. حالة الانحلال	
3.2. حالة الحلول غير محددة	48
4.2. حالة عدم وجود حلول ممكنة	49
3. طريقة SIMPLEXE	51
4. خطوات طريقة SIMPLEXE	51
◄ تمارين الفصل الثالث	65
◄ حلول تمارين الفصل الثالث	68
الفصل الرابع: الثنائية في البرمجة الخطيـــة وتحليـــل الحساسيـــة.	**88**
تمهيد	89
1. مفهوم المشكلة الثنائية.	89
2. تحويل مسألة أولية إلى مسألة ثنائية	89
1.2. حالة البرنامج الخطي الأولي له صيغة قانونية	89
2.2. حالة البرنامج الخطي الأولي له صيغة مختلطة ($\geq$ ، $\leq$)	90
3.2. حالة البرنامج الخطي الأولي له صيغة مختلطة ($\geq$ ، $\leq$) بقيود مساواة ($=$)	91
4.2. حالة البرنامج الخطي الأولي له صيغة مختلطة ($\geq$ ، $\leq$) بقيود مساواة ($=$) والمتغيرات غير مقيدة.	92
3. العلاقة بين جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي	93
4. تحليل الحساسية.	95
1.4. التغيرات في معاملات دالة الهدف.	96
2.4. التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة).	101
3.4. إضافة متغير أو متغيرات جديدة.	104
4.4. إضافة قيد أو قيود جديدة.	105
◄ تمارين الفصل الرابع	107
◄ حلول تمارين الفصل الرابع	112
الفصل الخامس: نمـاذج النقـــل.	**123**
تمهيد	124
1. مفهوم نموذج النقل	124
2. الخصائص الرئيسية لنموذج النقل	124
3. خطوات حل مسألة النقل	126
4. طرق حل مسائل النقل	127

1.4. طريقة الركن الشمالي الغربي (طريقة الدرج)	127
2.4. طريقة الكلفة الأقل	129
4.4. طريقة فوجل (Méthode de Vogel's)	130
5. إيجاد الحل الأمثل (اختبار الحل الأساسي الأولي)	134
1.5. طريقة الحجر المتنقل	134
2.5. طريقة التوزيع المعدلة	139
◄ تمارين الفصل الخامس	144
◄ حلول تمارين الفصل الخامس	149
المراجع	192

مقدمة

☚المعرفة هي أصل الحضارة؛

☚والكلمة هي أصل المعرفة؛

☚والكلمة المطبوعة هي أهم مكون في هذا المصدر؛

تهدف هذه **المطبوعة البيداغوجية** الموسومة بـ "**رياضيات المؤسسة دروس وتمارين محلولة**" إلى إكساب الطالب معلومات وافية وكافية عن نشأة بحوث العلميات وخصائصها المميزة لها وعلاقتها بالعلوم الأخرى، منهج بحوث العمليات في حل المشاكل واتخاذ القرارات، البرمجة الخطية وطرق حل المسائل الرياضية (الحل البياني والسمبلكس)، والنموذج المقابل، ومشاكل التوزيع وتشمل مسائل النقل، وحل مشاكل التعيين (التخصيص)، شبكات الأعمال وتشمل دراسة المسار الحرج وأسلوب بيرت (PERT) وهي موجهة لطلبة أقسام السنة الثانية علوم اقتصادية، علوم التسيير والعلوم التجارية والعلوم المالية والمحاسبية، وإلى كل المستويات باختلاف تخصصاتها، وقد حرصنا في تقديم هذه المطبوعة على الإيجاز والسهولة وتبسيط المفاهيم المدعمة بأمثلة تطبيقية بعيداً عن البراهين المعقدة والمسترسلة، وذلك حتى يتسنى للطلبة استيعاب محاور المقرر الدراسي.

كما أننا نقدم هذه المطبوعة البيداغوجية كمحاولةً منا، ونرجو أن يكون عوناً لكل طالب يسلك دروب العلم، وفي الأخير نسأل العلي القدير أن يكون خالصاً لوجهه الكريم.

د. خليفـــة الحاج

الفصل الأول:
مدخل إلى بحوث العمليـــــات

تمهيـــد

يُعتبر علم بحوث العمليات إحدى فروع علم الرياضيات التطبيقية الحديثة، حيث تستخدم لغرض التقليل من درجة الاعتماد على الحدس والتخمين والتجربة، وبدلاً من ذلك يتم التركيز على الأساليب المنطقية وإحلال الطرق العلمية (الأساليب الرياضية والتحليلات الإحصائية) لتحليل المعلومات، ويشمل ذلك فحص الخصائص البارزة لمحاور المشكلة وتحديد الأسلوب الرياضي المناسب لحل هذه المعضلة الواقعية المعقدة، ومن ثم تحديد الحلول الممكنة بناءً على الإمكانيات المتاحة. كل ذلك يتم عبر طرق منطقية رياضية، يُطلق عليها نماذج بحوث العمليات ويُمكن الإشارة إلى النموذج الواحد منها على أنه أشبه بإطار رياضي تحليلي يتم انتقاؤه من بين نماذج عديدة لتوضع فيه المشكلة بغية معالجتها، ورغم أنه إطار محدد معتمد علمياً، إلا أنه إطار مرن قابل للتطويع وفقاً لطبيعة المشكلة، وهذه النماذج المعتمدة عالمياً ليست متجانسة، كما أنها لا تعالج نفس الموضوعات أو موضوعات معينة بذاتها، بل أنها جميعها تبحث في الحل الأمثل وفقاً لنوع وطبيعة المسائل، وقد حقق استخدام أساليب بحوث العلميات نجاحاً واسعاً في مختلف مجالات الحياة عبر العالم، الأمر الذي أدى إلى تعدد نماذجها حيث يستخدم كل نموذج للوصول إلى حل مشكلة معينة كمشاكل البرمجة الخطية، ونظرية صفوف الانتظار، نظرية المباراة، نماج النقل،.....إخ.

1. نبذة تاريخية عن بحوث العلميات

برز علم بحوث العلميات لأول مرة في بريطانيا في 1936، لكن الانطلاقة والنشأة الحقيقية لهذا العلم كانت مباشرة خلال الحرب العالمية الثانية، ويُمكن إبراز مراحل التطور التاريخي لعلم بحوث العلميات كما يلي:

التصنيف الأول: استخدام علم بحوث العلميات في المجال العسكري

في بريطانيا

في بداية الحرب العالمية الثانية سنة 1939لجأت إدارة الحرب البريطانية بتشكيل فريق من العلماء من جامعة مانشستر لدراسة المشاكل الاستراتيجية والتكتيكية المتعلقة بالدفاعين الجوي والأرضي للمملكة. وسرعان ما امتدت هذه الدراسات إلى البحرية البريطانية من خلال إجراء دراسات تتعلق بالوقاية من الغواصات، وكذلك لدراسة حجم وترتيب قوافل السفن الحربية، ونوع وعدد السفن الحربية، وهدفت الدراسة التي قام بها فريق العلماء بتحديد أفضل الطرق لاستخدام قنابل الأعماق في مهاجمة هذه الغواصات. كما تم وضع هدف استخدام الموارد البشرية والمادية بشكل أمثل لإنتاج معدات وأجهزة دفاعية وفي أسرع وقت ممكن، بالإضافة إلى تحقيق أمثل استخدام للأجهزة والمعدات المصنعة. ولقد كانت النتائج التي حققها هذا الفريق هامة، من ضمنها تحسين منظومة الرادار وتحسين الدفاع المدني وغيرها.

في الو.م.أ

في الولايات المتحدة الأمريكية ونظراً للنتائج الجيدة التي أحرزها فريق العلماء البريطاني، قامت إدارة الحرب الأمريكية بإجراء دراسات مماثلة وذلك بتشكيل فرق خاص لحل بعض المشاكل المعقدة كمشكلة نقل المعدات والمواد المختلفة وتوزيعها على الوحدات العسكرية المنتشرة في مناطق مختلفة من العالم. وأول من استخدام علم بحوث العلميات في الو.م.أ هما العالمان James.B وVannevar B، حيث قاما هذان العالمان باستخدام هذا الأسلوب في القوات البريطانية، أثناء إقامتهما في بريطانيا خلال فترة الحرب، وفي أكتوبر 1942 بعث الجنرال Spaatz القائد العام للقوة الجوية الثامنة برسالة إلى القادة العموميين للقوات الجوية، يُوصي فيها بوجوب ضم مجموعات من العلماء لتحليل العمليات في وحداتهم. ومن خلال ذلك، شكلت القوة الجوية الثامنة الموجودة في بريطانيا أول فريق لهذا الغرض، ثم تبعها سلاح الجو الأمريكي. ونظراً للنجاح الذي حققته الولايات المتحدة الأمريكية بفضل استخدام علم بحوث العمليات، فقد واصل القادة العسكريون اهتمامهم بهذا العلم من خلال وكالة بحوث العمليات، والتي تحولت فيما بعد إلى مؤسسة بحوث العمليات.

في كندا

بدأ الاهتمام بعلم بحوث العلميات في كندا من خلال تشكيل فريق بحث مهمته إنتاج بعض المعدات العسكرية، وذلك من خلال الاستخدام الأمثل للموارد المتوفرة.

التصنيف الثاني: استخدام علم بحوث العلميات في المجال المدني

بعد أن وضعت الحرب العالمية الثانية أوزارها، وتبعاً للنجاح الذي حققه علم بحوث العلميات في المجال العسكري خلال هذه الحرب، دفع برجال الأعمال بالبحث عن حلول لمشاكلهم المتعلقة بالعمل، من خلال الاعتماد على هذا العلم في إدارة المشاريع الاقتصادية.

فمثلاً في بريطانيا قام فريق بحث بتكوين نادي بحوث العلميات سنة 1948، وأصبح إسمه فيما بعد جمعية بحوث العلميات للمملكة المتحدة، والتي بدأت في إصدار مجلة علمية ربع سنوية، وذلك ابتداء من سنة 1950. وفي الولايات المتحدة الأمريكية تم تكوين جمعية بحوث العمليات الأمريكية ومعهد الإدارة العلمية في سنة 1950. وقد أصدرت هذه الجمعية مجلة بحوث العمليات في سنة 1952، كما أصدر المعهد كذلك مجلة مختصة في بحوث العمليات تحت اسم مجلة الإدارة العلمية وذلك في سنة 1953.

ونظراً لزيادة الإنتاج في السلع، فقد تم الاستعانة بهذا العلم من أجل إيجاد أفضل الطرق لإنتاج السلع وبأقل تكلفة ممكنة وتوزيعها بصورة أمثل. ونتيجة للتطور الهائل في مجال المعلوماتية في العصر الحالي، والتي كان لها الفضل الكبير في إجراء العمليات الحسابية المختلفة، وكذلك ظهور البرامج العلمية المتطورة للحواسيب كان لها الأثر الواضح في دفع استخدام علم بحوث العمليات إلى آفاق واسعة في المجالات الإدارية.

كل هذه التطورات الحديثة في مجال المعلوماتية أدت إلى ضرورة استخدام البرمجة الخطية (Programmation linéaire)، والتي أدت إلى معالجة العديد من المشاكل الهامة وعلى نطاق واسع، مثل مشاكل التخصيص وتحديد كمية الإنتاج المناسبة في عدد من المصانع، كما أُستخدم أُسلوب نظرية صفوف الانتظار لتحليل شبكات خطوط الاتصالات والتي وجدت مجالها في تحليل خطوط الإنتاج وتنظيم مراكز الخدمة اللازمة على الخط الإنتاجي، ومن بين الأدوات العلمية التي أُستعين بها في اتخاذ القرارات الإدارية المتعلقة بالمجالات الصناعية هي طريقة المسار الحرج (CPM) ويرجع أصلها إلى طريقة مماثلة منها هي طريقة تقييم ومراجعة المشروعات (PERT)، ومن أهم المجالات التي تُستخدم فيها طريقة PERT هي تخطيط ومراقبة المشروعات الانشائية والصيانة والبحوث.

2. مفهوم علم بحوث العمليات

نورد بعض المفاهيم المرتبطة بهذا العلم على النحو التالي:

- بحوث العمليات هي إحدى الأدوات الكمية التي تساعد الإدارة في عملية اتخاذ القرارات؛
- بحوث العلميات هي العلم التطبيقي لاتخاذ القرارات، حيث أنها تستخدم كل الطرق العلمية المتاحة لمواجهة مشاكل الإدارة؛
- بحوث العلميات هي التطبيق العلمي للطرق الرياضية والإحصائية في حل مختلف المشاكل الإدارية والاقتصادية، التي تُواجه المقرر في أداء مهامه، والقابلة للتكميم بالدرجة الأولى؛
- بحوث العلميات تدور حول استخدام التحليل الكمي لمساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات مع الاعتماد بالدرجة الأولى على الأساليب الرياضية المتقدمة؛
- بحوث العلميات هي عبارة عن استخدام الطرق والأساليب والأدوات العلمية لحل المشاكل التي تتعلق بالعمليات الخاصة بأي نظام بغرض تديم الحل الأمثل لهذه المشاكل للقائمين على إدارة هذا النظام؛
- بحوث العلميات هي مجموعة من الأدوات القياسية التي تُمكن الإدارة من الوصول إلى قرارات أكثر دقة وموضوعية وذلك بتقديم الأساس الكمي لتحليل البيانات والمعلومات.

3. خصائص بحوث العمليات

على الرغم من التباين في تعريف بحوث العمليات فإنها كمنهج علمي للبحث في العمليات وإيجاد الحلول للمشكلات التي تُواجهها تتسم بخمس خصائص أساسية هي:

- **استخدام الطريقة العلمية للبحث**

وتعتمد الطريقة العليمة على الملاحظة العلمية للمشاهدات، والقياس وتحديد المتغيرات، وبناء النموذج الذي يمثل الظاهرة التي تجري دراستها، بالإضافة إلى تكوين الفرضيات واختبارها والوصول إلى حلول.

- **استخدام المدخل الشمولي أو النظمي**

وهو دراسة الظاهرة من جميع جوانبها وتحليلها إلى عناصرها المختلفة.

ما هو النظام؟، هو مجموعة من العناصر المترابطة معاً لأداء وظيفة معينة.

- **استخدام خبرات وتخصصات متنوعة**

كما أسلفنا أن المدخل الشمولي يتطلب دراسة الظاهرة من جميع جوانبها وتحليلها إلى عناصرها المختلفة. وهذا لا يمكن أن يتأتى إلا من خلال استخدام فريق للبحث تتنوع فيه تخصصات الأعضاء وتتكامل بشكل منسق يساعد على معالجة الظاهرة قيد البحث من جميع جوانبها. (أي من وجهة نظر جميع العلوم ذات العلاقة بالظاهرة). فمثلاً: أي مشكلة إدارية لها بالإضافة إلى البعد الإداري أبعاد أخرى (قانونية، تقنية – صناعة، زراعة– بنوك)، نفسية، اجتماعية، صحية، ....). لذا لا بد من استخدام خبرات وتخصصات متنوعة عند حل المشكلات.

- **استخدام النماذج الرياضية**

يقوم تطبيق بحوث العمليات على بناء نماذج رياضية بهدف استخدامها في تحليل المشكلات ودراستها وإيجاد الحلول المناسبة لها.

- **استخدام تقنية المعلومات**

يتطلب تطبيق بحوث العمليات تجميع كميات كبيرة جداً من البيانات وتنظيمها وتحليلها وإجراء عمليات رياضية كثيرة ومعقدة عليها. وهذا يستدعي استخدام برامج محوسبة لمعالجة مثل هذه العمليات.

4. أهمية بحوث العمليات

- توفر بحوث العمليات إمكانية القياس الكمي للظواهر المختلفة (عواملها ومتغيراتها وظروفها المختلفة)؛
- تساعد على توليد عدد كبير من البدائل والمفاضلة بينها للوصول إلى الحل الأمثل بسرعة وكفاءة عالية؛
- تعتبر القاعدة العلمية لدراسة المشكلات واتخاذ القرارات، كما تمكن من تحديد النتائج المتوقعة للقرارات وتقويمها في مرحلة مبكرة وقبل تنفيذها؛
- تتيح إمكانية ربط الأهداف الفرعية للوظائف والأنشطة المختلفة بالأهداف العامة للنظام الكلي؛
- توفر الوسائل والأدوات اللازمة لتنسيق الأنشطة المختلفة والتحكم فيها من خلال التنسيق بين الأهداف الفرعية وربطها بالأهداف العامة للنظام؛

وتتضح أهمية بحوث العمليات والأساليب الكمية لدراسة الأمور الكمية في إدارة الأعمال من خلال:

- المساهمة في تقريب المشكلة الإدارية إلى الواقع؛
- صياغة نماذج رياضية معينة تعكس مكونات المشكلة؛
- عرض النموذج في مجموعة من العلاقات الرياضية وإعطاء بدائل مختلفة لعملية اتخاذ القرارات وبما يُساهم في تفسير عناصر المشكلة والعوامل المؤثرة فيها؛

- تطبيق هذه النماذج الرياضية في المستقبل عندما تُواجهنا مشكلة مماثلة ولهذا يُوفر هذا العلم فوائد كبيرة لصانعي ومتخذي القرارات.

5. مجالات تطبيق بحوث العمليات

- **الصناعة والتجارة والزراعة**: توزيع الإنتاج، الاستخدام الأمثل للموارد، مراقبة المخزون.
- **النقل والمواصلات**: تنظيم المواصلات البرية، تنظيم الرحلات الجوية، تنظيم حركة المرور، تنظيم استخدامات الهاتف.
- **التخطيط**: تنظيم استخدام القوى العاملة، تخطيط المشروعات، التخطيط الاقتصادي، جدولة الأعمال.
- **التسويق والمبيعات**: رسم السياسات التسعيرية، رسم السياسات التسويقية، بحوث التسويق، الدعاية والإعلان.
- **المجال العسكري**: رسم الاستراتيجيات العسكرية المثلى، إيجاد الخطط المثلى لزرع الألغام، إيجاد الخطط المثلى لعمليات الهجوم والدفاع والانسحاب، الاستخدام الأمثل للمعدات والذخائر العسكرية.

6. مزايا وعيوب تطبيق مفاهيم بحوث العلميات

مزايا التطبيق

- يساهم تطبيق مفاهيم بحوث العمليات كمدخل كمي في تقريب المشكلة إلى الواقع بموجد نماذج رياضية وذلك وفقاً للتفكير العلمي المنظم والعقلاني؛
- يساعد في عرض النتائج المستخلصة من حل النماذج والعلاقات الرياضية بما يؤمن عدد من البدائل والخيارات لأغراض عملية اتخذا القرارات، وبما يساهم في تفسير كافة ملابسات المشكلة؛
- يساهم في إمكانية تعميم المعايير القياسية والمثالية لعملية اتخاذ القرارات.

عيوب التطبيق

- تُعد أساليب بحوث العمليات، منهج عقيم كونها لا تترك فرصة للسلوك الإنساني في عملية حل المشكلة وتفسير نتائج الحل؛
- صعوبة إخضاع بعض المشكلات للنماذج الرياضية أو التفسير الكمي والحسابات المجردة؛
- عدم توفر الكوادر الفنية المتخصصة في صياغة وبناء النماذج الرياضية في المواقع المختلفة التي تظهر فيها المشكلة؛
- التكاليف العالية المترتبة على تطبيق بحوث العمليات كمدخل كمي سبب ارتباط هذا المدخل باستخدام الحاسب الإلكتروني، مما يستلزم تشكيل فرق بحثية من شأنها أن تحمل ميزانية المنشأة مبالغ نقدية كبيرة.

الفصل الثاني: البرمجة الخطيـة

تمهيد

تُعتبر البرمجة الخطية من أهم أساليب رياضيات المؤسسة (بحوث العمليات) وأكثرها شيوعاً واستخداماً في الحياة العملية، حيث يُستخدم هذا الأسلوب في حل مشكلات التخصيص والتي تتضمن توزيع الموارد الاقتصادية المحدودة على الاستخدامات البديلة لها وفقاً لمعيار تفضيل معين. تُعد مشكلات التخصيص من أهم المشكلات التي تواجه المؤسسات الاقتصادية حيث يتوافر لديها موارد اقتصادية محدودة، ويُمكن استخدام هذه الموارد في عدة استخدامات بديلة، كما أن كل مؤسسة تسعى إلى تحقيق هدف أو مجموعة أهداف، وتتلخص مشكلات التخصيص في الوصول إلى التوزيع الأمثل لهذه الموارد الاقتصادية المحدودة على الاستخدامات البديلة لها.

1. نشأة البرمجة الخطية

نتيجة محدودية الموارد العسكرية، خلال الحرب العالمية الثانية، كلَّفت الحكومة البريطانية فريقاً من كبار العلماء دراسة مسائل كيفية توزيع مواردها العسكرية، وما يتناسب مع أفضل وضع دفاعي جوي وبري، ولقد أطلق على دراسات هذا الفريق اسم بحوث العمليات أو البحث العملياتي. ثم أخذت هذه التسمية تطلق على كافة الأبحاث والدراسات التي تتعامل مع مسائل البرمجة أو التوزيع ومسائل اتخاذ القرار. وقد حثَّت النتائج المشجعة لفريق بحوث العمليات البريطانية لإدارة العسكرية الجوية الأمريكية على تكوين فريق مشابه للقيام بالدراسات اللازمة في هذا المجال. فقد وجدت هذه الفرق أن أساليب مسائل التفضيل التقليدية، كطريقة **مضاريب لاغرانج** مثلاً، ليست ذات فائدة كبيرة في حل مسائل البرمجة الخطية، مما استوجب إيجاد أساليب أكثر فاعلية في عام 1947م حين طور (Dantzig GEORGE) عضو الفريق الأمريكي لبحوث العمليات الطريقة المبسطة (**SIMPLEXE**) لحل مسألة البرمجة الخطية؛ لكن لم تنشر تفاصيل هذه الطريقة إلا في عام 1956م. وبعد نشر الطريقة المبسطة (**SIMPLEXE**) حدث تسارع كبير في استخدام وتطوير البرمجة الخطية. ومن المشاركات التطويرية المهمة في ذلك المجال أعمال GAL التي قام بها وحده أو بمشاركة آخرين معه، إذ قاموا بصَوْغ المسألة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية. وحالياً تستخدم البرمجة الخطية في مختلف المجالات الصناعية والاقتصادية والخدمية والعسكرية، وحيثما توجد عدة موارد محدودة الكمية مشتركة في تشكيل أو إنتاج سلعة أو تقديم خدمة معينة.

2. مفهوم البرمجة الخطية

البرمجة الخطية بشكل عام عبارة عن أسلوب من الأساليب الرياضية يُستخدم لتحديد مشكلة أو حالة معينة تحديداً رياضياً، ولإيجاد حل أمثل للمشكلة أو حالة. والبرمجة الرياضية قد تكون بصيغ خطية أو غير خطية وذلك اعتمادا على صيغ العلاقات أو المعادلات الرياضية التي يحتويها النموذج الرياضي. فإذا كانت العلاقات أو المعادلات التي تشكل النموذج علاقات آنية من الدرجة الأولى، فإن النموذج أو النظام بهذه الصيغة يُدعى بنظام البرمجة الخطية. أما إذا كانت تلك العلاقات من الدرجة الثانية أو أكثر فيطلق على ذلك بالبرمجة غير الخطية.

وقد تباينت آراء الباحثين والمختصين في تحديد مفهوم البرمجة الخطية، نوجز البعض منها كما يلي:

- **البرمجة:** يُقصد بها الإجراءات والخطوات التي تُؤدي إلى حل مشكلة ما، وتُجد عادةً في الحاسب الآلي ومجالات الهندسة وغيرها.
- **الخطية:** يُقصد بها وجود علاقات خطية من الدرجة الأولى يُمكن رسمها على خط مستقيم بين المتغيرات في حالة التأكد من خطية المعادلات.
- **البرمجة الخطية:** هي أسلوب رياضي يهدف إلى تعظيم "**Maximiser**" أو تدنية "**Minimiser**" دالة خطية تُسمى دالة الهدف "**d'objective Fonction**" محددة في حدود معروفة أو مفترضة تُسمى القيود **"Contraintes".**
- **البرمجة الخطية** هي وسيلة رياضية تُساهم في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بتوزيع الموارد المتاحة (البشرية والمادية) بين

الاستخدامات المتنافسة بغية تحقيق هدف محدد (أقصى عائد أو أدنى تكلفة) ضمن مجموعة من المحددات أو القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة.

- **البرمجة الخطية** هي أسلوب رياضي يستهدف الوصول إلى تحقيق الأمثلية من خلال عدة طرق ممكنة للموارد المتاحة(بطيخ، 2015، صفحة 36).
- **البرمجة الخطية** هي أسلوب رياضي يُوظف لتوزيع الموارد والإمكانيات المحدودة (المتاحة) ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة، وصولاً إلى تحقيق الأمثلية.
- **البرمجة الخطية** هي ذلك الأسلوب الرياضي الذي يهدف إلى إيجاد أحسن استخدام للموارد المحدودة وفقاً لمعيار أفضلية معين (الدين، 1996، صفحة 29).

3. استخدامات البرمجة الخطية

تُستخدم البرمجة الخطية في العديد من المجالات بغرض إيجاد أفضل الحلول لها مما يجعلها أداة مهمة لمتخذي القرارات وأهمها:

- الاختيار بين طرق الإنتاج المختلفة عن طريق إيجاد التوزيع الأمثل لمختلف عناصر الإنتاج (مواد، عمال، آلات، ....) على مختلف العمليات الصناعية، ويتجلى ذلك في حالة قيام المؤسسة بإنتاج مزيج من المنتجات تتنافس بينها على مختلف عناصر الإنتاج المتوفرة بكميات محدودة؛
- تسمح البرمجة الخطية بمراعاة عنصر الطلب (السوق) ومن ثم تحديد برامج الإنتاج والمخزون في كل فترة، الأمر الذي يؤدي إلى تخفيض تكاليف الإنتاج والتخزين إلى أدنى مستوى ممكن؛
- تسمح البرمجة الخطية من تحديد مصادر الحصول على الأموال وتخطيط وتوجيه الاستثمارات؛
- تُساعد البرمجة الخطية في ضبط سياسات تحديد الاحتياجات والتعيين والتدريب وأنظمة التحفيز والتشجيع؛
- تُسهم البرمجة الخطية في تحديد مصادر الشراء وكميات وأسعار المواد المشتراة وأوقات الحصول عليها، ووضع نظم سليمة للمخزون، مما يُؤدي إلى زيادة الربحية وخفض التكاليف؛

4. شروط استخدام البرمجة الخطية

يعتمد أسلوب البرمجة الخطية على جملة من الشروط (Conditions) أو الفرضيات (Hypothèses) الواجب توافرها من أجل التعبير عن المشكلة رياضياً وأهمها:

- وجود عدد من المتغيرات (Variables) (تُدعى متغيرات القرار)، التي يجب تحديد قيمها للوصول إلى الهدف المنشود (أكبر ربح، أقل تكلفة)؛
- وجود هدف يُراد الوصول إليه، يُعبر عنه رياضياً بدالة خطية تُدعى دالة الهدف (Fonction d'objective) وتأخذ الشكل العام التالي:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

حيث: C_j أعداد حقيقية تُدعى بمعاملات مساهمة المتغيرات في دالة الهدف، وتُصنف الأهداف التي تُعالجها البرمجة الخطية إلى مجموعتين:

تعظيم دالة الهدف (Maximiser): كأن نسعى إلى تحقيق أكبر ربح ممكن أو توفير أعظم للوقت والجهد أو زيادة الدخل القومي إلى أقصى حد ممكن. وسنرمز لدالة الهدف في هذه الحالة بحرف كبير Z، ويُعبر عن دالة الهدف في هذه الحاملة بالشكل الرياضي التالي:

$$\boldsymbol{Max\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j}$$

تصغير دالة الهدف (Minimiser): كأن نسعى إلى تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن أو تقليل الخسائر قدر الإمكان. وسنرمز لدالة الهدف في هذه الحالة بحرف كبير Z، ويُعبر عن دالة الهدف في هذه الحاملة بالشكل الرياضي التالي:

$$\boldsymbol{Min\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j}$$

✍ وجود علاقة تأثير بين المتغيرات يُعبر عنها رياضياً بمتباينات تُدعى الشروط الخطية (Conditions linéaires) أو قيود المسألة وتأخذ أحد الشكلين التاليين حسب نوع دالة الهدف:

إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم أي Max فإن الشروط الخطية تأخذ الشكل:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i; i = 1, 2, \dots\dots\dots, M$$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تصغير أي Min فإن الشروط الخطية تأخذ الشكل:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i; i = 1, 2, \dots\dots\dots, M$$

وفي كلا الشكلين فإن:

n: تُعبر عن عدد المتغيرات في النموذج الخطي؛

m: تُعبر عدد قيود المسألة (عدد الشروط الخطية)؛

a_{ij}: هي أعداد حقيقية تُدعى معاملات مساهمة المتغيرات في قيود المسألة؛

b_i: هي أعداد حقيقية تُعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المشكلة.

✍ يُشترط على جميع المتغيرات أن تكون غير سالبة (non négativité) أي: $x_j \geq 0$

5. فرضيات البرمجة الخطية

- **فرضية التناسب**: وتعني أن معامل أي متغير من متغيرات النموذج سيبقى ثابتاً سواءً كان في دالة الهدف أو في القيود، كمثال على ذلك لو أن الوحدة الواحدة من X_1 تُعطي ربحاً قدره 5 دج، فإن ذلك يعني أن الربحية من هذا المنتوج تُساوي $5X_1$، فلو كانت $X_1 = 3$، فإن الربح من هذا المنتوج يُساوي 15 دج، ولو كانت $X_1 = 6$، فإن الربح من هذا المنتوج يُساوي 30 دج. وهذا يعني أن قيمة المعامل لا تتغير بتغير قيمة X_1.
- **فرضية الخطية**: وتعني أنه لا يوجد تداخل بين متغيرات القرار سواءً في القيود أو في دالة الهدف، فدالة الهدف ما هي إلا مجموع الأرباح أو الإيرادات أو التكاليف الناتجة من جميع متغيرات القرار، والقيد ما هو إلا مجموع الموارد المستهلكة أو مجموع المنتجات، أو باختصار هو مجموع القيم المشترطة لهذا القيد.

الصيغة الرياضية	قرار القبول في البرمجة الخطية
$x_1 + x_2 \geq 20$	مقبول (متراجحة من الدرجة الأولى)
$x_1^2 + x_2 + 2 \leq 40$	غير مقبول (متراجحة من الدرجة الثانية)
$\log(x_1) + 2x_2 \geq 10$	غير مقبول (وجود اللوغاريتم)
$x_1 x_2 = 18$	غير مقبول (ضرب المغيرات بعضا البعض)

$\sqrt{2x_1} + \frac{x_2}{x_1} \leq 30$	غير مقبول (وجود الجذر التربيعي و الكسر)

- **الاستمرارية:** يعني أن قيم المتغيرات تأخذ قيماً مستمرة، بمعنى أن تأخذ قيماً كسرية فيمكن أن تكون قيمة المتغير (2,4).
- **التأكد:** تعني أن قيم معاملات المتغيرات في دالة الهدف، وكذلك في القيود، بالإضافة إلى الموارد المتاحة هي قيم مُؤكدة وليست احتمالية.

6. صيغ نماذج البرمجة الخطية

يأخذ النموذج الخطي بشكل عام ثلاثة صيغ كما يلي:

1.6. الصيغة النظامية أو القانونية (Forme canonique)

تُعتبر هذه الصيغة الشكل الأولي الذي يأخذه النموذج الرياضي عند تشكيل المسألة رياضياً. وتأخذ مسألة البرمجة الخطية هذه الصيغة إذا توفرت الشروط التالية:

- دالة الهدف في حالة تعظيم (Max) وكل القيود المرافقة لها من نوع أقل أو تُساوي "$\leq$"؛
- دالة الهدف في حالة تدنية (Min) وكل القيود المرافقة لها من نوع أكبر أو تُساوي "$\geq$")؛
- جميع متغيرات القرار (X_j) غير سالبة، أي ($X_j \geq 0$).

وتُعطى الصيغة القانونية للنموذج الخطي كما يلي:

- **الصيغة العامة لدالة الهدف (Fonction d'objective)**

$$Max(Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$Min(Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

- **الصيغة العامة للقيود الهيكلية (Contraintes structurelles)**

في حالة التعظيم

$$S.C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \; ; & i = 1, 2, \dots\dots, m \\ X_j \geq 0 \; ; & j = 1, 2, \dots\dots, n \end{cases}$$

في حالة التدنية

$$S.C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i \; ; & i = 1, 2, \dots\dots, m \\ X_j \geq 0 \; ; & j = 1, 2, \dots\dots, n \end{cases}$$

- **الصيغة المفصلة لدالة الهدف**

في حالة التعظيم

$$Max\ (Z) = X_1 + X_2 + \cdots\dots + X_n$$

في حالة التدنية

$$Min\ (Z) = X_1 + X_2 + \cdots\dots + X_n$$

- **الصيغة المفصلة للقيود الهيكلية وقيد عدم السلبية**

في حالة التعظيم

$$S.C\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots \ldots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots \ldots + a_{2n}X_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots \ldots\ldots + \ldots\ldots \ldots\ldots + \cdots \ldots + \ldots\ldots \ldots\ldots \leq \ldots\ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots \ldots + a_{mn}X_n \leq b_m \\ X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

- **الصيغة المفصلة للقيود الهيكلية وقيد عدم السلبية**

في حالة التدنية

$$S.C\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots \ldots + a_{1n}X_n \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots \ldots + a_{2n}X_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots \ldots\ldots + \ldots\ldots \ldots\ldots + \cdots \ldots + \ldots\ldots \ldots\ldots \geq \ldots\ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots \ldots + a_{mn}X_n \geq b_m \\ X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

- **الشكل المصفوفي لدالة الهدف**

في حالة التعظيم

$$Max\ (Z) = CX$$

$$Max\ (Z) = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad \ldots \quad C_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

في حالة التدنية

$$Min\ (Z) = CX$$

$$Min\ (Z) = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad \ldots \quad C_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- **الشكل المصفوفي للقيود الهيكلية وقيد عدم السلبية**

حالة التعظيم

$$\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$S.C\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$$

حالة التدنية

$$\begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$S.C \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث:

C: شعاع سطر من R^n؛

$$C = [c_1, c_2, \dots \dots \dots c_n]$$

B: شعاع عمود من R^n؛

X: الشعاع المطلوب إيجاد من R^n؛

A: مصفوفة من الرتبة $(m * n)$؛

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Z}$: تمثل دالة الهدف (الهدف المنشود من حل المشكلة).

$\boldsymbol{C_j}$: تُمثل معاملات دالة الهدف، أي إما أن تكون الربح أو العائد الوحدوي للوحدات المنتجة أو التكلفة الوحدوية للوحدات المنتجة (متغيرات القرار).

$\boldsymbol{X_j}$: تُسمى بمتغيرات القرار وهي الكميات أو عدد الوحدات المنتجة من المنتجات وهي المتغيرات المجهولة التي نبحث عنها أو المطلوب اتخاذ القرار بشأنها.

b_i: تُمثل الموارد المحددة أو المتاحة.

a_{ij}: كمية الموارد المستهلكة من النوع i واللازم تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط j.

كما أن (n) تمثل عدد المتغيرات و (m) تُمثل عدد القيود وأن $(C_1, C_2, \dots \dots \dots, C_n)$ و $(b_1, b_2, \dots \dots \dots, b_n)$ والمصفوفة $a[i,j]$و $(j = 1,2, \dots \dots, n \; et \; i = 1,2, \dots \dots \dots, m)$ تتحدد قيمها وطبيعتها وفقاً للمشكلة المرغوب فيها.

- **مثال (1.2)**

يقوم مصنع للجلود بإنتاج نوعين من الحقائب الجلدية A وB، حيث انتاج وحدة واحدة من النوع A يحتاج إلى 2 متر من الجلود و3 ساعات عمل أسبوعية، بينما يحتاج لإنتاج حقيبة واخدة من النوع B يحتاج إلى متر واحد من الجلود، وساعتي عمل أسبوعية.

إذا علمت أن ربح الحقيبة الواحدة من النوع A هو 300 دج وربح الحقيبة الواحدة من النوع B هو 200 دج، كما أن كمية الجلود الأسبوعية المتوفرة هي 100 متر مع ساعات عمل أسبوعية مقدارها 120 ساعة.

المطلوب

شكل نموذج البرمجة الخطية لإيجاد عدد الحقائب المنتجة أسبوعياً من النوعين A وB لتعظيم الربح الأسبوعي للمصنع.

♦ **الحل**

- تحديد متغيرات القرار والتي تُمثل عدد الحقائب المنتجة من النوعين كالآتي:

x_1: عدد الحقائب المتوقع إنتاجها من النوع A؛

x_2: عدد الحقائب المتوقع إنتاجها من النوع B؛

بعد تحديد متغيرات القرار نقوم بتحديد قيود المسألة، ففي هذه الحالة القيود محددة بالموارد المتاحة (الجلود، ساعات العمل)، فإنتاج حقيبة واحدة من النوع A يتطلب 2 متر من الجلود. وبما أن x_1 يُمثل عدد الحقائب المنتجة من النوع A، لذلك فإن كمية الجلود المطلوبة لإنتاج الحقائب من النوع A هي $2x_1$، ونفس الشيء بالنسبة إلى انتاج الحقائب من النوع B، حيث تتطلب x_2 من الجلود، وهكذا فإن مجموع كمية الجلود المطلوبة لإنتاج النوعين A و B هي:

$$2x_1 + x_2$$

كما أنه لا يجب أن يتجاوز كمية الجلود المتاحة، والتي هي 100 متر، ولذلك فإن قيد الجلود يكون من الشكل الرياضي التالي:

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

أما بالنسبة للوقت فإن انتاج حقيبة واحدة من النوع A يتطلب 3 ساعات عمل أسبوعية، أي أن الوقت المتطلب لإنتاج الحقائب نوع A هو $3x_1$، وكذلك الوقت المتطلب لإنتاج الحقائب من النوع B هو $2x_2$، وعليه فإن الوقت المتطلب لإنتاج الحقائب من النوعين A و B هو:

$$3x_1 + 2x_2$$

كما أنه لا يجب أن يتجاوز ساعات العمل الأسبوعية المتمثلة بـ 120ساعة، لذلك فإن قيد ساعات العمل يكون وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 120$$

إن انتاج الحقائب لأي من النوعين يأخذ احتمالين، إما تُنتج أو لا تنتج، في حالة كون الربح العائد من انتاجها قليل مقارنة مع النوع الآخر، وكذلك الموارد المتطلبة لإنتاجها تكون أكثر من الموارد المتطلبة لإنتاج النوع الآخر، وهذا يعني أن انتاج نوع واحد من الحقائب يعود على المصنع بربح أكثر من انتاج النوعين، وعلى هذا الأساس فإن انتاج أي نوع من الحقائب يجب أن يكون أكبر أو يُساوي صفر، وهذا ما يُسمى بقيود عدم السلبية. أي:

$$x_1 \geq 0 \;\; ; \;\; x_2 \geq 0$$

♦ **مثال (2.2)**

أُكتب البرنامج الرياضي التالي وفق الشكل المصفوفي:

$$Min\ (Z) = 5x_1 + 4x_2$$

$$sc \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 - 2x_2 \geq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

♦ **الحل**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Min\ (Z) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.6. الصيغة المعيارية أو القياسية (Forme standard)

وهي الصيغة المستخدمة لإيجاد الحل الأولي في البرنامج الخطي، وتكون فيها جميع القيود الهيكلية من نوع المساواة (=)، أي على شكل معادلات وليس متراجحات ماعدا قيد عدم السلبية مهما كان نوع دالة الهدف تعظيم أو تدنية.

- **دالة الهدف (Fonction d'objective)**

$$Max(Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

$$Min(Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

- **القيود الهيكلية (Contraintes structurelles)**

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = b_i \ ; & i = 1, 2, \dots\dots, m \\ X_j \geq 0 \ ; & j = 1, 2, \dots\dots, n \end{cases}$$

وتكتب القيود الهيكلية وفق الصيغة المفصلة كما يلي:

$$S.C \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots \dots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \dots\dots \dots\dots + \dots\dots \dots\dots + \cdots \dots + \dots\dots \dots\dots = \dots\dots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots \dots + a_{mn}X_n = b_m \\ X_1, X_2, \dots\dots\dots\dots\dots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

الصيغة المختلطة (Forme mixte)

هذه الصيغة من النموذج الرياضي تكون فيها القيود الهيكلية مختلفة الاتجاهات، أي تحتوي على متباينات من نوع أكبر أو يساوي ($\geq$)، ومتباينات من نوع أصغر أو تساوي ($\leq$) ومعادلات من نوع المساواة (=). كما يلي:

- **دالة الهدف (Fonction d'objective)**

$$Max(Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

$$Min(Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

- **القيود الهيكلية (Contraintes structurelles)**

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \geq; \leq; = b_i \ ; \quad i = 1, 2, \dots \dots, m \\ X_j \geq 0 \ ; \quad j = 1, 2, \dots \dots, n \end{cases}$$

وتكتب القيود الهيكلية وفق الصيغة المفصلة كما يلي:

$$S.C \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots \dots + a_{1n}X_n \leq, =, \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots \dots + a_{2n}X_n \leq, =, \geq b_2 \\ \dots\dots \dots\dots + \dots\dots \dots\dots + \cdots \dots + \dots\dots \dots\dots \leq, =, \geq \cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots \dots + a_{mn}X_n \leq, =, \geq b_m \\ X_1, X_2, \dots \dots \dots \dots \dots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

7. تركيب نموذج البرمجة الخطية

تُعد مرحلة الانتقال من مسألة اقتصادية وصياغتها إلى مسألة رياضية بشكل كمي من أعقد المراحل في تحليل المشاكل الإدارية أو الاقتصادية أو الهندسية، حيث أن المراحل المتبقية تتضمن فقط إيجاد الحل الأمثل للنموذج المصاغ بإحدى طرق الحل المعروفة (الطريقة البيانية أو طريقة السمبلكس، ...)، ولصياغة النموذج الرياضي الخطي لمعظم المشاكل التي تؤول إلى نموذج برمجة خطية، نلتزم بالخطوات التالية:

- تحديد دالة الهدف بدقة ووضوح وتحديدها كمياً؛
- تحديد متغيرات القرار (Variables de décision) في المسألة، وإمكانية حسابها كمياً؛
- التحديد الكمي لجميع الموارد المتاحة (Ressources disponibles)، واللازمة لتحقيق الهدف في المسألة؛
- التحديد الكمي لجميع التعليمات المقيدة، والمستخدمة لتحقيق الهدف في المسألة؛
- التأكد من أن جميع العلاقات في القيود ودالة الهدف هي علاقات خطية.

مثال (3.2)

تُنتج شركة ثلاثة نماذج من الطاولات (A)، (B)، (C)، وفق ثلاث مراحل أساسية: (التقطيع، التركيب، الدهن)، المدة الزمنية اللازمة لكل مرحلة، والربح الوحدوي لكل منتوج موضحة في الجدول أدناه.

النموذج	التقطيع	التركيب	الدهن	الربح الوحدوي (دج)
A	1	2	2	15
B	2	4	1	25
C	2	3	0	10
الموارد المتاحة	**200**	**300**	**150**	

المطلوب:

شكل نموذج البرمجة الخطية

الحل

التعريف بمتغيرات القرار (Variables de décision) في المسألة:

ليكن:

x_1: عدد الوحدات المنتجة من النموذج (A)؛

x_2: عدد الوحدات المنتجة من النموذج (B)؛

x_3: عدد الوحدات المنتجة من النموذج (C)؛

التعريف دالة الهدف (الدالة الاقتصادية): تعظيم الأرباح

$$Max\ (Z) = 15x_1 + 25x_2 + 10x_3$$
$$sc \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 200 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 300 \\ 2x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **مثال (4.2)**

مؤسسة للتجارة تنتج 3 أنواع من المنتجات هي: الكراسي، الطاولات، الخزائن، عملية الإنتاج تستدعي مرور هذه المنتجات بثلاث ورشات:

- **الورشة (1)**: يتم على مستوى هذه الورشة صناعة الهياكل، طاقة العمل القصوى بها تقدر بـ 130 ساعة؛
- **الورشة (2)**: يتم على مستوى هذه الورشة تركيب الملحقات، عدد ساعات العمل المتاح لهذه الورشة يقدر بـ 90 ساعة؛
- **الورشة (3)**: يتم على مستوى هذه الورشة الإنهاء، طاقة العمل القصوى بها تقدر بـ 80 ساعة.

إنتاج الكرسي الواحد يتطلب 14 ساعة في الورشة (1)، و14 ساعة في الورشة (2)، و10 ساعات في الورشة (3)، وإنتاج طاولة واحدة يتطلب 18 ساعة في الورشة (1)، و20 ساعة في الورشة (2)، و5 ساعات في الورشة (3)، وإنتاج خزانة واحدة يتطلب 25 ساعة في الورشة (1)، و20 ساعة في الورشة (2)، و10ساعات في الورشة (3). الكرسي الواحد يتطلب صفيحة خشبية واحدة في حين أن الطاولة تتطلب صفيحتين، أما بالنسبة للخزانة الواحدة فتتطلب 4 صفائح خشبية، علما أن المتاح من الصفائح الخشبية على مستوى المؤسسة يقدر بـ 125 صفيحة، سعر بيع: الكرسي الواحد 450 دج، الطاولة الواحدة 1000 دج والخزانة الواحدة 1500 دج، علما أن تكلفة: الكرسي الواحد 400 دج، الطاولة الواحدة 900 دج، الخزانة الواحدة 1000 دج.

المطلوب:

- صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتحديد الكميات الواجب إنتاجها من الكراسي، الطاولات والخزائن، والذي يسمح للمؤسسة بتحقيق أعظم ربح ممكن.

- **الحل**

صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتحديد الكميات الواجب إنتاجها من الكراسي، الطاولات والخزائن، والذي يسمح للمؤسسة بتحقيق أعظم ربح ممكن.

التعريف بمتغيرات القرار (Variables de décision) في المسألة:

ليكن:

x_1: عدد الوحدات المنتجة من الكراسي؛

x_2: عدد الوحدات المنتجة من الطاولات؛

x_3: عدد الوحدات المنتجة من الخزائن.

دالة الهدف (الدالة الاقتصادية): تعظيم الأرباح

الربح الإجمالي للمؤسسة = الربح المترتب عن بيع الكراسي + الربح المترتب عن بيع الطاولات + الربح المترتب عن بيع الخزائن.

- الربح الوحدوي المترتب عن بيع الكراسي = (سعر البيع – التكلفة) = (50 = 400-450)؛

- الربح الوحدوي لمترتب عن بيع الطاولات = (سعر البيع – التكلفة) = (1000-900 = 100)؛
- الربح الوحدوي المترتب عن بيع الخزائن = (سعر البيع – التكلفة) = (1500-1000 = 500)؛

الربح الإجمالي للمؤسسة = (الربح الوحدوي المترتب عن بيع الكراسي مضروب في عدد الوحدات المنتجة من الكراسي) + (الربح الوحدوي المترتب عن بيع الطاولات مضروب في عدد الوحدات المنتجة من الطاولات) + (الربح الوحدوي المترتب عن بيع الخزائن مضروب في عدد الوحدات المنتجة من الخزائن).

الربح الإجمالي للمؤسسة = $(50x_1 + 100x_2 + 500x_3)$

وعليه تصبح دالة الهدف كالتالي:

$$Max\ (Z) = \ 50x_1 + 100x_2 + 500x_3$$

$$sc\begin{cases} 14x_1 + 18x_2 + 25x_3 \leq 130 \dots\dots (1) \\ 14x_1 + 20x_2 + 20x_3 \leq 90 \dots\dots (2) \\ 10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 80 \dots\dots (3) \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 125 \dots\dots (4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \ \dots\dots (5) \end{cases}$$

- ✓ المتراجحة رقم (1) تُمثل قيد الورشة (1)؛
- ✓ المتراجحة رقم (2) تُمثل قيد الورشة (2)؛
- ✓ المتراجحة رقم (3) تُمثل قيد الورشة (3)؛
- ✓ المتراجحة رقم (4) تُمثل قيد المواد الأولية؛
- ✓ المتراجحة رقم (5) تُمثل قيد عدم السلبية لمتغيرات القرار.

تمارين الفصل الثاني

التمرين الأول

تقوم شركة متخصصة في فن الديكور وأعمال الجبس بتشطيب برج سكني في مدينة مستغانم، وكان الالتزام المفروض على الشركة كالتالي: إعداد تركيبين أساسيين في الدهان والجبس بحيث:

- يحتاج التركيب الأول 4 ساعات من المادة الأولى، و2 ساعة من المادة الثانية؛
- يحتاج التركيب الثاني إلى 3 ساعات من المادة الأولى وساعة واحدة من المادة الثانية؛

بحيث يستهلك من المادة الأولى 500 جم، ومن المادة الثانية 600 وحدة.

ويحقق التركيب الأول ربحاً بمقدار 7000 دج، ويُحقق التركيب الثاني 5000 دج.

المطلوب:

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن؛
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

التمرين الثاني

تقوم شركة لصناعة المواد الكيماوية للمنظفات بصناعة مركب يستخدم في التنظيف يتكون من ثلاثة مركبات أساسية ويمر بثلاثة مراحل من التصنيع بحيث:

- يحتاج المركب الأول في المرحلة الأولى 3 ساعات تصنيع وتركيب، والمرحلة الثانية 4 ساعات تحليل ومعايرة، والمرحلة الثالثة 5 ساعات تعبئة وتغليف.
- ويحتاج المركب الثاني في المرحلة الأولى 6 ساعات تصنيع وتركيب، والمرحلة الثانية ساعتين تحليل ومعايرة، والمرحلة الثالثة 4 ساعات تعبئة وتغليف.
- يحتاج المركب الثالث في المرحلة الأولى 7 ساعات تصنيع وتركيب، والمرحلة الثانية 3 ساعات تحليل ومعايرة، والمرحلة الثالثة ساعتين تعبئة وتغليف.
- ويعمل في المصنع عمال بواقع 9 ساعات يومياً في قسم التصنيع والتركيب، و8 ساعات في قسم التحليل والمعايرة، و7 ساعات في التعبئة والتغليف.

وعند قسم التسويق يحقق اللتر الواحد ربحاً بمقدار 12 دج للمركب الأول، و14 دج للمركب الثاني، و16 دج للمركب الثالث.

المطلوب:

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن.
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

التمرين الثالث

ينتج مصنع الحلويات نوعين من السلع: الأول بسكويت، والثاني شوكولاطة، بحيث:

- يحتاج الأول 4 ساعات في قسم التصنيع، وساعتين في قسم التغليف؛
- يحتاج الثاني 5 ساعات في قسم التصنيع، و3 ساعات في قسم التغليف؛

ويعمل في المصنع عمال بواقع 8 ساعات يومياً في قسم التصنيع، و3 ساعات في قسم التغليف.

ويحقق النوع الأول ربحاً بمقدار 10 دج للوحدة الواحدة ويحقق الثاني 30 دج للوحدة الواحدة.

المطلوب:

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن؛
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

التمرين الرابع

شركة لصناعة الأثاث المنزلي تصنع ثلاثة أنواع من الأثاث: طاولات، كراسي، أسرة، كما يلي:

النوع	الطاولات	الكراسي	الأسرة	الموارد
مواد أولية	30	20	30	120
ساعات عمل	2	2	1	9
الآلات	4	6	4	24
الربح المحقق	10	8	12	-------

المطلوب:

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن؛
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

التمرين الخامس

شركة لإنتاج المياه المعدنية تضع محلولين أساسين عند تصنيع المياه (معقم، ومحلي طعم):

المنتوج	المحلول الأول	المحلول الثاني	الربح
المادة الأولى	15	14	2
المادة الثانية	12	11	3
المورد	200 مل	150 مل	-------

المطلوب:

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن؛
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

التمرين السادس

شركة لصناعة العصائر المعلبة تستخدم في إنتاج العصائر ثلاثة مركبات أساسية ويمر العصير بأربع مراحل تصنيع كما يوضحه الجدول أدناه:

المنتوج	الأول	الثاني	الثالث	المورد
المرحلة 1	3	2	1	50
المرحلة 2	1	1	1	20

المرحلة 3	4	3	3	30
المرحلة 4	6	5	1	40
الأرباح	1	3	2	------

المطلوب:

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن؛
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

التمرين السابع

ليكن لدينا ثلاثة أنواع من المواد الأولية (M1, M2, M3) المستخدمة في صنع نوعين من المنتجان (P1) و (P2)، ولتكن استخدامات كل مورد والربح المتحقق من أجل كل وحدة من نوعي المنتجات ممثلاً بالجدول التالي:

المنتجات	كمية المادة M1	كمية المادة M2	كمية المادة M3	الربح الوحدوي
P1	3	4	5	20
P2	6	2	1	25

فإذا كانت كميات المواد الأولية المتاحة هي 120، 70، 90 على الترتيب.

المطلوب

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن؛
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

التمرين الثامن

تُنتج الشركة العامة للصناعات الكيمياوية ثلاثة منتجات (P1)، (P2)، (P3)، تمر كل منها بثلاثة مراحل، فإذا كان الوقت اللازم لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج في كل مرحلة، والطاقة الإنتاجية اليومية لكل مرحلة مبينة في الجدول أدناه:

المراحل	الوقت اللازم لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج بالساعة			الطاقة اليومية لكل مرحلة سا/ يوم
	P1	P2	P3	
1	3	4	2	45
2	1	0	1	40
3	2	3	0	30

فإذا كان الربح الوحدوي من المنتجات الثلاثة على الترتيب 4، 3، 2دج.

المطلوب

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن؛
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

التمرين التاسع

ترغب شركة لإنتاج العلف الحيواني بإنتاج ثلاثة أنواع من العلف، كل نوع يتكون من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصة لتصبح جاهزة للاستعمال. نرتب المعلومات الخاصة بهذه المسألة في الجدول أدناه:

المواد الغذائية التي تدخل في تركيب العلف	نوع العلف			الاحتياجات الأسبوعية /كغ
	A	B	C	
1	1	2	4	1500
2	1	2	2	300
3	4	1	1	800
4	3	2	1	280
5	1	0,75	0,5	150
تكلفة الوحدة	**15**	**25**	**30**	

ترغب الشركة في وضع نموذج رياضي للعلف الحيواني بحيث تكون التكاليف أقل ما يُمكن وتُحقق جميع الاحتياجات الأسبوعية.

المطلوب

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن؛
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

التمرين العاشر

في إحدى الاقامات الجامعية يرغب المدير في تحديد كميات المواد الغذائية في الوجبة المقدمة للطلاب، بحيث تتكون الوجبة للطالب من ثلاثة مواد غذائية: خضروات (M1)، نشويات (M2)، ولحوم (M3)، حيث تحتوي كل مادة من المواد على ثلاثة عناصر ضرورية: هي البروتين (P)، والكالسيوم(C)، والألياف (F).

الجدول التالي يُوضح الكميات الموجودة من كل عنصر في الكيلوغرام الواحد من كل مادة غذائية.

	نسبة العنصر في الوحدة الواحدة من المادة			متوسط سعر الكلغ
	بروتين (P)	كالسيوم (C)	أليف (F)	بال دج
M1	0,020	0,05	0,5	4
M2	0,030	0,05	0,04	5
M3	0,50	0,1	0,025	50

إذا فرضنا أن الوجبة التي تُعطى للطالب تتطلب الحصول على الأقل 0,25 كلغ بروتين، 0,18 كلغ كالسيوم، 0,80 كلغ ألياف.

وتُصبح مشكلة المدير هي تحديد الكميات التي يجب أن تحتويها الوجبة من المواد الثلاثة، بحيث تكون متوسط تكلفة الوجبة أقل ما يُمكن.

المطلوب

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن؛
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

التمرين الحادي عشر

شخص مريض ملزم باتباع نظام غذائي مكون من ثلاثة أنواع من الأطعمة (A)، (B)، (C)، ولاستهلاك هذه الأطعمة الثلاثة، تُقدم للمريض ثلاث مواد مغذية هامة في نظامه الغذائي وهي: الكالوريات، الفيتامينات والبروتينات. المطلوب من هذا المريض استهلاك على الأقل وحدتين من الكالوريات و4 وحدات من الفيتامينات و3 وحدات من البروتينات يومياً. الجدول التالي

يُعطينا تركيبة الأطعمة الثلاثة من الكالوريات، الفيتامينات، البروتينات، وتكلفة شراء الوحدة الواحدة من كل نوع من الأطعمة:

	A	B	C
الكالوريات	3	2	1
الفيتامينات	4	1	3
البروتينات	2	2	2
ثمن شراء الوحدة	**60**	**40**	**80**

المطلوب

- صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن؛
- كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)؛
- صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.

حلول تمارين الفصل الثاني

التمرين الأول

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن**

$$Max\ (Z) = 7000x_1 + 5000x_2$$
$$S/C \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 500 \\ 2x_1 + x_2 \leq 600 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$Max\ (Z) = 7000x_1 + 5000x_2$$
$$S/C \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 500 \\ 2x_1 + x_2 = 600 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Max\ (Z) = [7000 \quad 5000] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 600 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين الثاني

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن.**

$$Max\ (Z) = 12x_1 + 14x_2 + 16x_3$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 9 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$Max\ (Z) = 12x_1 + 14x_2 + 16x_3$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 9 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Max\ (Z) = [12 \quad 14 \quad 16] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين الثالث

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن**

$$Max\ (Z) = 10x_1 + 30x_2$$
$$S/C \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$Max\ (Z) = 10x_1 + 30x_2$$
$$S/C \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Max\ (Z) = [10 \quad 30] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين الرابع

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن**

$$Max\ (Z) = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3$$
$$S/C \begin{cases} 30x_1 + 20x_2 + 30x_3 \leq 120 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 9 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 24 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$Max\ (Z) = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3$$
$$S/C \begin{cases} 30x_1 + 20x_2 + 30x_3 = 120 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 24 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Max\ (Z) = [10 \quad 8 \quad 12] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 30 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 9 \\ 24 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين الخامس

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن**

$$Max\ (Z) = 12x_1 + 10x_2$$

$$S/C \begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 200 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \leq 150 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \leq 500 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$Max\ (Z) = 12x_1 + 10x_2$$

$$S/C \begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 200 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{6}x_2 = 150 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 500 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Max\ (Z) = \begin{bmatrix} 10 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 150 \\ 500 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين السادس

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن**

التعريف بمتغيرات القرار

ليكن:

x_1: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من العصير الأول؛

x_2: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من العصير الثاني؛

x_3: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من العصير الثالث.

$$Max\ (Z) = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$Max\ (Z) = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 50 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 30 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Max\ (Z) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين السابع

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن.**

التعريف بمتغيرات القرار

ليكن:

x_1: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج P1؛

x_2: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج P2؛

$$Max\ (Z) = 20x_1 + 25x_2$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 70 \\ 5x_1 + x_2 \leq 90 \\ x_1, x_2, \geq 0 \end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$Max\ (Z) = 20x_1 + 25x_2$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 120 \\ 4x_1 + 2x_2 = 70 \\ 5x_1 + x_2 = 90 \\ x_1, x_{2,} \geq 0 \end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Max\ (Z) = \begin{bmatrix} 20 & 25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 70 \\ 90 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين الثامن

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أكبر ربح ممكن.**

التعريف بمتغيرات القرار

ليكن:

x_1: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج **P1**؛

x_2: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من العصير **P2**؛

x_3: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من العصير **P3**.

$$Max\ (Z) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ x_1 + x_3 \leq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1, x_{2,} x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$Max\ (Z) = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 45 \\ x_1 + x_3 = 40 \\ 2x_1 + 3x_2 = 30 \\ x_1, x_{2,} x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Max\ (Z) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين التاسع

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أدنى تكلفة ممكنة.**

التعريف بمتغيرات القرار

ليكن:

x_1: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من النوع **A** من العلف خلال الفترة الإنتاجية (الأسبوعية)؛

x_2: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من العصير **B** من العلف خلال الفترة الإنتاجية (الأسبوعية)؛

x_3: تُمثل عدد الوحدات المنتجة من العصير **C** من العلف خلال الفترة الإنتاجية (الأسبوعية).

$$MIN\ (Z) = 15x_1 + 25x_2 + 30x_3$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 1500 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 300 \\ 4x_1 + x_2 + x_2 \geq 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 280 \\ x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}5x_3 \geq 150 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$MIN\ (Z) = 15x_1 + 25x_2 + 30x_3$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1500 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 300 \\ 4x_1 + x_2 + x_2 = 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 280 \\ x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}5x_3 = 150 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Min\ (Z) = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0{,}75 & 0{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 300 \\ 800 \\ 280 \\ 150 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين العاشر

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي أدنى تكلفة ممكنة.**

التعريف بمتغيرات القرار

ليكن:

x_1: تُمثل الكمية الواجب توفرها في المادة (M1)؛

x_2: تُمثل الكمية الواجب توفرها في المادة (M2)؛

x_3: تُمثل الكمية الواجب توفرها في المادة (M3).

$$MIN\ (Z) = 4x_1 + 5x_2 + 50x_3$$

$$S/C \begin{cases} 0{,}02x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}5x_3 \geq 0{,}25 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}1x_3 \geq 0{,}18 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}25x_2 \geq 0{,}8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$MIN\ (Z) = 4x_1 + 5x_2 + 50x_3$$

$$S/C \begin{cases} 0{,}02x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}5x_3 = 0{,}25 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}1x_3 = 0{,}18 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}25x_2 = 0{,}8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Min\ (Z) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}18 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

التمرين الحادي عشر

- **صياغة البرمجة الخطية والذي يُعطي التكلفة في حدها الأدنى في ظل نظام العلاج المتبع.**

التعريف بمتغيرات القرار

ليكن:

x_1: تُمثل عدد وحدات الطعام (A) الواجب شراؤه؛

x_2: تُمثل اعدد وحدات الطعام (B) الواجب شراؤه؛

x_3: تُمثل عدد وحدات الطعام (C) الواجب شراؤه.

$$MIN\ (Z) = 60x_1 + 40x_2 + 80x_3$$

$$S/C\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3\geq 2\\ 4x_1+x_2+3x_3\geq 4\\ 2x_1+2x_2+2x_2\geq 3\\ x_1,x_2,x_3\geq 0\end{cases}$$

- **كتابة البرنامج الرياضي وفق الصيغة القياسية (المعيارية)**

$$MIN\ (Z)=60x_1+40x_2+80x_3$$
$$S/C\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=2\\ 4x_1+x_2+3x_3=4\\ 2x_1+2x_2+2x_2=3\\ x_1,x_2,x_3\geq 0\end{cases}$$

- **صياغة المسألة الرياضية وفق الشكل المصفوفي.**

تُكتب دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) بالشكل الرياضي التالي:

$$Min\ (Z)=\begin{bmatrix}60 & 40 & 80\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

أما القيود الهيكلية فتكتب وفق الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\4 & 1 & 3\\2 & 2 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}$$

أما قيود عدم السلبية فتكتب وفق الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

الفصل الثالث:
طرق حل مسائـل البرمجـة الخطية

تمهيد

تناولنا في الفصل السابق كيفية بناء وتركيب نماذج البرمجة الخطية، في هذا الفصل سوف نحاول التطرق بالتفصيل إلى طرق حل نماذج البرمجة الخطية، التي تتمثل في كل من الطريقة البيانية (Méthode graphique) والطريقة المبسطة (Méthode de Simplex).

1. الطريقة البيانية

تُعد هذه الطريقة من أسهل الطرائق المستخدمة لحل مسائل البرمجة الخطية، وتمتاز هذه الطريقة بكونها تُعالج المشكلات البسيطة، أي في حالة وجود متغيرين فقط، وتعتمد هذه الطريقة على الرسم البياني لمتغيرات المشكلة في إطار الإحداثيات الأفقية والعمودية لتحديد منطقة الحلول الممكنة (Zone des solutions possibles) وهي منطقة مغلقة بكافة القيود المشكلة للمسألة، ومن بعدها يتم تحديد النقاط المتطرفة (وهي النقاط التي تكون على حدود مسألة الحل المقبول) التي تُعظم أو تقلل دالة الهدف، ويُمكن توضيح الخطوات الأساسية لهذه الطريقة كما يلي:

- صياغة المشكلة بصيغة نموذج رياضي بالنسبة لدالة الهدف والقيود الهيكلية؛
- تحويل متباينات النموذج الرياضي إلى معادلات؛
- في معلم متعامد ومتجانس حيث محور الفواصل يمثل المتغير (x_1) ومحور التراتيب يُمثل المتغير (x_2) يتم رسم مستقيمات المعادلات الرياضية، ويكفي ذلك لرسم هذه المستقيمات تحديد الإحداثيات وهي نقطتين تربطان كل مستقيم، حيث نُعدم المتغير (x_1)) لنتحصل على قيمة (x_2)، ثم نعدم المتغير (x_2) لنحصل على قيمة (x_1)؛
- تحديد نقاط رؤوس المضلع الذي يُمثل منطقة الحلول الممكنة؛
- تعويض إحداثيات نقاط رؤوس المضلع الممثل لمنطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف، ومن ثم يتم تحديد النقطة المثلى التي تُمثل الحل الأمثل، وهي النقطة أو الإحداثية التي تُعطي أعظم قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم، وأدنى قيمة لدالة الهدف في حالة التدنية.

مثال (1.3)

أوجد قيم x_1، x_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف أكبر ما يُمكن للبرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\boldsymbol{Max(Z) = 4x_1 + 3x_2}$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- ✓ على معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

$5x_1 + 3x_2 = 30$		
x_1	10,50	0
x_2	0	7

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:

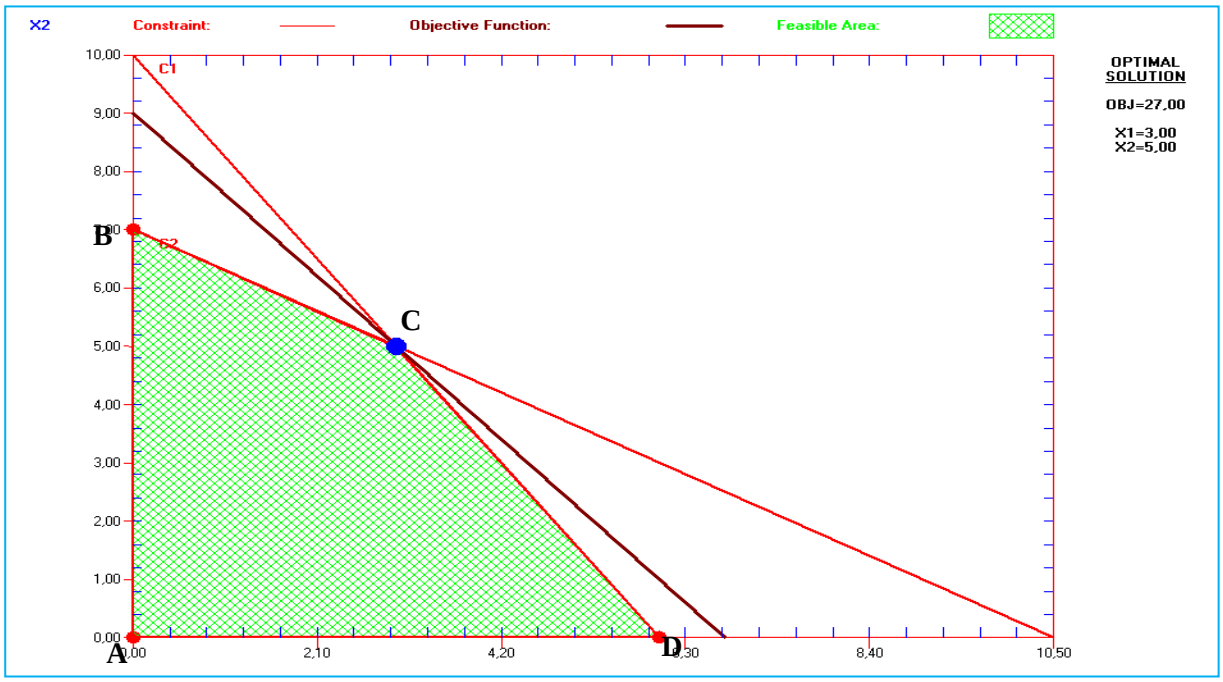
$(x_1; x_2) = (10,5\ ;\ 7)$

$2x_1 + 3x_2 = 21$		
x_1	10,50	0
x_2	0	7

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:

$(x_1; x_2) = (10,5\ ;\ 7)$

الشكل (1.3): منطقة الحلول الممكنة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

منطقة الحلول الممكنة هي المضلع الملون باللون الأخضر **[ABCD]** ونقطة الحل الأمثل هي النقطة التي تكون عندها دالة الهدف أكبر مما يُمكن.

- عند النقطة A ذات الإحداثية $(0\ ;\ 0)$ تكون قيمة دالة الهدف Z كما يلي:

$$A(x_1; x_2) = A(0; 0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 4(0) + 3(0) = 0$$

- عند النقطة B ذات الإحداثية $(0\ ;\ 7)$ تكون قيمة دالة الهدف Z كما يلي:

$$B(x_1; x_2) = B(0; 7) \Longrightarrow Max\ (Z) = 4(0) + 3(7) = 21$$

- عند النقطة D ذات الإحداثية $(6\ ;\ 0)$ تكون قيمة دالة الهدف Z كما يلي:

$$D(x_1; x_2) = D(6; 0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 4(6) + 3(0) = 24$$

- عند النقطة C ذات الإحداثية $C(x_1; x_2) = (?\ ;\ ?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \ldots\ldots (1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$3x_1 = 9 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

إذن:

$$C(x_1; x_2) = (3; 5) \Longrightarrow Max\ (Z) = 4(3) + 3(5) = 27$$

نلاحظ أن اكبر قيمة لدالة الهدف Z هي عند النقطة $C(x_1; x_2) = (3; 5)$ حيث تحقق أعظم ربح ممكن. ومن الحل المثل للقيمتين: x_1، x_2 هما:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

◆ مثال (2.3)

اوجد الحل الأمثل للبرنامج الرياضي التالي:

$$Min(Z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \geq 90 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 48 \\ 2x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

◆ الحل

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 90 \\ 4x_1 + 3x_2 = 48 \\ 2x_1 = 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ على معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

$5x_1 + 10x_2 = 90$		
$\mathbf{x_1}$	18	0
$\mathbf{x_2}$	0	9

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:

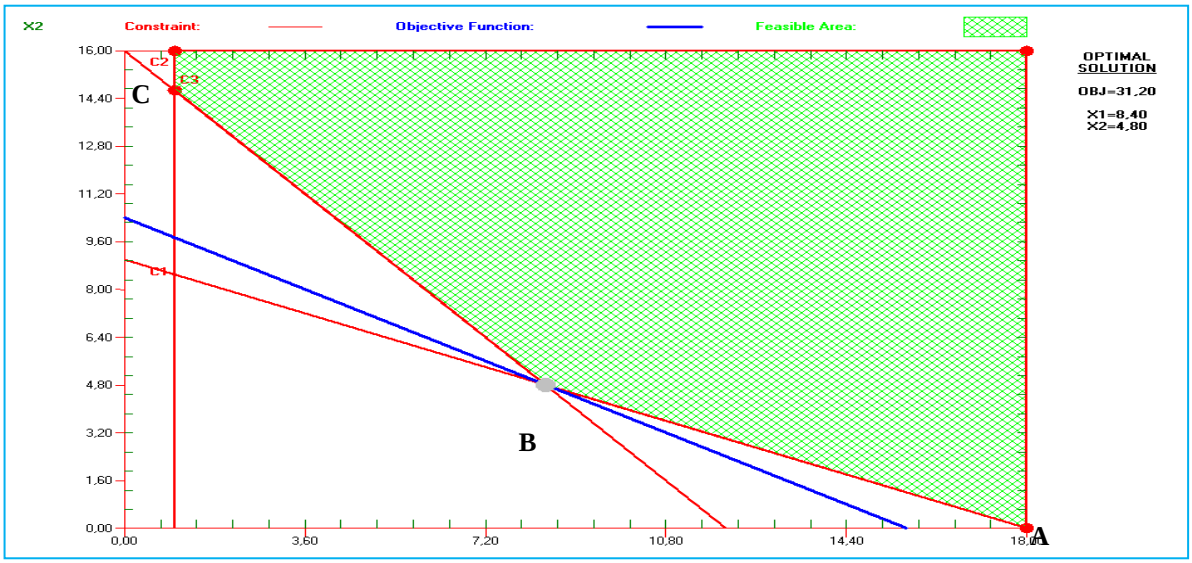
$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{18}; \mathbf{9})$

$4x_1 + 3x_2 = 48$		
$\mathbf{x_1}$	12	0
$\mathbf{x_2}$	0	16

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:

$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{12}; \mathbf{16})$

الشكل (2.3): منطقة الحلول الممكنة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

منطقة الحلول الممكنة هي المضلع الملون باللون الأخضر **[ABC]** ونقطة الحل الأمثل هي النقطة التي تكون عندها دالة الهدف أصغر مما يُمكن.

- عند النقطة A ذات الإحداثية $(0\ ;\ 18)$ تكون قيمة دالة الهدف كما يلي:

$$A(x_1; x_2) = A(18; 0) \Longrightarrow Min\ (Z) = 2(18) + 3(0) = \mathbf{36}$$

- عند النقطة B ذات الإحداثية $B(x_1; x_2) = (?\ ;?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 = 90 \dots\dots (1) \\ 4x_1 + 3x_2 = 48 \dots\dots (2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) في العدد 4 والمعادلة (2) في العدد 4 نجد:

$$\begin{cases} 20x_1 + 40x_2 = 360 \dots\dots (3) \\ 20x_1 + 15x_2 = 240 \dots\dots (4) \end{cases}$$

بطرح المعادلتين (3) و(4) نجد:

$$25x_2 = 120 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4{,}8 \\ x_2 = 8{,}4 \end{cases}$$

$$B(x_1; x_2) = B(8{,}4\ ;\ 4{,}8) \Longrightarrow Min\ (Z) = 2(8{,}4) + 3(4{,}8) = \mathbf{31{,}2}$$

- عند النقطة C ذات الإحداثية $C(x_1; x_2) = (?\ ;?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 48 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 14{,}67 \end{cases}$$

$$C(x_1; x_2) = C(1\ ;\ 14{,}67) \Longrightarrow Min\ (Z) = 2(1) + 3(14{,}67) = \mathbf{46}$$

نلاحظ أن أدنى قيمة لدالة الهدف Z هي عند النقطة $B(x_1; x_2) = (8{,}4\ ;\ 4{,}8)$ حيث تحقق أدنى تكلفة ممكن. ومنه الحل المثل للقيمتين: x_1، x_2 هما:

$$\begin{cases} x_1 = 8{,}4 \\ x_2 = 4{,}8 \end{cases}$$

مثال (3.3)

بواسطة الطريقة البيانية حل البرنامج الرياضي التالي:

$$Max(Z) = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 14 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 12 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ على معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

$x_1 + x_2 = 14$		
x_1	14	0
x_2	0	14

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:

$(x_1; x_2) = (14; 14)$

$-2x_1 + 3x_2 = 12$		
x_1	-6	0
x_2	0	4

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:

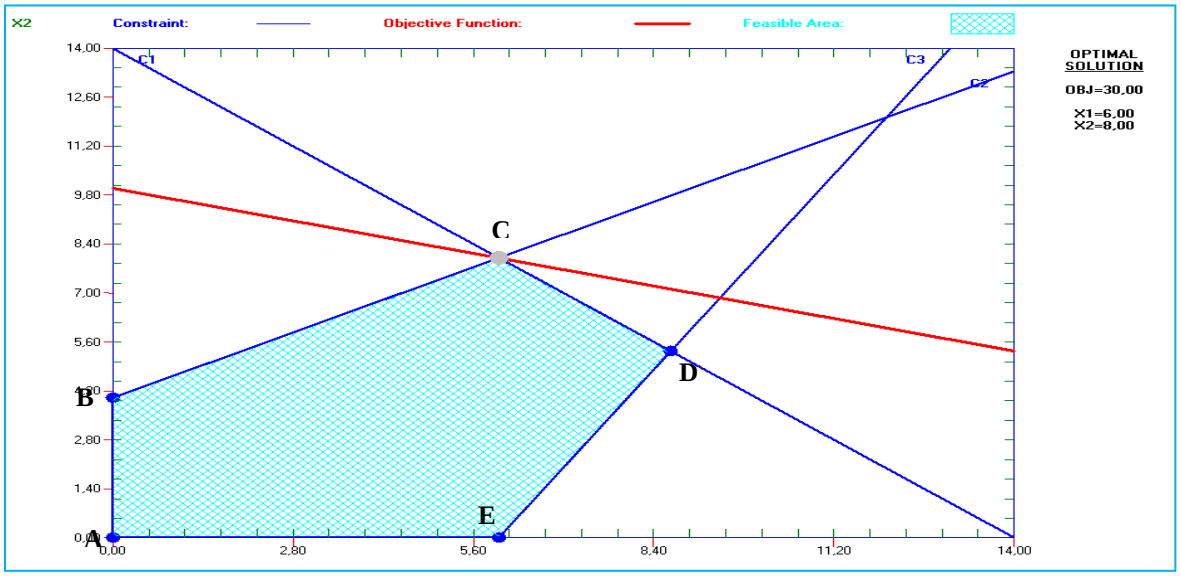
$(x_1; x_2) = (-6; 4)$

$2x_1 - x_2 = 12$		
x_1	6	0
x_2	0	-12

النقطتين التي تربط المستقيم الثالث هما:

$(x_1; x_2) = (6; -12)$

الشكل (3.3): منطقة الحلول الممكنة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

منطقة الحلول الممكنة هي المضلع الملون باللون الأخضر **[ABCDE]** ونقطة الحل الأمثل هي النقطة التي تكون عندها دالة الهدف أكبر مما يُمكن.

- عند النقطة A ذات الإحداثية $(0\ ;\ 0)$ تكون قيمة دالة الهدف Z كما يلي:

$$A(x_1; x_2) = A(0; 0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 1(0) + 3(0) = 0$$

- عند النقطة B ذات الإحداثية $(0\ ;\ 7)$ تكون قيمة دالة الهدف Z كما يلي:

$$B(x_1; x_2) = B(0; 4) \Longrightarrow Max\ (Z) = 1(0) + 3(4) = 12$$

- عند النقطة C ذات الإحداثية $C(x_1; x_2) = (?; ?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 14 \dots\dots (1) \\ -2x_1 + 3x_2 = 12 \dots\dots (2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) في العدد 2 نجد

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 28 \dots\dots (3) \\ -2x_1 + 3x_2 = 12 \dots\dots (4) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (3) و(4) نجد:

$$5x_2 = 40 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{x_2 = 8} \\ \mathbf{x_1 = 6} \end{cases}$$

$$C(x_1; x_2) = C(6; 8) \Longrightarrow Max\ (Z) = 1(6) + 3(8) = \mathbf{30}$$

- عند النقطة D ذات الإحداثية $D(x_1; x_2) = (?; ?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 14 \dots \dots (4) \\ 2x_1 - x_2 = 12 \dots \dots (5) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (4) و (5) نجد:

$$3x_1 = 26 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{26}{3} = 8{,}67 \\ x_1 = \frac{16}{3} = 5{,}33 \end{cases}$$

$$D(x_1; x_2) = D(8{,}67; 5{,}33) \Longrightarrow \text{Max } (Z) = 1(8{,}67) + 3(5{,}33) = \mathbf{24{,}66}$$

نلاحظ أن اكبر قيمة لدالة الهدف Z هي عند النقطة $C(x_1; x_2) = (6; 8)$ حيث تحقق أعظم ربح ممكن. ومن الحل المثل للقيمتين: x_1، x_2 هما:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 6} \\ \boldsymbol{x_2 = 8} \end{cases}$$

2. الحالات الخاصة

تُجد أربع حالات خاصة عند حل مشاكل البرمجة الخطية بواسطة الطريقة البيانية، وتنشأ هذه الحالات نتيجة خلل في بناء النموذج الرياضي، أو نتيجة إجراءات الحل بواسطة الطريقة البيانية، وسوف نُوجز هذه الحالات كما يلي:

- تعدد الحلول المثلى؛
- حالة الانحلال؛
- عدم وجود حلول ممكنة؛
- الحل غير محدد.

ويُمكن توضيح هذه الحالات كما يلي:

1.2. حالة تعدد الحلول المثلى

في بعض الحالات يُمكن الحصول على أكثر من حل أمثل، أي أكثر من حل يُعطي نفس القيمة المثلى لدالة الهدف، وتتحقق هذه الحالة عندما يكون الخط المستقيم الممثل لدالة الهدف موازي للخط المستقيم الممثل لأحد القيود المحايدة، ويُقصد بالقيد المحايد، القيد المحدد لمنطقة الحلول الممكنة.

مثال (4.3)

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = 8x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب

أوجد الحل الأمثل بواسطة الطريقة البيانية

الحل

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ على معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

$4x_1 + 2x_2 = 8$		
$\mathbf{x_1}$	2	0
$\mathbf{x_2}$	0	4

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:

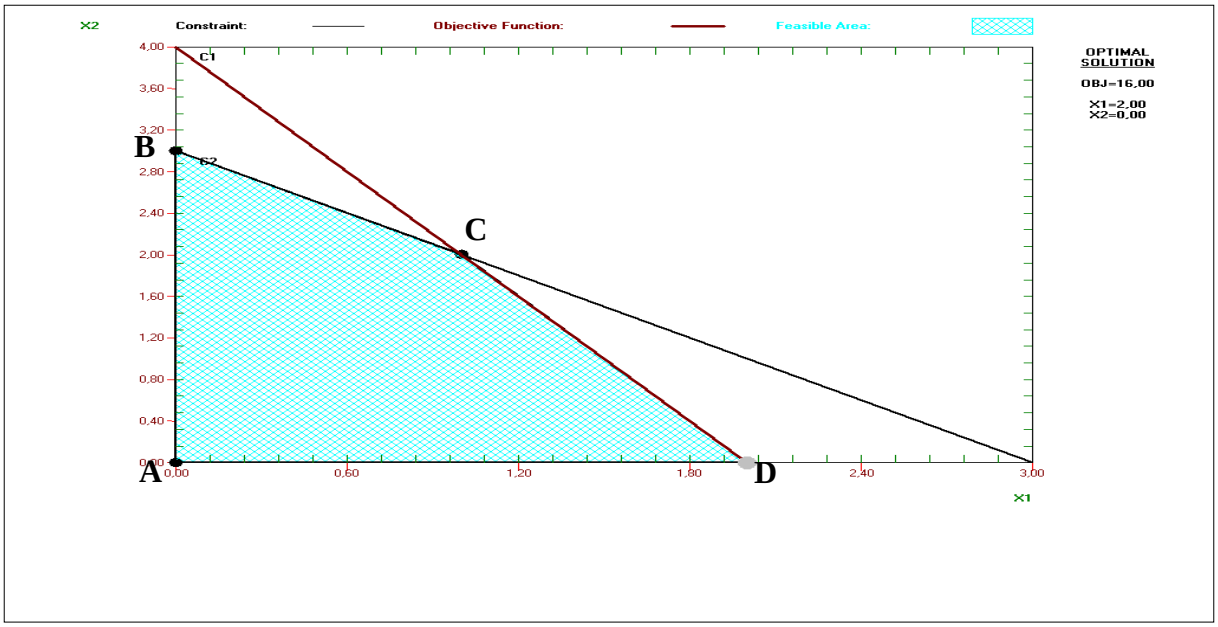
$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{2}\,; \mathbf{4})$

$2x_1 + 2x_2 = 6$		
$\mathbf{x_1}$	3	0
$\mathbf{x_2}$	0	3

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:

$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{3}\,; \mathbf{3})$

الشكل (4.3): منطقة الحلول الممكنة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

منطقة الحلول الممكنة هي المضلع الملون باللون الأخضر **[ABCD]** ونقطة الحل الأمثل هي النقطة التي تكون عندها دالة الهدف أكبر مما يُمكن.

- عند النقطة A ذات الإحداثية $(0\,;\,0)$ تكون قيمة دالة الهدف Z كما يلي:

$$A(x_1; x_2) = A(0; 0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 8(0) + 4(0) = 0$$

- عند النقطة B ذات الإحداثية $(0\,;\,3)$ تكون قيمة دالة الهدف Z كما يلي:

$$B(x_1; x_2) = B(0; 3) \Longrightarrow Max\ (Z) = 8(0) + 4(3) = 12$$

- عند النقطة C ذات الإحداثية $C(x_1; x_2) = (?\,;?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 8 \ldots\ldots (1) \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بطرح المعادلتين (1) من (2) نجد:

$$2x_1 = 2 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{x_1 = 1} \\ \mathbf{x_2 = 2} \end{cases}$$

$$C(x_1; x_2) = C(1; 2) \Longrightarrow Max\ (Z) = 8(1) + 4(2) = \mathbf{16}$$

- عند النقطة D ذات الإحداثية $(2\ ;\ 0)$ تكون قيمة دالة الهدف Z كما يلي:

$$D(x_1; x_2) = B(2; 0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 8(2) + 4(0) = \mathbf{16}$$

نلاحظ أن النقطتين C و D تعطيان نفس قيمة لدالة الهدف Z حيث تحققان أعظم ربح ممكن.

2.2. حالة الانحلال

يتم تشخيص حالة الانحلال عندما يشترك أكثر من قيد في نقطة الحل الأمثل، ويكون قيد واحد أو أكثر (فائض)، والقيد الفائض هو القيد الذي يُمكن الاستغناء عنه دون أن يُؤثر على نقطة الحل الأمثل.

مثال (5.3)

ليكن البرنامج الخطي الرياضي التالي:

$$Max(Z) = 5x_1 + 9x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب

أوجد الحل الأمثل بواسطة الطريقة البيانية

الحل

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ على معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

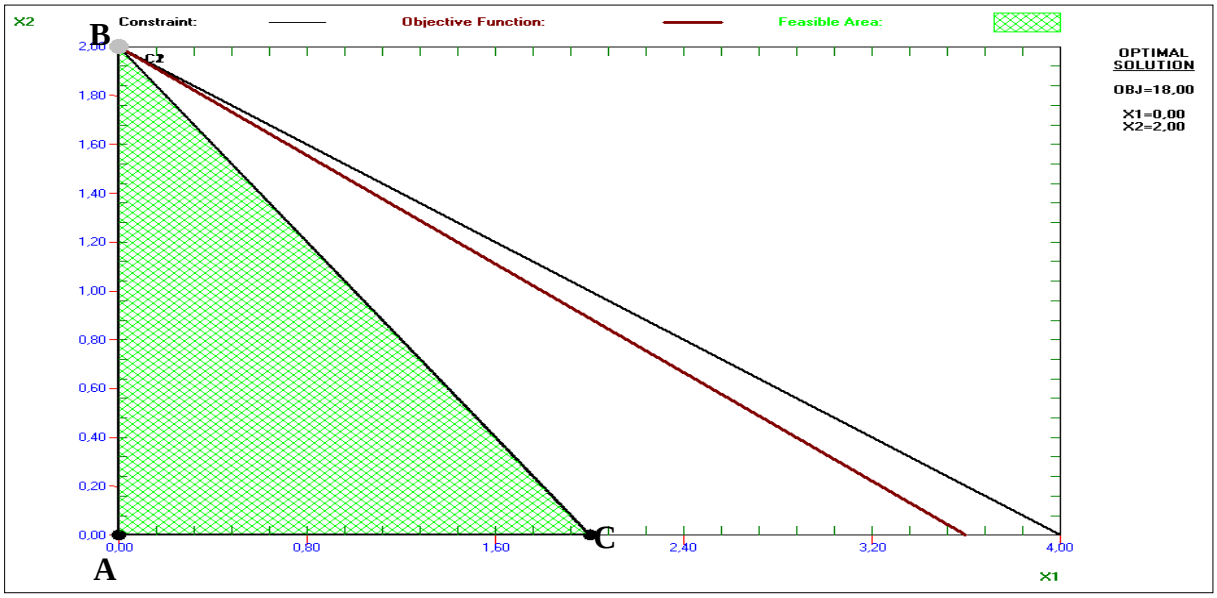
$x_1 + 2x_2 = 4$		
$\mathbf{x_1}$	4	0
$\mathbf{x_2}$	0	2

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:
$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{4}\ ;\ \mathbf{2})$

$x_1 + x_2 = 2$		
$\mathbf{x_1}$	2	0
$\mathbf{x_2}$	0	2

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:
$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{2}\ ;\ \mathbf{2})$

الشكل (5.3): منطقة الحلول الممكنة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

منطقة الحلول الممكنة هي المضلع الملون باللون الأخضر [ABC] ونقطة الحل الأمثل هي النقطة التي تكون عندها دالة الهدف أكبر مما يُمكن.

- عند النقطة A ذات الإحداثية $(0\ ;\ 0)$ تكون قيمة دالة الهدف Z كما يلي:

$$A(x_1;x_2) = A(0;0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 5(0) + 9(0) = 0$$

- عند النقطة C ذات الإحداثية $(2\ ;\ 0)$ تكون قيمة دالة الهدف Z كما يلي:

$$C(x_1;x_2) = C(2;0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 5(2) + 9(0) = 10$$

- عند النقطة C ذات الإحداثية $C(x_1;x_2) = (?\,;?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \dots\dots (1) \\ x_1 + x_2 = 2 \dots\dots (2) \end{cases}$$

بطرح المعادلتين (1) من (2) نجد:

$$x_2 = 2 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{x_1 = 0} \\ \mathbf{x_2 = 2} \end{cases}$$

$$C(x_1;x_2) = C(0;2) \Longrightarrow Max\ (Z) = 5(0) + 9(2) = \mathbf{18}$$

إذن النقطة C هي النقطة التي تُحقق الحل الأمثل وتُعطي أعظم قيمة لدالة الهدف، كما يتبين من الشكل أن بقاء القيد الأول فقط أو الثاني فقط سيُحقق لنا نفس الحل الأمثل، أي أن أحد القيدين يُعتبر قيد فائض.

3.2. حالة الحلول غير محددة

وهي الحالة التي تكون فيها منطقة الحلول الممكنة (بطريقة الرسم البياني) غير محدودة، وتحدث هذه الحالة عندما تكون معاملات أحد المتغيرات في جميع القيود سالبة أو معدومة، وفي هذه الحالة قد يكون بالإمكان الوصول إلى الحل الأمثل، أو يتعذر ذلك.

مثال (6.3)

ليكن البرنامج الخطي الرياضي التالي:

$$Max(Z) = 4x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \leq 60 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 20 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب

أوجد الحل الأمثل بواسطة الطريقة البيانية

- **الحل**

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 60 \\ 2x_1 - 2x_2 = 20 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ على معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

$3x_1 - 3x_2 = 60$		
$\mathbf{x_1}$	-20	0
$\mathbf{x_2}$	0	-20

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:

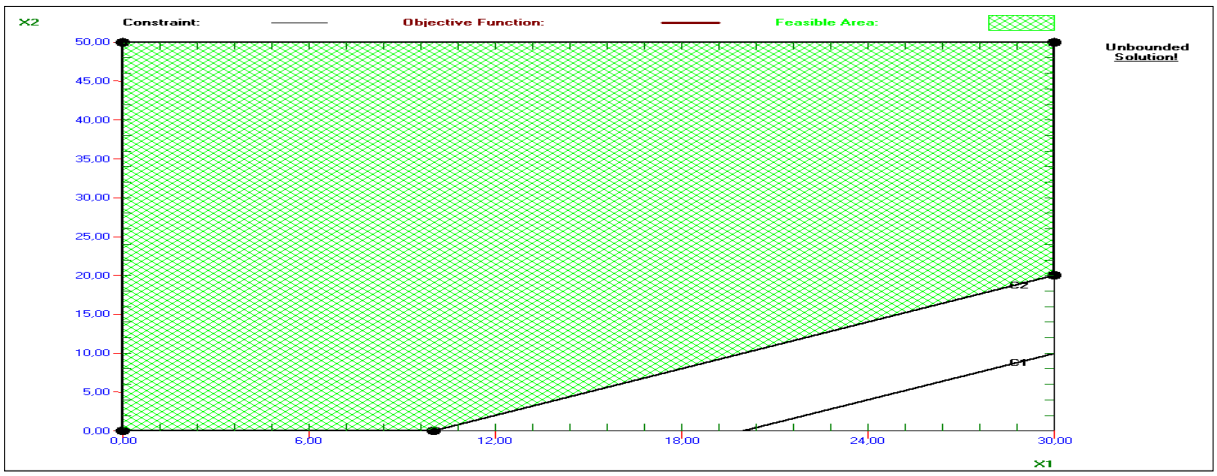
$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (-\mathbf{20}; -\mathbf{20})$

$2x_1 - 2x_2 = 20$		
$\mathbf{x_1}$	-10	0
$\mathbf{x_2}$	0	-10

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:

$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (-\mathbf{10}; -\mathbf{10})$

الشكل (6.3): منطقة الحلول غير المحدة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

نُلاحظ من خلال الرسم البياني أن منطقة الحلول غير محدودة، أي لا يُوجد لها أقصى يحدد الحل الأمثل، لأن معاملات القيدين سالبة، أي أن قيمة المتغير وكذلك دالة الهدف ستزداد بشكل غير محدد، ودون الخروج من منطقة الحلو الممكنة.

3.4. حالة عدم وجود حلول ممكنة

في هذه الحالة يتعذر تحديد نقطة تُحقق جميع قيود المشكلة، لأنه لا تُوجد منطقة حلول ممكنة تشترك فيها جميع قيود المشكلة.

- **مثال (7.3)**

ليكن البرنامج الخطي الرياضي التالي:

$$Max(Z) = 2x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 12 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب

أوجد الحل الأمثل بواسطة الطريقة البيانية

- **الحل**

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 = 12 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ على معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

$2x_1 - x_2 = 2$		
$\mathbf{x_1}$	1	0
$\mathbf{x_2}$	0	-2

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:

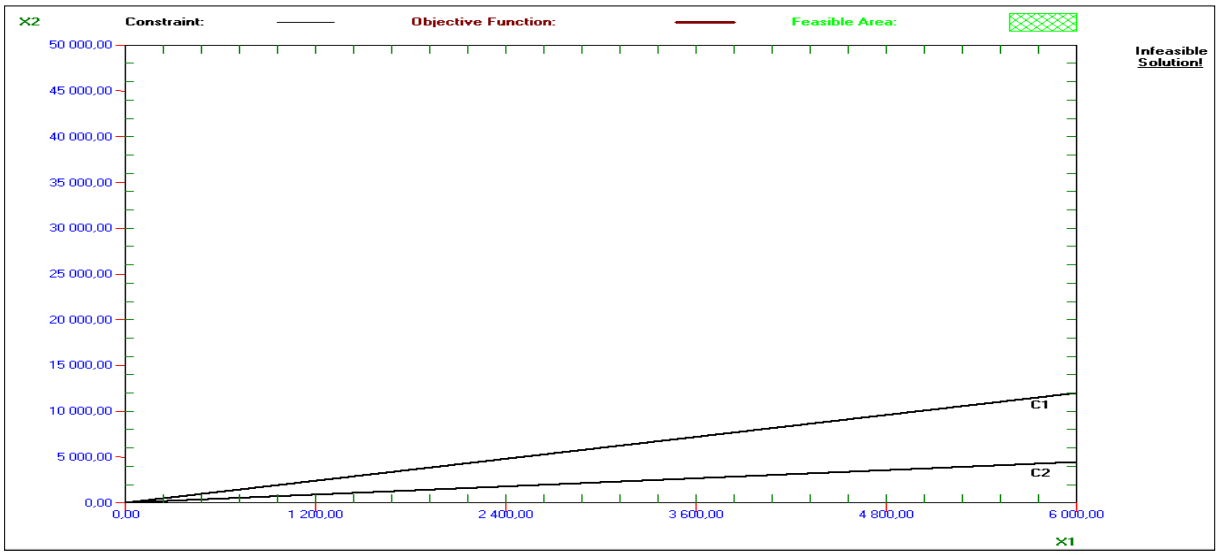
$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{1}; \mathbf{-2})$

$3x_1 - 4x_2 = 12$		
$\mathbf{x_1}$	4	0
$\mathbf{x_2}$	0	-3

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:

$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{4}; \mathbf{-3})$

الشكل (7.3): عدم وجود حلول ممكنة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

من خلال الشكل البياني أعلاه يتضح عدم وجود منطقة حلول ممكنة، وبالتالي يتعذر تحديد حل ممكن وأمثل للمشكلة.

3. طريقة SIMPLEXE

تعتبر خوارزمية السمبلكس من أهم نماذج البرمجة الخطية والأكثر استخداماً حيث تم اكتشافها من طرف العالم الرياضي الأمريكي DANTZIG الذي قام بتطويرها في عام 1949. وتُعتبر هذه الطريقة كخطوة متقدمة في حل المشاكل التي تناولتها البرمجة الخطية، وجاءت هذه الطريقة نتيجة عدم قدرة الطريقة البيانية في حل النماذج الرياضية التي يكون فيها عدد المتغيرات أكثر من إثنين. وتتميز طريقة السمبلكس بكونها أنها تتكون من مراحل متكررة حيث كل مرحلة من تلك المراحل تُمثل حلاً قائماً بذاته، وكل حل هو أفضل من سابقه وهكذا حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل. كما تتسم هذه الطريقة بأن كل حل من تلك الحلول يُبين قيمة دالة الهدف المترتبة عن ذلك الحل.

4. خطوات طريقة SIMPLEXE

لبلوغ الحل النهائي والأمثل تمر طريقة السمبلكس بعدة خطوات:

أولاً: تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة النموذجية

تختلف عملية تحويل النموذج الرياضي من صيغته القانونية إلى الصيغة النموذجية حسب دالة الهدف (تعظيم أو تدنية) وذلك بتحويل متباينات قيود المسألة الرياضية إلى معادلات مع إحداث بعض التعديلات في دالة الهدف والقيود الهيكلية كما يلي:

❶ حالة التعظيم (MAX)

يتم تعديل القيود الهيكلية ودالة الهدف كما يلي:

- لتحويل المتباينة من النوع أصغر أو تُساوي ($\leq$) إلى معادلة (=) يجب إضافة متغير يسمى "**المتغير العاطل**" أو "**المتغير الراكد**" أو "**متغير الفوارق**" أو "**متغير الفجوة**" إلى الطرف الأيسر من القيد، ونرمز له بالرمز ($\boldsymbol{S_i}$)، يجب أن تكون قيمة هذا المتغير مساوية للصفر أو أكبر منه (شرط عدم السلبية)، كما يتم إضافة نفس المتغير إلى دالة الهدف بمعامل صفر ($\mathbf{0}$)لأنه لا يحقق أي ربح بالنسبة للمؤسسة؛
- لتحويل المتباينة من النوع أكبر أو يُساوي ($\geq$) إلى معادلة (=) يجب طرح متغير يُسمى "**المتغير الفائض**" أو "**متغير الزيادة**" من الطرف الأيسر من القيد، ونرمز له بالرمز ($\boldsymbol{S_i}$)، وهذا المتغير يجب أن يكون موجب كما يتم يظهر متغير الفجوة في دالة الهدف بمعامل صفر (0) لأنه لا يحقق أي ربح بالنسبة للمؤسسة، كما يتم إضافة "**متغير وهمي**" أو "**اصطناعي**" يُرمز له بالرمز ($\boldsymbol{A_i}$)، ويظهر هذا المتغير الاصطناعي بمعامل ($\mathbf{-M}$) في دالة الهدف.
- في حالة القيد من نوع المساواة (=) يتم إضافة متغير وهمي أو اصطناعي في الطرف الأيسر من المعادلة ويُرمز له بالرمز ($\boldsymbol{A_i}$)، وهذا الأخير يظهر في دالة الهدف بمعامل ($\mathbf{-M}$).

♦ مثال (8.3)

حدد الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي الآتي:

$$\mathbf{Max(Z) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3}$$
$$S.C\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 25 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

♦ الحل

$$\mathrm{Max(Z)} = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + \mathbf{0}\boldsymbol{S_1} + \mathbf{0}\boldsymbol{S_2} - \boldsymbol{MA_1} - \boldsymbol{MA_2}$$
$$S.C\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{A_1} = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + \boldsymbol{A_2} = 25 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + \boldsymbol{S_2} = 40 \\ x_1; x_2; x_3; S_1; S_2; A_1; A_2 \geq 0 \end{cases}$$

❷ حالة التدنية (Min)

يتم تعديل القيود الهيكلية ودالة الهدف كما يلي:

- لتحويل المتباينة من النوع أصغر أو تُساوي ($\leq$) إلى معادلة (=) يجب إضافة متغير يسمى "**المتغير العاطل**" أو "**المتغير الراكد**" أو "**متغير الفوارق**" أو "**متغير الفجوة**" إلى الطرف الأيسر من القيد، ونرمز له بالرمز (S_i)، يجب أن تكون قيمة هذا المتغير مساوية للصفر أو أكبر منه (شرط عدم السلبية)، كما يتم إضافة نفس المتغير إلى دالة الهدف بمعامل صفر (0) لأنه لا يُسبب أي تكلفة بالنسبة للمؤسسة؛
- لتحويل المتباينة من النوع أكبر أو يُساوي ($\geq$) إلى معادلة (=) يجب طرح متغير يُسمى "**المتغير الفائض**" أو "**متغير الزيادة**" من الطرف الأيسر من القيد، ونرمز له بالرمز (S_i)، وهذا المتغير يجب أن يكون موجب كما يتم يظهر متغير الفجوة في دالة الهدف بمعامل صفر (0) لأنه لا يُسبب أي تكلفة بالنسبة للمؤسسة، كما يتم إضافة "**متغير وهمي**" أو "**اصطناعي**" يُرمز له بالرمز (A_i)، ويظهر هذا المتغير الاصطناعي بمعامل ($+M$) في دالة الهدف.
- في حالة القيد من نوع المساواة (=) يتم إضافة متغير وهمي أو اصطناعي في الطرف الأيسر من المعادلة ويُرمز له بالرمز (A_i)، وهذا الأخير يظهر في دالة الهدف بمعامل ($+M$).

◆ مثال (9.3)

حدد الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي الآتي:

$$\mathbf{Min(Z) = 2x_1 + 4x_2}$$

$$S.C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 100 \\ x_1 + 3x_2 \geq 80 \\ 2x_1 - x_2 \leq 75 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

◆ الحل

$$\mathbf{Max(Z) = 2x_1 + 4x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2}$$

$$S.C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{A_1} = 100 \\ x_1 + 3x_2 - \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{A_2} = 80 \\ 2x_1 - x_2 + \boldsymbol{S_2} = 75 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

جدول (1.3): ملخص تعديل القيود ودالة الهدف

نوع القيـــد	التعديل في القيـــود	التعديل في دالة الهدف Max (Z)	التعديل في دالة الهدف Min (Z)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq b_i$	$+1S_i$	$+0S_i$	$+0S_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \geq b_i$	$-S_i + A_i$	$+0S_i - MA_i$	$+0S_i + MA_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = b_i$	$+A_i$	$-MA_i$	$+MA_i$

المصدر: من إعداد الباحث

ثانياً: كتابة البرنامج الرياضي النموذجي في شكل مصفوفة كما يلي:

يُمكن كتابة البرنامج الرياضي النموذجي في الشكل المصفوفي وفق الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{AX = B}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S \\ \vdots \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ثالثاً: نقل المصفوفة في جدول السمبلكس الأولي ($\mathbf{T_0}$)

في هذه الخطوة يتم إنشاء جدول السمبلكس الأولي، حيث يتم تقسيمه إلى أعمدة وأسطر. نقوم بقراءة الجدول من اليسار إلى اليمين كما يلي:

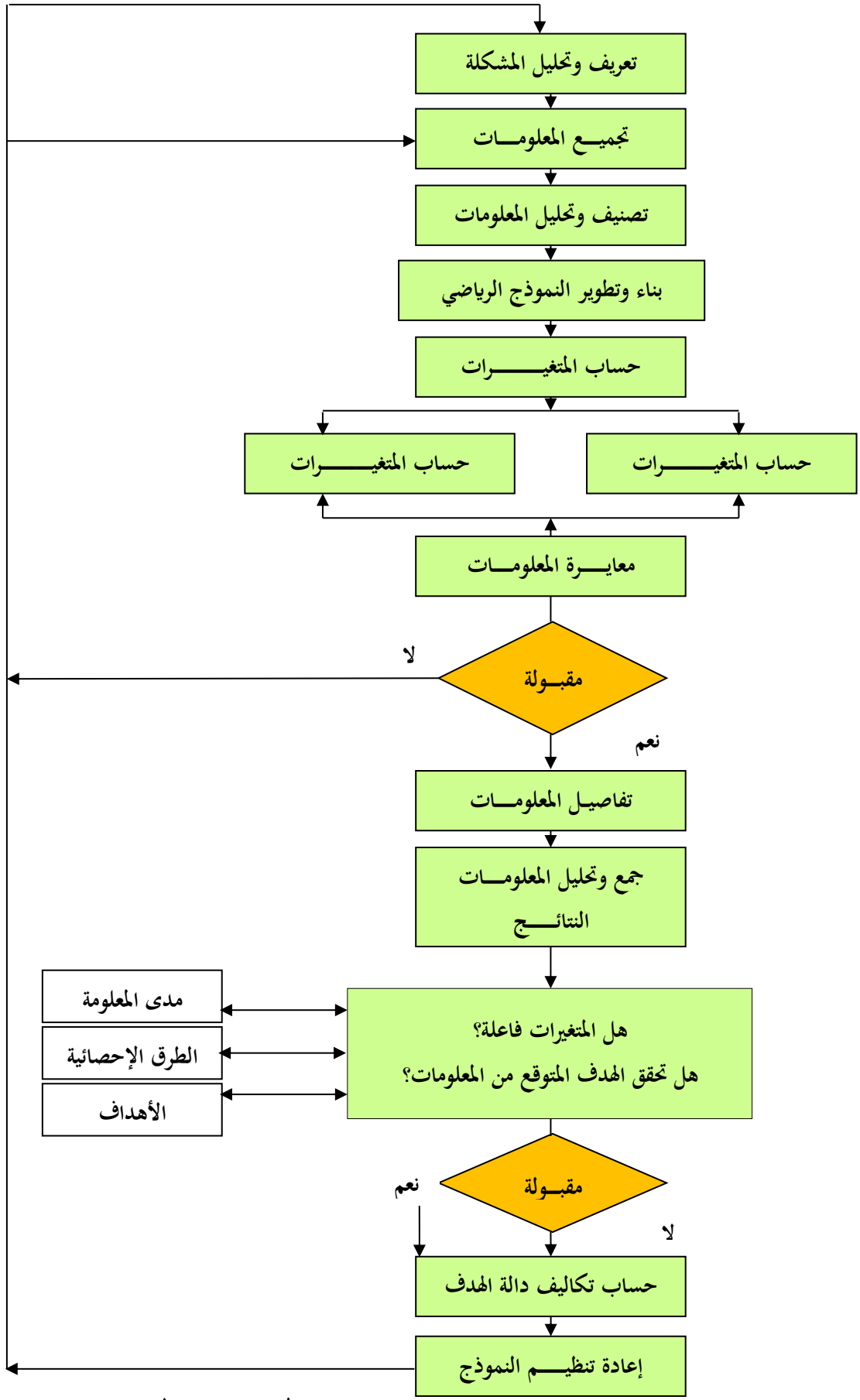
- **العمود الأول**: يرمز له بالرمز ($\boldsymbol{CB}$) يُسمى عمود معاملات المتغيرات الأساسية (متغيرات الفجوة والاصطناعية) والتي تكون معاملاتها في دالة الهدف إما الصفر (0) أو (M) حسب نوع دالة الهدف.
- **العمود الثاني**: يُرمز له بالرمز ($\boldsymbol{XB}$) ويُسمى بعمود المتغيرات الأساسية وهي المتغيرات التي تكون أعمدتها في المصفوفة أحادية.
- **العمود الأخير**: يرمز له بالرمز ($\mathbf{B_i}$) ويُسمى بعمود الكميات (الكميات المتاحة) وهي القيم الموجودة في الطرف الأيمن من المتباينات أو المعادلات.
- **السطر الأول**: يُرمز له بالرمز ($\mathbf{C_j}$) ويُسمى بسطر معاملات متغيرات دالة الهدف.
- **السطر ما قبل الأخير**: يُرمز له بالرمز ($\mathbf{Z_j}$) ويُسمى بسطر

جدول (2.3): جدول السمبلكس للحل القاعدي (الأولي)

T_0	C_j	C_1	C_2	.....	C_n	0	0	.....	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	.....	x_n	S_1	S_2	.....	S_m	
0	S_1	a_{11}	a_{12}	.....	x_{1n}			.....		b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	.....	x_{2n}			.....		b_2
⋮	⋮			.....				.....		⋮
⋮	⋮			.....				.....		⋮
⋮	⋮									⋮
0	S_m			.....				.....		b_m
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		0	0	.....				.....		$Z = 0$
$\Delta Z = C_j - Z_j$		C_1	C_2	.....	C_n	0	0	.....	0	

المصدر: من إعداد الباحث

الشكل (8.3): خطوات بناء وحل نموذج رياضي بواسطة خوارزمية Simplex



المصدر: من إعداد الباحث

مثال (6.3)

بواسطة طريقة السمبلكس أوجد الحل الأمثل للبرنامج الرياضي الآتي:

$$Max(Z) = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$
$$S.C\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل

الخطوة الأولى: تحويل الصيغة المختلطة للبرنامج الخطي إلى الصيغة المعيارية (القياسية):

تحويل البرنامج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة النموذجية أو المعيارية من خلال إجراء تعديلات على القيود الهيكلية ودالة الهدف.

$$\boldsymbol{Max(Z)} = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{0S_2} + \boldsymbol{0S_3}$$
$$S.C\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + \boldsymbol{S_1} = 6 \\ x_1 + x_2 + \boldsymbol{S_2} = 24 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \boldsymbol{S_3} = 9 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: كتابة الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي على شكل مصفوفة كما يلي:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

- **دالة الهدف (الدالة الاقتصادية)**

$$Max(Z) = [3 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

- **القيود الهيكلية**

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 24 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- **قيد عدم السلبية**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من خلال المصفوفة نلاحظ أن المتغيرات القاعدية (متغيرات الأساس) التي تدخل في مزيج الحل القاعدي لجدول السمبلكس الأولي هي $\boldsymbol{S_1}$، $\boldsymbol{S_2}$، $\boldsymbol{S_3}$ لأن تشكل أعمدة الوحدة.

الخطوة الثالثة: إعداد جدول السمبلكس الأولي

T_0	C_j	2	1	3	0	0	0	B_i	$\frac{B_i}{x_3}$
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	-1	2	1	1	0	0	6	2
0	S_2	1	1	0	0	1	0	24	/
0	S_3	1	-1	1	0	0	1	9	9
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		0	0	0	0	0	0	Z= 0	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		2	1	3	0	0	0		

⬆

الخطوة الرابعة: اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أصغر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة موجبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

لدينا في سطر التقييم توجد ثلاث قيم موجبة، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم آو قيم (ΔZ).

$$Max\ (\Delta Z) = Max\ (2\ ;\ 1\ ;\ 3) = 3$$

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (x_3). وبالتالي يتحدد لدينا **العمود المحوري** أو ما يُطلق عليه بـ **عمود الارتكاز**.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر او قيم العمود المحوري لنتحصل على **السطر المحوري** أو **سطر الارتكاز** وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود ($\frac{B_i}{a_{ijk}}$) **Min**، **حيث** K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\mathbf{Min}\ (\frac{B_i}{a_{ijk}}) = \mathrm{Min}\ (2\ ;\ 9) = \mathbf{2}$$

- أصغر قيمة هي (2) وهي تقابل المتغير S_1 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير S_1، ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الأول:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_1	C_j	2	1	3	0	0	0	B_i	$\frac{B_i}{a_{ijk}}$
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
3	x_3	-1	2	1	1	0	0	6	/
0	S_2	1	1	0	0	1	0	24	24

0	S_3	**2**	-3	**0**	-1	0	1	**3**	**3/2**
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		**-3**	**6**	**3**	**3**	**0**	**0**	**Z=18**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**5**	**-5**	**0**	**-3**	**0**	**0**		

⬆

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أصغر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة موجبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

لدينا في سطر التقييم توجد قيمة موجبة، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم آو قيم (ΔZ).

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (x_1). وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود الارتكاز.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود ($\text{Min } \frac{B_i}{a_{ijk}}$)، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min } (\frac{B_i}{a_{ijk}}) = \text{Min } (24\,;\, 3/2) = \mathbf{3/2}$$

- أصغر قيمة هي ($\mathbf{3/2}$) وهي تقابل المتغير S_3 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير S_3، ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الثاني**: للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_2	C_j	2	1	3	0	0	0	B_i	$\frac{B_i}{x_3}$
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
3	x_3	0	**1/2**	1	1/2	0	1/2	**15/2**	**15**
0	S_2	**0**	**5/2**	**0**	**1/2**	**1**	**-1/2**	**45/2**	**9**
2	x_1	1	**-3/2**	0	-1/2	0	1/2	**3/2**	/
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		**2**	**-3/2**	**3**	**1/2**	**0**	**5/2**	**Z=51/2**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**0**	**5/2**	**0**	**-1/2**	**0**	**0**		

⬆

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أصغر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة موجبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

- لدينا في سطر التقييم توجد قيمة موجبة، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر

قيمة موجبة في سطر التقييم أو قيم (ΔZ).

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (x_2). وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود الارتكاز.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود ($\frac{B_i}{a_{ijk}}$) Min، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}\left(\frac{B_i}{a_{ijk}}\right) = \text{Min}\,(15\,;\,9) = \mathbf{9}$$

- أصغر قيمة هي (9) وهي تقابل المتغير S_2 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير S_2، ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الثالث:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_3	C_j	2	1	3	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
3	x_3	0	**0**	1	2/5	-1/5	3/5	3
1	x_2	**0**	**1**	**0**	**1/5**	**2/5**	**-1/5**	9
2	x_1	1	**0**	0	-1/5	3/5	1/5	15
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		**2**	**1**	**3**	**1**	**1**	**2**	Z=48
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**-2**	

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم ($\Delta \mathbf{Z}$) أصغر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة موجبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

لدينا كل قيم ($\Delta \mathbf{Z}$) أقل أو تُساوي الصفر ومنه نقول بأننا وصلنا إلى الحل الأمثل.

$$\begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = 9 \\ x_1 = 3 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{Max\,(Z) = 48}$$

مثال (7.3)

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = 3x_1 + x_2$$

$$\mathbf{S/C}: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ 4x_1 - x_2 \geq 8 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

♦ **الحل**

الخطوة الأولى: تحويل البرنامج من الصيغة المختلطة إلى الصيغة المعيارية (القياسية) وذلك بتحويل القيود الهيكلية للصيغة المختلطة إلى معادلات (=) بإجراء تعديلات على القيود ودالة الهدف كما يلي:

$$Max(Z) = 3x_1 + x_2 + \mathbf{0S_1} + \mathbf{0S_2} - \boldsymbol{MA_1} - \boldsymbol{MA_2}$$

$$S.C\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{S_1} = 24 \\ 4x_1 - x_2 - \boldsymbol{S_2} + \boldsymbol{A_1} = 8 \\ x_1 - 2x_2 + \boldsymbol{A_2} = 0 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: كتابة الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي على شكل مصفوفة كما يلي:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

- **دالة الهدف (الدالة الاقتصادية)**

$$Max(Z) = [3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -M \quad -M] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

- **القيود الهيكلية**

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 4 & -1 & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & -2 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24 \\ 8 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- **قيود عدم السلبية**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من خلال المصفوفة نلاحظ أن المتغيرات القاعدية (متغيرات الأساس) التي تدخل في مزيج الحل القاعدي لجدول السمبلكس الأولي هي $\boldsymbol{S_1}$، $\boldsymbol{A_1}$، $\boldsymbol{A_2}$ لأن تشكل أعمدة الوحدة.

الخطوة الثالثة: إعداد جدول السمبلكس الأولي

T_0	C_j	3	1	0	0	-M	-M	B_i	$\frac{B_i}{a_{ij}}$
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
0	$\boldsymbol{S_1}$	**3**	2	1	0	0	0	**24**	**8**
-M	$\boldsymbol{A_1}$	4	-1	0	-1	1	0	**8**	**2**
-M	$\boldsymbol{A_2}$	**1**	**-2**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		-5M	2M	0	M	-M	-M	**Z=-8M**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		3+5M	1-2M	0	-M	0	0		

الخطوة الرابعة: اختبار أمثلية الحل الأولي:

- إذا كان: $\Delta Z \leq 0$؛ الحل أمثل لذا يجب التوقف هنا عند هذا الحل.
- إذا كان: $\Delta Z \geq 0$؛ الحل ليس أمثل أي ان هناك حل آخر أمثل لذا يجب تحسين الحل.
- نلاحظ أن $\Delta Z \geq 0$؛ إذن الحل ليس أمثل أي ان هناك حل آخر أمثل لذا يجب تحسين الحل.
- تحديد المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل وهو يقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم ΔZ. حيث أن أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم هي $\Delta Z = (3 + 5M)$، وهي تقابل المتغير x_1 الذي سيدخل مزيج الحل.
- نقوم بقسمة عمود الكميات B_i على عناصر العمود المحوري للمتغير الداخل لكي يتحدد لدينا المتغير الذي يخرج من مزيج الحل وهو يقابل أصغر قيمة متحصل عليها من قسمة عمود الكميات على عناصر العمود المحوري. أي: $\mathbf{Min}\left(\frac{B_i}{a_{ij}}\right)$.

مثال (8.3)

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Min(Z) = 4x_1 + x_2$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج بواسطة طريقة SIMPLEXE

الحل

الخطوة الأولى: تحويل الصيغة المختلطة للبرنامج الخطي إلى الصيغة المعيارية (القياسية)

خلال هذه الخطوة سيتم إحداث تعديلات على مستوى القيود وتحويلها إلى معادلات كما يتم إحداث تعديل على مستوى دالة الهدف على النحو التالي:

$$Min(Z) = 4x_1 + x_2 + 0\boldsymbol{S_1} + \mathbf{0}\boldsymbol{S_2} + \boldsymbol{MA_1} + \boldsymbol{MA_2}$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + x_2 + \boldsymbol{A_1} = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{A_2} = 6 \\ x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{S_2} = 4 \\ x_1; x_2;\ S_1; S_2;\ A_1; A_2 \geq 0 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: كتابة الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي على شكل مصفوفة كما يلي:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

- **دالة الهدف (الدالة الاقتصادية)**

$$Min(Z) = [4 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad M \quad M] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

- **القيود الهيكلية**

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 4 & 3 & -1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 1 & 2 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24 \\ 8 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- **قيود عدم السلبية**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن المتغيرات القاعدية (المتغيرات الأساسية) التي تدخل مزيح الحل القاعدي أو الأولي هي على التوالي: A_1، A_2، S_2 كما هي مرتبة في البرنامج (القيود).

الخطوة الثالثة: إنشاء جدول السمبلكس الأولي (الحل الأولي)

T_0	C_j	3	1	0	0	+M	+M	B_i	$\frac{B_i}{a_{ijk}}$
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
+M	A_1	3	1	0	0	1	0	**3**	**1**
+M	A_2	4	3	-1	0	0	1	**6**	**3/2**
0	S_2	1	2	0	1	0	0	**4**	**4**
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		**7M**	**4M**	**-M**	**0**	**+M**	**+M**	**Z=9M**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**4-7M**	**1-4M**	**+M**	**0**	**0**	**0**		

الخطوة الرابعة: اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة سالبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيح الحل.

- لدينا في سطر التقييم توجد قيمتين سالبتين، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة سالبة في سطر التقييم أو قيم (ΔZ).

$$\text{Min}\ (\Delta \mathbf{Z}) = \text{Min}\ (4 - 7\text{M}\ ;\ 1 - 4\text{M}) = 4 - 7\text{M}$$

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير ($\mathbf{x_1}$). وبالتالي يتحدد لدينا **العمود المحوري** أو ما يُطلق عليه بـ **عمود الارتكاز**.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على **السطر المحوري** أو **سطر الارتكاز** وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود ($\text{Min}\frac{B_i}{a_{ijk}}$)، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}(\frac{B_i}{a_{ijk}}) = \text{Min}\ (1\ ;\ 3/2\ ;\ 4) = \mathbf{1}$$

- أصغر قيمة هي الواحد (**1**) وهي تقابل المتغير A_1 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير الاصطناعي A_1، ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.

- **الانتقال إلى جدول الحل الأول**: للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_1	C_j	3	1	0	0	+M	+M	B_i	$\frac{B_i}{a_{ijk}}$
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
4	x_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1	3
+M	A_2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2	6/5
0	S_2	0	5/3	0	1	-1/3	0	3	9/5
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		4	4/3+5/3M	+M	0	4/3-4/3M	+M	Z=4+2M	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	$-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M$	+M	0	$-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}M$	0		

⬆

- **اختبار أمثلية الحل**

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة سالبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

- لدينا في سطر التقييم توجد قسمة سالبة لـ (ΔZ) وهي تُقابل المتغير x_2. إذن المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو x_2. وبالتالي يتشكل لدينا العمود المحوري.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود $\text{Min}(\frac{B_i}{a_{ijk}})$، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.
  - $\text{Min}(\frac{B_i}{a_{ijk}}) = \text{Min}(3\ ;\ 6/5\ ;\ 9/5) = \mathbf{6/5}$
- أصغر قيمة هي الواحد (**6/5**) وهي تقابل المتغير A_1 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير الاصطناعي A_1، ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الثاني**: للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_2	C_j	3	1	0	0	+M	+M	B_i	$\frac{B_i}{a_{ijk}}$
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2		

4	x_1	1	0	1/5	0	2/5	-1/5	**3/5**	**3**
1	x_2	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	**6/5**	**/**
0	S_2	0	0	1	1	1	-1	**1**	**1**
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		**4**	**1**	**1/5**	**0**	**4/5**	**-1/5**	**Z=18/5**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**0**	**0**	**-1/5**	**0**	**M-4/5**	**M+1/5**		

- **اختبار أمثلية الحل**

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة سالبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

- لدينا في سطر التقييم توجد قسمة سالبة لـ (ΔZ) وهي تُقابل المتغير x_1. إذن المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو x_1. وبالتالي يتشكل لدينا العمود المحوري.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود ($\text{Min}(\frac{B_i}{a_{ijk}})$، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}\left(\frac{B_i}{a_{ijk}}\right) = \text{Min}(3\,;\,1) = \mathbf{1}$$

- أصغر قيمة هي الواحد (1) وهي تقابل المتغير S_1 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير الاصطناعي S_1، ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الثالث:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_3	C_j	**3**	**1**	**0**	**0**	**+M**	**+M**	B_i
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
4	x_1	1	0	0	-1/5	1/5	2/5	**2/5**
1	x_2	0	1	0	3/5	-1/5	0	**9/5**
0	S_1	0	0	1	1	1	-1	**1**
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		**4**	**1**	**0**	**-1/5**	**3/5**	**8/5**	**Z=17/5**
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**0**	**0**	**0**	**1/5**	**M-3/5**	**M-8/5**	

كل قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو تساوي الصفر، ومنه نقول بأننا وصلنا إلى الحل الأمثل.

إذن الحل الأمثل للمتغيرات هو:

$$\begin{cases} x_1 = 2/5 \\ x_2 = 9/5 \\ s_1 = 1 \\ s_2 = 0 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \textbf{Min } (\textbf{Z}) = {}^{\textbf{17}}/_{\textbf{5}}$$

تمارين الفصل الثالث

التمرين الأول

بواسطة الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل للبرامج الرياضية التالية:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$S.C\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 \leq 25 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني

بواسطة الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل للبرامج الرياضية التالية:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + x_2$$
$$S.C\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثالث

بواسطة الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل للبرامج الرياضية التالية:

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$S.C\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + x_2 \geq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 31 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الرابع

بواسطة الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل للبرامج الرياضية التالية:

$$Min\ (Z) = 5x_1 + 7x_2$$
$$S.C\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الخامس

بواسطة طريقة SIMPLEX أوجد الحل الأمثل للبرامج الخطية التالية:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$S.C\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 100 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين السادس

بواسطة طريقة SIMPLEX أوجد الحل الأمثل للبرامج الخطية التالية:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + x_2$$
$$S.C\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين السابع

بواسطة طريقة SIMPLEX أوجد الحل الأمثل للبرامج الخطية التالية:

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 48 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثامن

بواسطة طريقة SIMPLEX أوجد الحل الأمثل للبرامج الخطية التالية:

$$Min\ (Z) = 5x_1 + 7x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

حلول تمارين الفصل الثالث

التمرين الأول

❶ إيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي بواسطة الطريقة البيانية

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 \leq 25 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 40 \\ 2x_1 + x_2 = 25 \\ x_1 + 2x_2 = 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ على معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

$2x_1 + 2x_2 = 40$		
$\mathbf{x_1}$	20	0
$\mathbf{x_2}$	0	20

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:
$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{20}; \mathbf{20})$

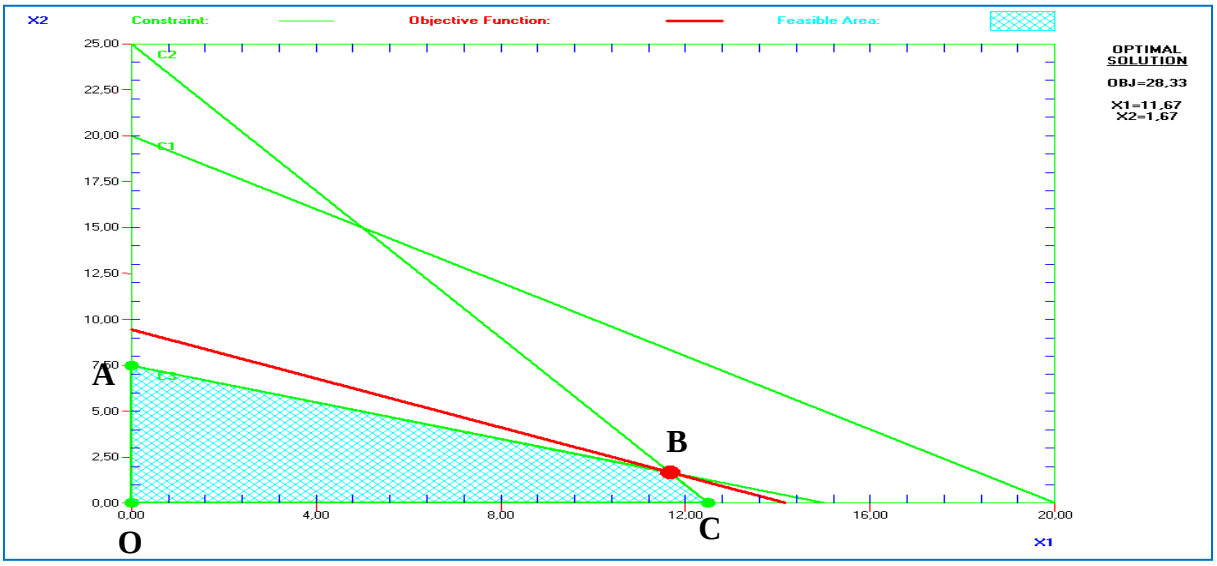
$2x_1 + x_2 = 25$		
$\mathbf{x_1}$	12,5	0
$\mathbf{x_2}$	0	25

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:
$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{12,5}; \mathbf{25})$

$x_1 + 2x_2 = 15$		
$\mathbf{x_1}$	15	0
$\mathbf{x_2}$	0	7,5

النقطتين التي تربط المستقيم الثالث هما:
$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{15}; \mathbf{7,5})$

الشكل (9.3): منطقة الحلول الممكنة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

منطقة الحلول الممكنة هي المضلع الملون باللون الأخضر **[OABC]** ونقطة الحل الأمثل هي النقطة التي تكون عندها دالة الهدف أكبر مما يُمكن.

- عند النقطة O ذات الإحداثية $(0\ ;\ 0)$تكون قيمة دالة الهدف كما يلي:

$$O(x_1; x_2) = O(0; 0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 2(0) + 3(0) = \mathbf{0}$$

- عند النقطة A ذات الإحداثية $(0\ ;\ 7{,}5)$ تكون قيمة دالة الهدف كما يلي:

$$A(x_1; x_2) = A(0; 7{,}5) \Longrightarrow Max\ (Z) = 2(0) + 3(7{,}5) = \mathbf{22{,}5}$$

- عند النقطة B ذات الإحداثية $B(x_1; x_2) = (?\ ;?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 25 \dots\dots (1) \\ x_1 + 2x_2 = 15 \dots\dots (2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) في العدد 2 نجد:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 50 \dots\dots (3) \\ x_1 + 2x_2 = 15 \dots\dots (4) \end{cases}$$

بطرح المعادلتين (3) و(4) نجد:

$$3x_1 = 35 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 11{,}67 \\ x_2 = 1{,}67 \end{cases}$$

$$B(x_1;x_2)=B(11{,}67\ ;1{,}67) \Longrightarrow Max\ (Z)=2(11{,}67)+3(1{,}67)=\mathbf{28{,}35}$$

- عند النقطة C ذات الإحداثية $C(x_1; x_2) = (12{,}5; 0)$:

$$C(x_1; x_2) = C(12{,}5; 0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 2(12{,}5) + 3(0) = \mathbf{25}$$

نلاحظ أن أعظم قيمة لدالة الهدف Z هي عند النقطة $B(x_1; x_2) = B(11{,}67\ ;1{,}67)$ حيث تحقق لأعظم ربح ممكن. ومنه الحل المثل للقيمتين: x_1، x_2 هما:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 11{,}67} \\ \boldsymbol{x_2 = 1{,}67} \end{cases}$$

التمرين الثاني

❶ **إيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي بواسطة الطريقة البيانية**

$$Max\ (Z) = 2x_1 + x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ -x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$$

✓ على معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

$x_1 + x_2 = 4$		
$\mathbf{x_1}$	4	0
$\mathbf{x_2}$	0	4

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:

$$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{4}\ ;\mathbf{4})$$

$-x_1 + x_2 = 6$		
$\mathbf{x_1}$	-6	0
$\mathbf{x_2}$	0	6

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:

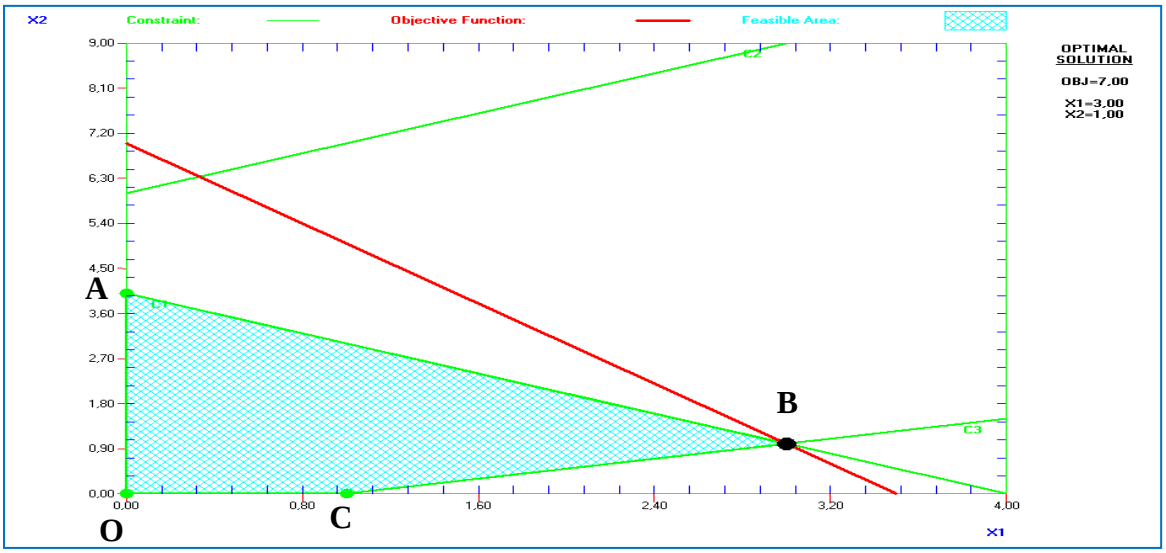
$$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (-\mathbf{6}\ ;\mathbf{6})$$

$x_1 - 2x_2 = 1$		
$\mathbf{x_1}$	1	0
$\mathbf{x_2}$	0	$\frac{-1}{2}$

النقطتين التي تربط المستقيم الثالث هما:

$$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = \left(\mathbf{1}\ ; \frac{-1}{2}\right)$$

الشكل (10.3): منطقة الحلول الممكنة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

منطقة الحلول الممكنة هي المضلع الملون باللون الأخضر **[OABC]** ونقطة الحل الأمثل هي النقطة التي تكون عندها دالة الهدف أكبر مما يُمكن.

- عند النقطة **O** ذات الإحداثية $(0\ ;\ 0)$ تكون قيمة دالة الهدف كما يلي:

$$O(x_1; x_2) = O(0; 0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 2(0) + 1(0) = \mathbf{0}$$

- عند النقطة A ذات الإحداثية $(0;\ 4)$ تكون قيمة دالة الهدف كما يلي:

$$A(x_1; x_2) = A(0; 4) \Longrightarrow Max\ (Z) = 2(0) + 1(4) = \mathbf{4}$$

- عند النقطة **B** ذات الإحداثية $B(x_1; x_2) = (?\ ;?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \dots\dots (1) \\ \boldsymbol{x_1 - 2x_2 = 1} \dots\dots (2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) في العدد 2 نجد:

$$3x_2 = 3 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$B(x_1; x_2) = B(3\ ;1) \Longrightarrow Max\ (Z) = 2(3) + 1(1) = \mathbf{7}$$

- عند النقطة C ذات الإحداثية $C(x_1; x_2) = (0; 1)$:

$$C(x_1; x_2) = C(1; 0) \Longrightarrow Max\ (Z) = 2(1) + 1(0) = \mathbf{2}$$

نلاحظ أن أعظم قيمة لدالة الهدف Z هي عند النقطة $B(x_1; x_2) = B(3\ ;1)$ حيث تحقق لأعظم ربح ممكن. ومنه الحل المثل للقيمتين: x_1، x_2 هما:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 3} \\ \boldsymbol{x_2 = 1} \end{cases}$$

التمرين الثالث

❶ **إيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي بواسطة الطريقة البيانية**

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + x_2 \geq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 31 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 12 \\ 5x_1 + x_2 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 = 31 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

✓ في معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

$x_1 + 3x_2 = 12$		
$\mathbf{x_1}$	12	0
$\mathbf{x_2}$	0	4

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:

$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{12}\,; \mathbf{4})$

$5x_1 + x_2 = 12$		
$\mathbf{x_1}$	2,4	0
$\mathbf{x_2}$	0	12

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:

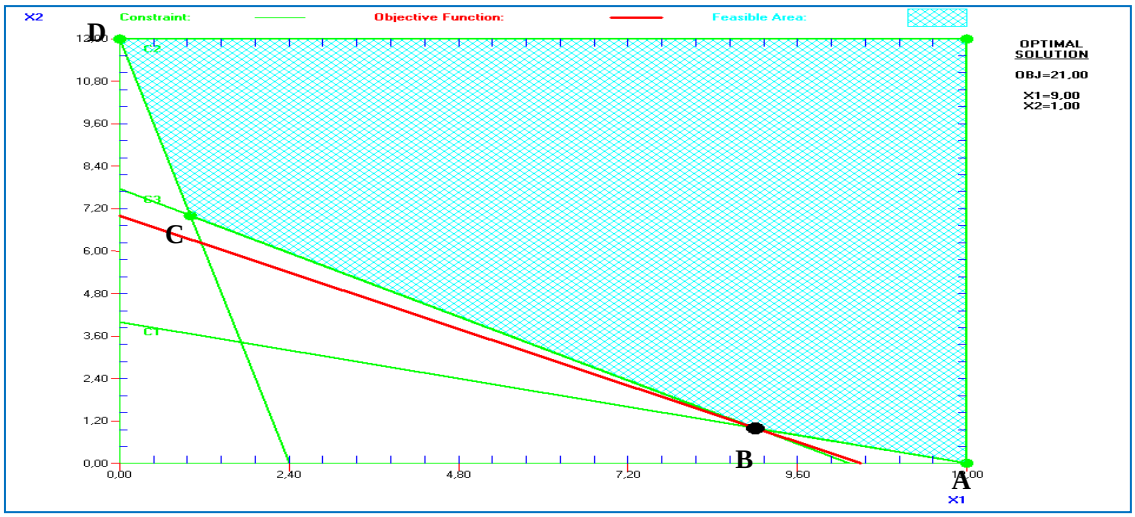
$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{2,4}\,; \mathbf{12})$

$3x_1 + 4x_2 = 31$		
$\mathbf{x_1}$	10.33	0
$\mathbf{x_2}$	0	7,75

النقطتين التي تربط المستقيم الثالث هما:

$(\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}) = (\mathbf{10,33}\,; 7{,}75)$

الشكل (11.3): منطقة الحلول الممكنة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

منطقة الحلول الممكنة هي المضلع الملون باللون الأخضر **[ABCD]** ونقطة الحل الأمثل هي النقطة التي تكون عندها دالة الهدف أقل مما يُمكن.

- عند النقطة A ذات الإحداثية $(0\,;12)$ تكون قيمة دالة الهدف كما يلي:

$$A(x_1; x_2) = A(12; 0) \Longrightarrow Min\ (Z) = 2(12) + 3(0) = \mathbf{24}$$

- عند النقطة B ذات الإحداثية $B(x_1; x_2) = (?\,;?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 12 \ldots\ldots(1) \\ 3x_1 + 4x_2 = 31 \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) في العدد (3) نجد:

$$(1) \Leftrightarrow 3x_1 + 9x_2 = 36 \ldots\ldots(3)$$

بطرح المعادلة (3) من المعادلة (2) نجد:

$$5x_2 = 5 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$B(x_1;x_2)=B(9\,;1)\Longrightarrow Min\,(Z)=2(9)+3(1)=\mathbf{21}$$

- عند النقطة C ذات الإحداثية $C(x_1;x_2)=(?\,;?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases}5x_1+x_2=12\ldots\ldots(4)\\3x_1+4x_2=31\ldots\ldots(5)\end{cases}$$

بضرب المعادلة (4) في العدد (4) نجد:

$$(4)\Leftrightarrow 20x_1+4x_2=48\ldots\ldots(6)$$

بطرح المعادلة (6) من المعادلة (5) نجد:

$$17x_1=17\Longrightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=7\end{cases}$$

$$C(x_1;x_2)=C(1\,;7)\Longrightarrow Min\,(Z)=2(1)+3(7)=\mathbf{23}$$

- عند النقطة D ذات الإحداثية $(0\,;12)$ تكون قيمة دالة الهدف كما يلي:

$$D(x_1;x_2)=D(0;12)\Longrightarrow Min\,(Z)=2(0)+3(12)=\mathbf{36}$$

نلاحظ أن أدنى قيمة لدالة الهدف Z هي عند النقطة $B(x_1;x_2)=B(9\,;1)$حيث تحقق أدنى تكلفة ممكنة. ومنه الحل المثل للقيمتين: x_1، x_2 هما:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x_1=9}\\\boldsymbol{x_2=1}\end{cases}$$

التمرين الرابع

إيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي بواسطة الطريقة البيانية

$$Min\,(Z)=\ 5x_1+7x_2$$

$$S.C\begin{cases}x_1+2x_2\geq 8\\2x_1+x_2\geq 8\\x_1+x_2\geq 6\\x_1;x_2\geq 0\end{cases}$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتباينات إلى معادلات أي تحويل الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية كما يلي:

$$S.C\begin{cases}x_1+2x_2=8\\2x_1+x_2=8\\x_1+x_2=6\\x_1;x_2\geq 0\end{cases}$$

✓ في معلم متعامد ومتجانس نرسم المستقيمات، وذلك من خلال إيجاد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نربط بينهما كما يلي:

$x_1+2x_2=8$		
$\mathbf{x_1}$	8	0
$\mathbf{x_2}$	0	4

النقطتين التي تربط المستقيم الأول هما:

$(\mathbf{x_1};\mathbf{x_2})=(\mathbf{8}\,;\mathbf{4})$

$2x_1+x_2=8$		
$\mathbf{x_1}$	4	0
$\mathbf{x_2}$	0	8

النقطتين التي تربط المستقيم الثاني هما:

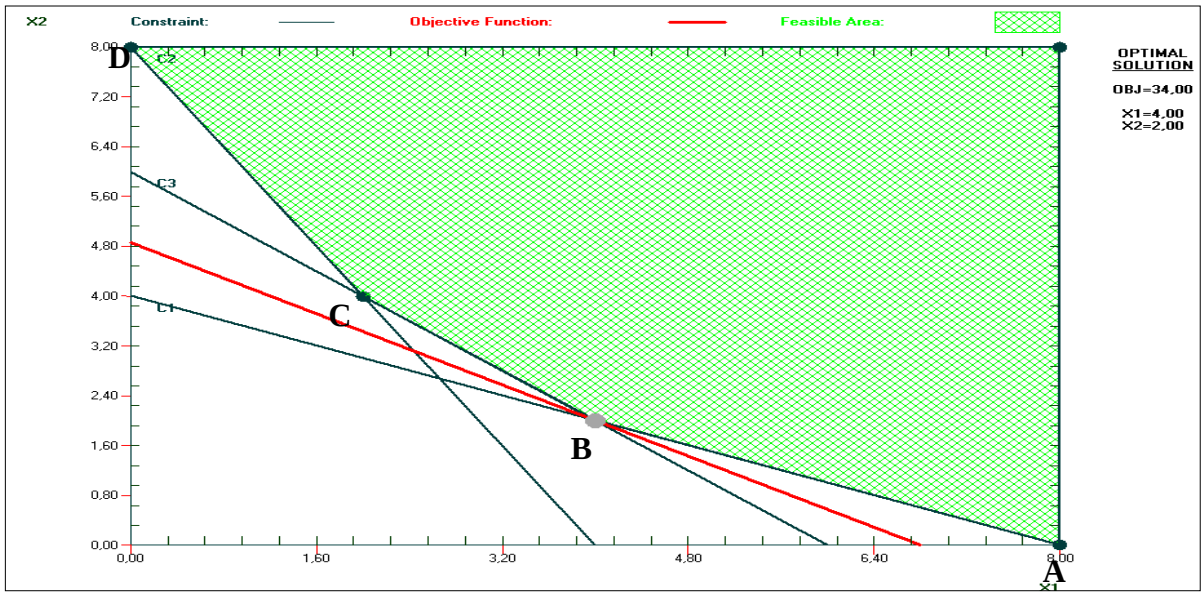
$(\mathbf{x_1};\mathbf{x_2})=(\mathbf{4}\,;\mathbf{8})$

$x_1+x_2=6$		
$\mathbf{x_1}$	6	0
$\mathbf{x_2}$	0	6

النقطتين التي تربط المستقيم الثالث هما:

$(\mathbf{x_1};\mathbf{x_2})=(\mathbf{6}\,;\mathbf{6})$

الشكل (12.3): منطقة الحلول الممكنة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام برنامج Win QSB

منطقة الحلول الممكنة هي المضلع الملون باللون الأخضر **[ABCD]** ونقطة الحل الأمثل هي النقطة التي تكون عندها دالة الهدف أقل مما يُمكن.

- عند النقطة A ذات الإحداثية $(8\,;0)$ تكون قيمة دالة الهدف كما يلي:

$$A(x_1;x_2) = A(8;0) \Longrightarrow Min\ (Z) = 5(8) + 7(0) = \mathbf{40}$$

- عند النقطة B ذات الإحداثية $B(x_1;x_2) = (?\,;?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \ldots\ldots (1) \\ x_1 + x_2 = 6 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$x_2 = 2 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$B(x_1;x_2) = B(4\,;2) \Longrightarrow Min\ (Z) = 5(4) + 7(2) = \mathbf{34}$$

- عند النقطة C ذات الإحداثية $C(x_1;x_2) = (?\,;?)$: وهي نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \ldots\ldots (3) \\ x_1 + x_2 = 6 \ldots\ldots (4) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (3) من المعادلة (4) نجد:

$$x_1 = 2 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$C(x_1;x_2) = C(2\,;4) \Longrightarrow Min\ (Z) = 5(2) + 7(4) = \mathbf{38}$$

- عند النقطة D ذات الإحداثية $(0\,;8)$ تكون قيمة دالة الهدف كما يلي:

$$D(x_1;x_2) = D(0;8) \Longrightarrow Min\ (Z) = 5(0) + 7(8) = \mathbf{56}$$

نلاحظ أن أدنى قيمة لدالة الهدف Z هي عند النقطة $B(x_1;x_2) = B(4\,;2)$ حيث تحقق أدنى تكلفة ممكنة. ومنه الحل المثل للقيمتين: x_1، x_2 هما:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 4} \\ \boldsymbol{x_2 = 2} \end{cases}$$

التمرين الخامس

❶ **إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:**

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 3x_3 + 4x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 100 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

✍ **تحويل الصيغة المختلطة للبرنامج الخطي إلى الصيغة المعيارية (القياسية):**

تحويل البرنامج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة النموذجية أو المعيارية من خلال إجراء تعديلات على القيود الهيكلية ودالة الهدف.

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 + 0\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{0S_2} + \boldsymbol{0S_3}$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + \boldsymbol{S_1} = 80 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \boldsymbol{S_2} = 100 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + \boldsymbol{S_3} = 60 \\ x_1; x_2; x_3; S_1; S_2; S_3 \geq 0 \end{cases}$$

✍ **كتابة الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي على شكل مصفوفة كما يلي:**

$$\boldsymbol{AX = B}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 100 \\ 60 \end{bmatrix}$$

من خلال المصفوفة نلاحظ أن المتغيرات القاعدية (متغيرات الأساس) التي تدخل في مزيح الحل القاعدي لجدول السمبلكس الأولي هي $\boldsymbol{S_1}$، $\boldsymbol{S_2}$، $\boldsymbol{S_3}$ لأن تشكل أعمدة الوحدة.

✍ **إعداد جدول السمبلكس الأولي**

$\boldsymbol{T_0}$	$\boldsymbol{C_j}$	**2**	**3**	**4**	**0**	**0**	**0**	$\boldsymbol{B_i}$	$\frac{\mathbf{B_i}}{\mathbf{x_3}}$
$\boldsymbol{CB}$	$\boldsymbol{XB}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{S_1}$	$\boldsymbol{S_2}$	$\boldsymbol{S_3}$		
0	$\boldsymbol{S_1}$	2	1	**2**	1	0	0	**80**	**40**
0	$\boldsymbol{S_2}$	1	2	**2**	0	1	0	**100**	**50**
0	$\boldsymbol{S_3}$	1	1	**2**	0	0	1	**60**	**30**
$\boldsymbol{Z_j = CBX_jS_jA_j}$		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**Z= 0**	
$\boldsymbol{\Delta Z = C_j - Z_j}$		**2**	**3**	**4**	**0**	**0**	**0**		

⬆

✍ **اختبار أمثلية الحل**

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم ($\boldsymbol{\Delta Z}$) أصغر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة موجبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيح الحل.

لدينا في سطر التقييم توجد ثلاث قيم موجبة، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم أو قيم ($\boldsymbol{\Delta Z}$).

$$Max\ (\Delta Z) = Max\ (2\ ;\ 3\ ;\ 4) = 4$$

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير $(\mathbf{x_3})$. وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود الارتكاز.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات $(\boldsymbol{B_i})$ على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود $\text{Min}\ (\frac{B_i}{a_{ijk}})$، حيث $\mathbf{K}$ يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}\ (\frac{\text{B}_\text{i}}{\text{a}_\text{ijk}}) = \text{Min}\ (40\,;50\,;30) = 30$$

- أصغر قيمة هي $(\mathbf{30})$ وهي تقابل المتغير $\boldsymbol{S_3}$ وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير $\boldsymbol{S_3}$، ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الأول:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{C_j}$	**2**	**3**	**4**	**0**	**0**	**0**	$\boldsymbol{B_i}$	$\frac{\mathbf{B_i}}{\mathbf{x_3}}$
$\boldsymbol{CB}$	$\boldsymbol{XB}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{S_1}$	$\boldsymbol{S_2}$	$\boldsymbol{S_3}$		
0	$\boldsymbol{S_1}$	1	0	**0**	1	0	-1	**20**	/
0	$\boldsymbol{S_2}$	0	1	**0**	0	1	-1	**40**	**40**
4	$\boldsymbol{x_3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**1**	0	0	$\frac{1}{2}$	**30**	**60**
$\boldsymbol{Z_j = CBX_jS_jA_j}$		**2**	**2**	**4**	**0**	**0**	**2**	**Z= 120**	
$\boldsymbol{\Delta Z = C_j - Z_j}$		**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**-2**		

اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم $(\boldsymbol{\Delta Z})$ أصغر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة موجبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

لدينا في سطر التقييم توجد قيمة موجبة، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم آو قيم (ΔZ).

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (x_2). وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود الارتكاز.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود $\text{Min}\ (\frac{B_i}{a_{ijk}})$، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}\ (\frac{\text{B}_\text{i}}{\text{a}_\text{ijk}}) = \text{Min}\ (40\,;\ 60) = 40$$

- أصغر قيمة هي (40) وهي تقابل المتغير S_2 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير S_2، ومن ثم يتشكل لدينا السطر

المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.

- **الانتقال إلى جدول الحل الثاني:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_2	C_j	2	3	4	0	0	0	B_i	
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	1	0	0	1	0	-1	20	
3	x_2	0	1	0	0	1	-1	40	
4	x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	10	
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		2	3	4	0	1	1	Z= 160	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	0	0	-1	-1		

اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أصغر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة موجبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيح الحل.

لدينا في سطر التقييم القيم معدومة أو أقل من الصفر، إذن وصلنا إلى الحل الأمثل.

وبالتالي حلول هذا البرنامج الرياضي هو كما يلي:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 40 \\ x_3 = 10 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow Max\,(Z) = 160$$

التمرين السادس

إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$Max\,(Z) = 2x_1 + x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني للبرنامج الخطي لا يحقق شرط القانونية، لأن من شرط القانونية في حالة التعظيم (Max) يجب أن تكون جميع القيود أقل أو تساوي ($\leq b_i$).

لتحويل المتراجحة رقم (2) من أكبر أو تُساوي إلى أصغر أو تُساوي يجب ضرب طرفي القيد أو المتراجحة في العدد (-1) كما يلي:

$$(-1)x_1 + (-1)(-x_2) \geq (-1)(-1) \Leftrightarrow -x_1 + x_2 \leq 1$$

وبالتالي يصبح البرنامج الأولي بالصيغة القانونية التالية:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تحويل الصيغة المختلطة للبرنامج الخطي إلى الصيغة المعيارية (القياسية)

تحويل البرنامج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة النموذجية أو المعيارية من خلال إجراء تعديلات على القيود الهيكلية ودالة الهدف.

$$Max\ (Z) = 2x_1 + x_2 + 0\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{0S_2} + \boldsymbol{0S_3}$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 + \boldsymbol{S_1} = 4 \\ -x_1 + x_2 + \boldsymbol{S_2} = 1 \\ x_1 - 2x_2 + \boldsymbol{S_3} = 1 \\ x_1; x_2; \boldsymbol{S_1};\ \boldsymbol{S_2}; \boldsymbol{S_3};\ \boldsymbol{A_1} \geq 0 \end{cases}$$

كتابة الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي على شكل مصفوفة كما يلي:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

من خلال المصفوفة نلاحظ أن المتغيرات القاعدية (متغيرات الأساس) التي تدخل في مزيج الحل القاعدي لجدول السمبلكس الأولي هي $\boldsymbol{S_1}$، $\boldsymbol{S_2}$، $\boldsymbol{S_3}$ لأن تشكل أعمدة الوحدة.

إعداد جدول السمبلكس الأولي

$\boldsymbol{T_0}$	$\boldsymbol{C_j}$	2	1	0	0	0	$\boldsymbol{B_i}$	$\frac{\mathbf{B_i}}{\mathbf{x_1}}$
$\boldsymbol{CB}$	$\boldsymbol{XB}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{S_1}$	$\boldsymbol{S_2}$	$\boldsymbol{S_3}$		
0	$\boldsymbol{S_1}$	1	1	1	0	0	**4**	**4**
0	$\boldsymbol{S_2}$	-1	1	0	1	0	**1**	/
0	$\boldsymbol{S_3}$	1	-2	0	0	1	**1**	**1**
$\boldsymbol{Z_j = CBX_jS_jA_j}$		0	0	0	0	0	**Z= 0**	
$\mathbf{\Delta Z = C_j - Z_j}$		**2**	**1**	**0**	**0**	**0**		

اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أصغر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة موجبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

لدينا في سطر التقييم كل القيم موجبة أو تُساوي الصفر، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم آو قيم (ΔZ).

$$Max\ (\Delta Z) = Max\ (2\ ;\ 1) = 2$$

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (x_1). وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود

الارتكاز.

- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود ($\frac{B_i}{a_{ijk}}$) Min، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}\left(\frac{\text{B}_\text{i}}{\text{a}_{\text{ijk}}}\right) = \text{Min}\,(4\,;\,1) = 1$$

- أصغر قيمة هي (1) وهي تقابل المتغير S_3 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير S_3، ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الأول:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_1	C_j	2	1	0	0	0	B_i	$\frac{\text{B}_\text{i}}{\text{x}_2}$
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	0	3	1	0	-1	3	1
0	S_2	0	-1	0	1	1	2	/
2	x_1	1	-2	0	0	1	1	/
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		2	-4	0	0	2	Z= 2	
$\Delta Z = \text{C}_\text{j} - \text{Z}_\text{j}$		0	5	0	0	-2		

⬆

اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أصغر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة موجبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

- لدينا في سطر التقييم قيمة موجبة واحدة، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة موجبة في سطر التقييم آو قيم (ΔZ).

$$Max\,(\Delta Z) = 5$$

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (x_2). وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود الارتكاز.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود ($\frac{B_i}{a_{ijk}}$) Min، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}\left(\frac{B_i}{a_{ijk}}\right) = 1$$

- أصغر قيمة هي (1) وهي تقابل المتغير S_1 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير S_1، ومن ثم يتشكل لدينا السطر

المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.

- **الانتقال إلى جدول الحل الثاني:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_2	C_j	2	1	0	0	0	B_i	
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
1	x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	
0	S_2	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	3	
2	x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3	
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		2	1	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	Z= 7	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$		

اختبار أمثلية الحل

كل قيم سطر التقييم (ΔZ) أصغر أو تساوي الصفر، ومنه نقول بأننا وصلنا إلى الحل الأمثل.

إذن الحل الأمثل للمتغيرات هو:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 3 \\ S_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{Max\ (Z) = 7}$$

التمرين السابع

إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 48 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

تحويل الصيغة المختلطة للبرنامج الخطي إلى الصيغة المعيارية (القياسية):

تحويل البرنامج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة النموذجية أو المعيارية من خلال إجراء تعديلات على القيود الهيكلية ودالة الهدف.

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0\boldsymbol{S_1} + \mathbf{0}\boldsymbol{S_2} + \boldsymbol{MA_1} + \boldsymbol{MA_2}$$

$$S.C\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{A_1} = 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + \boldsymbol{A_2} = 30 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + \boldsymbol{S_2} = 48 \\ x_1; x_2; x_3; S_1; S_2; S_3; A_1; A_2 \geq 0 \end{cases}$$

كتابة الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي على شكل مصفوفة كما يلي:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ S_2 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 48 \end{bmatrix}$$

من خلال المصفوفة نلاحظ أن المتغيرات القاعدية (متغيرات الأساس) التي تدخل في مزيج الحل القاعدي لجدول السمبلكس الأولي هي $\boldsymbol{S_2}$، $\boldsymbol{A_1}$، $\boldsymbol{A_2}$ لأن تشكل أعمدة الوحدة.

إعداد جدول السمبلكس الأولي

T_0	C_j	2	3	5	0	0	+M	+M	B_i	$\frac{B_i}{x_3}$
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2		
+M	A_1	1	**3**	-2	-1	0	1	0	**20**	$\frac{20}{3}$
+M	A_2	2	1	1	0	0	0	1	**30**	**30**
0	S_2	3	-2	2	0	1	0	0	**48**	/
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		**3M**	**4M**	**-M**	**-M**	**0**	**M**	**M**	**Z= 50M**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**2-3M**	**3-4M**	**5+M**	**M**	**0**	**0**	**0**		

اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة سالبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

- لدينا في سطر التقييم توجد قيمتين سالبتين، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة سالبة في سطر التقييم آو قيم (ΔZ).

$$\text{Min}\ (\Delta Z) = \text{Min}\ (2\text{-}3\text{M}\ ;\ 3\text{-}4\text{M}) = 3\text{-}4\text{M}$$

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (x_2). وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود الارتكاز.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود $\text{Min}(\frac{B_i}{a_{ijk}})$، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}(\frac{B_i}{a_{ijk}}) = \text{Min}\ (\frac{20}{3}\ ;\ 30)\ =\ \frac{20}{3}$$

- أصغر قيمة هي الواحد ($\frac{20}{3}$) وهي تقابل المتغير A_1 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير الاصطناعي A_1، ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.

- **الانتقال إلى جدول الحل الأول:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_1	C_j	2	3	5	0	0	+M	+M	B_i	$\frac{B_i}{x_3}$
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2		
3	x_2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	20
+M	A_2	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{70}{3}$	14
0	S_2	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{184}{3}$	$\frac{184}{11}$
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		$1+\frac{5}{3}M$	3	$-2+\frac{5}{3}M$	$-1+\frac{1}{3}M$	0	$1-\frac{1}{3}M$	M	Z= 20	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		$1-\frac{5}{3}M$	0	$7-\frac{5}{3}M$	$+1-\frac{1}{3}M$	0	$-1+\frac{1}{3}M$	0		

⬆

اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة سالبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

- لدينا في سطر التقييم توجد ثلاث قيم سالبة لـ (ΔZ)، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة سالبة في سطر التقييم آو قيم (ΔZ).
  - $\text{Min}(\Delta Z) = \text{Min}(1-\frac{5}{3}M\ ;\ 7-\frac{5}{3}M\ ;\ +1-\frac{1}{3}M) = 1-\frac{5}{3}M$
- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (x_1). وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود الارتكاز.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود $\text{Min}(\frac{B_i}{a_{ijk}})$، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.
  - $\text{Min}(\frac{B_i}{a_{ijk}}) = \text{Min}\ (20\ ;\ 14\ ;\ \frac{184}{11}) = 14$
- أصغر قيمة هي الواحد (14) وهي تقابل المتغير A_2 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير الاصطناعي A_2، ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الثاني:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.

- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{\left(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود}\right)}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_2	C_j	2	3	5	0	0	+M	+M	B_i	$\frac{B_i}{x_3}$
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2		
3	x_2	0	1	-1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	2	
2	x_2	1	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	14	
0	S_2	0	0	-3	$-\frac{7}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{11}{5}$	10	
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		2	3	-1	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	Z= 34	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	6	$\frac{4}{5}$	0	$M-\frac{4}{5}$	$M-\frac{3}{5}$		

اختبار أمثلية الحل

كل قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو تساوي الصفر، ومنه نقول بأننا وصلنا إلى الحل الأمثل.

إذن الحل الأمثل للمتغيرات هو:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 14 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 10 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{Min\ (Z) = 34}$$

التمرين الثامن

إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$Min\ (Z) = 5x_1 + 7x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

تحويل الصيغة المختلطة للبرنامج الخطي إلى الصيغة المعيارية (القياسية):

تحويل البرنامج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة النموذجية أو المعيارية من خلال إجراء تعديلات على القيود الهيكلية ودالة الهدف.

$$Min\ (Z) = 5x_1 + 7x_2 + 0\boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{0S_2} + \boldsymbol{0S_3} + \boldsymbol{MA_1} + \boldsymbol{MA_2} + \boldsymbol{MA_3}$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 - \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{A_1} = 8 \\ 2x_1 + x_2 - \boldsymbol{S_2} + \boldsymbol{A_2} = 8 \\ x_1 + x_2 - \boldsymbol{S_3} + \boldsymbol{A_3} = 6 \\ x_1; x_2; S_1; S_2;\ S_3;\ A_1; A_2; A_3\ \geq 0 \end{cases}$$

كتابة الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي على شكل مصفوفة كما يلي:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

من خلال المصفوفة نلاحظ أن المتغيرات القاعدية (متغيرات الأساس) التي تدخل في مزيج الحل القاعدي لجدول السمبلكس الأولي هي S_1، S_2، S_3 لأن تشكل أعمدة الوحدة.

إعداد جدول السمبلكس الأولي

T_0	C_j	5	7	0	0	0	+M	+M	+M	B_i	$\frac{B_i}{x_1}$
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3		
+M	A_1	1	2	-1	0	0	1	0	0	8	8
+M	A_2	2	1	0	-1	0	0	1	0	8	4
+M	A_3	1	1	0	0	-1	**0**	**0**	**1**	6	6
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		4M	4M	-M	-M	-M	M	M	M	Z= 22M	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**5-4M**	**7-4M**	**M**	**M**	**M**	**0**	**0**	**0**		

اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة سالبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

- لدينا في سطر التقييم توجد قيمتين سالبتين، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة سالبة في سطر التقييم آو قيم (ΔZ).

$$Max\ (\Delta Z) = Max\ (5 - 4M\ ;\ 7 - 4M) = 5 - 4M$$

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (x_1). وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود الارتكاز.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لتتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود Min ($\frac{B_i}{a_{ijk}}$)، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}\ (\frac{B_i}{a_{ijk}}) = \text{Min}\ (8\ ;\ 4\ ;\ 6) = 4$$

- أصغر قيمة هي (4) وهي تقابل المتغير A_2 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير A_2 ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الأول:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.

- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \left[\frac{(\text{العنصر المقابل له في الصف} * \text{العنصر المقابل له في العمود})}{\text{العنصر المحوري}}\right]$$

T_1	C_j	5	7	0	0	0	+M	+M	+M	B_i	$\frac{B_i}{x_2}$
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3		
+M	A_1	0	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	**4**	$\frac{8}{3}$
5	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	**4**	**8**
+M	A_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1	**2**	**4**
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		5	$\frac{5}{2}+2M$	-M	$-\frac{5}{2}+M$	-M	M	$\frac{5}{2}-M$	M	**Z= 20+6M**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**0**	$\frac{9}{2}-2M$	**+M**	$\frac{5}{2}-M$	**+M**	**0**	$-\frac{5}{2}+2M$	**0**		

⬆

اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة سالبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

- لدينا في سطر التقييم توجد قيمتين سالبتين، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة سالبة في سطر التقييم آو قيم (ΔZ).

$$Max\,(\Delta Z) = Max\,(\frac{9}{2}-2M\,;\,\frac{5}{2}-M) = \frac{9}{2}-2M$$

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (x_1). وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود الارتكاز.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود ($\frac{B_i}{a_{ijk}}$) Min، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}\,(\frac{B_i}{a_{ijk}}) = \text{Min}\,(\frac{8}{3}\,;\,8\,;\,4) = \frac{8}{3}$$

- أصغر قيمة هي ($\frac{8}{3}$) وهي تقابل المتغير A_1 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير A_1 ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الثاني**: للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

العنصر الجديد = العنصر القديم − $\left[\frac{\text{(العنصر المقابل له في الصف * العنصر المقابل له في العمود)}}{\text{العنصر المحوري}}\right]$

T_2	C_j	5	7	0	0	0	+M	+M	+M	B_i	$\frac{B_i}{S_2}$
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3		
7	x_2	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	**8**
5	x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	/
+M	A_3	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	**1**	$\frac{2}{3}$	**2**
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		5	7	$-3+\frac{1}{3}M$	$-1+\frac{1}{3}M$	-M	$3-\frac{1}{3}M$	$1-\frac{1}{3}M$	M	**Z= 32+** $\frac{2}{3}M$	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**0**	0	$3-\frac{1}{3}M$	$1-\frac{1}{3}M$	+M	$-3+\frac{4}{3}M$	$-1+\frac{4}{3}M$	**0**		

⬆

اختبار أمثلية الحل

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو يُساوي الصفر، وإذا كانت على الأقل قيمة سالبة فنقول أن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير جديد إلى مزيج الحل.

- لدينا في سطر التقييم توجد قيمتين سالبتين، وبالتالي فإن الحل ليس أمثل لذا يجب تحسينه وذلك بإدخال متغير يقابل أكبر قيمة سالبة في سطر التقييم آو قيم (ΔZ).

$$Max\ (\Delta Z)\ =\ Max\ (3-\frac{1}{3}M\ ;\ 1-\frac{1}{3}M)\ =1-\frac{1}{3}M$$

- المتغير الذي يدخل إلى مزيج الحل هو المتغير (S_2). وبالتالي يتحدد لدينا العمود المحوري أو ما يُطلق عليه بـ عمود الارتكاز.
- لمعرفة المتغير الذي يخرج من مزيج الحل نقوم بقسمة عمود الكميات (B_i) على عناصر أو قيم العمود المحوري لنتحصل على السطر المحوري أو سطر الارتكاز وهو يُقابل أدنى قيمة في عمود ($\frac{B_i}{a_{ijk}}$) Min، حيث K يُمثل عمود الارتكاز.

$$\text{Min}\ (\frac{B_i}{a_{ijk}}) = \text{Min}\ (8\ ;\ 2) = 2$$

- أصغر قيمة هي **(2)** وهي تقابل المتغير A_3 وبالتالي فإن المتغير الذي يخرج هو المتغير A_3 ومن ثم يتشكل لدينا السطر المحوري، وتقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري يتحدد لدينا نقطة الارتكاز أو العنصر المحوري.
- **الانتقال إلى جدول الحل الثالث:** للانتقال إلى جدول الحل التالي نقوم بقسمة عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري، وبالنسبة للعمود المحوري فالعنصر المحوري يصبح يُساوي الواحد (1) ونعطي جميع قيم العمود المحوري الأخرى القيمة صفر (0) حتى يتشكل لنا عمود الوحدة.
- بالنسبة لقيم الجدول الأخرى فتحسب وفق القاعدة التالية:

العنصر الجديد = العنصر القديم − $\left[\frac{\text{(العنصر المقابل له في الصف * العنصر المقابل له في العمود)}}{\text{العنصر المحوري}}\right]$

T_3	C_j	5	7	0	0	0	+M	+M	+M	B_i	
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3		
7	x_2	0	1	-1	0	1	1	0	-1	2	
5	x_1	1	0	1	0	-2	-1	0	2	4	
0	S_2	0	0	1	1	-3	-1	-1	3	2	
$Z_j = CBX_jS_jA_j$		5	7	-2	0	-3	2	M	3	Z= 34	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	2	0	3	M-2	0	M-3		

- **اختبار أمثلية الحل**

كل قيم سطر التقييم (ΔZ) أكبر أو تساوي الصفر، ومنه نقول بأننا وصلنا إلى الحل الأمثل.

إذن الحل الأمثل للمتغيرات هو:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_0 = 0 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ A_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow Min\ (Z) = 34$$

الفصل الرابع:
الثنائية في البرمجة الخطية وتحليل الحساسية

تمهيد

إن لكل نموذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل (ثنائي أو بديل)، ويسمى بالنموذج المقابل (الثنائي والبديل أو المعكوس) ويتضمن النموذج الثنائي (Dual) نفس البيانات التي يحتويها النموذج الأصلي (الأولي) (Primal).

لاحظنا في البرمجة الخطية أن حل مشكلة ما بطريقة Simplexe، وجد أن هنالك أسلوباً آخر يتم فيه التوصل إلى نفس النتائج ويطلق عليه أسلوب الحل الثنائي (المقابل، الازدواجي) وكل مسألة تحل بطريقة السمبلكس هناك إمكانية حلها بالأسلوب الثنائي وبالعكس.

إن الفائدة المنتظرة من الحل الثنائي هي سهولة إجراء العمليات مقارنة بطريقة السمبلكس فإذا كانت لدينا ثلاث متغيرات أساسية مع وجود عشرة قيود للمشكلة فإن عدد القيود في الأسلوب الثنائي سيكون ثلاثة وهذا سيؤدي إلى الإسراع في الحل وسنصل إلى نفس النتيجة فيما لو استخدمنا طريقة السمبلكس.

1. مفهوم المشكلة الثنائية

يُعرف النموذج الثنائي بأنه النموذج المماثل للنموذج الأولي لصياغة مسائل البرمجة الخطية، ويُقدم النموذج الثنائي الكثير من المعلومات التي يُمكن أن تُفيد إدارة العمليات الصناعية في سهولة اتخاذ القرارات، بالإضافة إلى تقليل العمليات الحسابية التي أصبحت سهلة بواسطة الحاسوب، وتحتاج إلى وقت أقل في حالة توفر عدد كبير من القيود والمتغيرات عنها في النموذج الأول.

2. تحويل مسألة أولية إلى مسألة ثنائية

لتحويل برنامج خطي إلى برنامج خطي معكوس أو مقابل له يجب الأخذ بعين الاعتبار الصيغة التي يتواجد عليها البرنامج الأولي (صيغة قانونية أو مختلطة فقط أو مختلطة وبقيود مساواة)، وكذلك طبيعة المتغيرات المشكلة للبرنامج الأصلي هل هي متغيرات مقيدة أو غير مقيدة (بدون إشارة)، وسوف نحاول التطرق إلى كل حالة من هذه الحالات المذكورة أعلاه.

1.2. حالة البرنامج الخطي الأولي له صيغة قانونية

نعلم أن الصيغة القانونية للبرنامج الخطي في حالة تعظيم هو أن كل القيود المشكلة له تكون من النوع أقل أو تساوي ($\leq$)، وفي حالة دالة الهدف من نوع تدنية فإن كل القيود المشكلة للبرنامج الخطي تكون من نوع أكبر أو تُساوي ($\geq$)، وبالتالي فإن إيجاد البرنامج الثنائي يتم وفق الخطوات التالية:

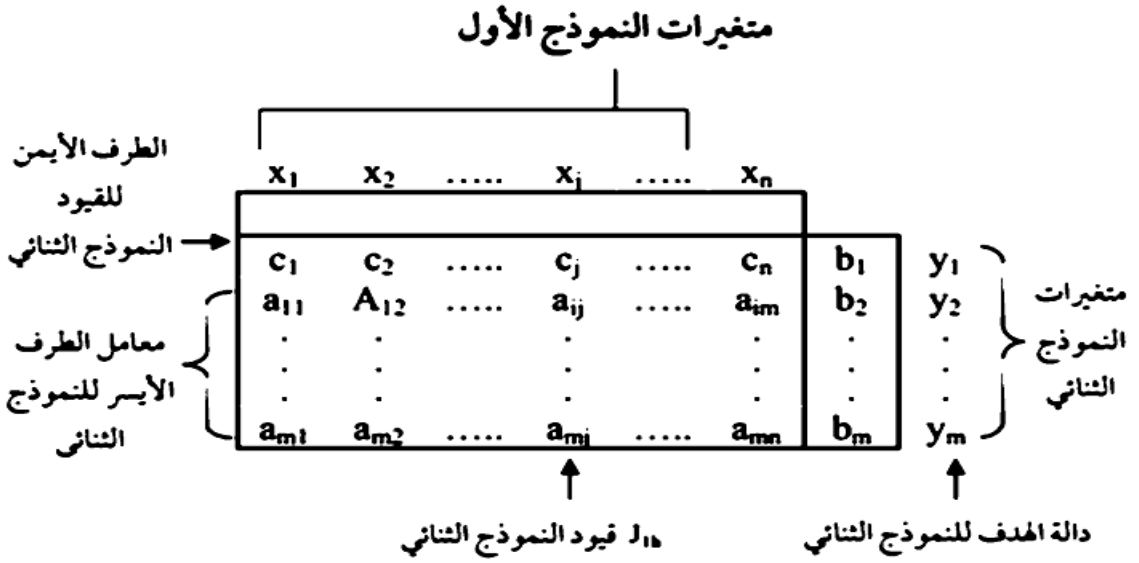
- دالة الهدف في حالة تعظيم (Max Z) في المسألة الأصلية تصبح دالة الهدف من النوع تدنية (Min W) في المسألة الثنائية؛
- معاملات (C_i) متغيرات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح قيم الطرف الأيمن (B_i) لقيود البرنامج الثنائي؛
- أسطر البرنامج الأولي تُصبح أعمدة البرنامج الثنائي؛
- المتغيرات (x_i) في البرنامج الأولي تُصبح المتغيرات (y_i) في البرنامج الثنائي؛
- القيود من نوع أقل أو تُساوي ($\leq$) تصبح قيود من النوع أكبر أو تُساوي ($\geq$)؛
- عدد قيود البرنامج الأولي هو عدد متغيرات البرنامج الثنائي والعكس صحيح.

ويُمكن تلخيص ذلك في الشكل الرياضي التالي:

Primal		Dual
$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$	➔	$Min\ W = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \le b_i\,, i = 1,2,\dots\dots,m$ $X_j \ge 0$	$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}y_j \ge C_j\,, j = 1,2,\dots\dots n$ $Y_i \ge 0$
$Min\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_jX_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \ge b_i\,, i = 1,2,\dots\dots,m$ $X_j \ge 0$	$Max\ W = \sum_{i=1}^{m} b_iY_i$ $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}y_j \le C_j\,, j = 1,2,\dots\dots n$ $Y_i \ge 0$

ولتوضيح النموذج الثنائي، الشكل أدناه يُبين ذلك:



أوجد البرنامج الثنائي (المقابل) للبرنامج الخطي التالي

$$Max\ (Z) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \\ x_1; x_2; x_3 \ge 0 \end{cases}$$

- **الحل**

البرنامج الأولي له صيغة قانونية وبالتالي يكون البرنامج الثنائي من الشكل التالي:

$$Min\ (W) = 5y_1 + 11y_2 + 8y_3$$
$$S.C \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 5 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 4 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 3 \\ y_1; y_2; y_3 \ge 0 \end{cases}$$

2.2. حالة البرنامج الخطي الأولي له صيغة مختلطة ($\le$ ، $\ge$)

في هذه الحالة قبل إيجاد المسألة الثنائية يجب تحويل الصيغة المختلطة للمسألة الأصلية إلى الصيغة القانونية وذلك بضرب طرفي القيد الذي لا يحقق شرط الصيغة القانونية في العدد (-1) ليصبح قيد يحقق شرط الصيغة القانونية.

- **مثال (2.4)**

أوجد المسألة الثنائية للمسألة الأصلية التالية:

$$Min\ (Z) = 4x_1 + x_2$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

♦ **الحل**

قبل إيجاد المسألة الثنائية يجب تحويل المسألة الأصلية إلى صيغتها القانونية لأن القيد الثالث في المسألة الأصلية لا يحقق شرط الصيغة القانونية ولتحويله إلى قيد من النوع أكبر أو تُساوي يجب ضرب طرفيه في العدد (-1) كما يلي:

$$(-1)x_1 + (-1)2x_2 \leq (-1)4 \Rightarrow -x_1 - 2x_2 \geq -4$$

وبالتالي يُصبح البرنامج الأولي من الشكل:

$$Min\ (Z) = 4x_1 + x_2$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ -x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ومنه يمكننا الآن إيجاد البرنامج الثنائي كما يلي:

$$Max\ (W) = 3y_1 + 6y_2 - 4y_3$$
$$S/C \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 4 \\ y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 1 \\ y_1; y_2; y_3 \geq 0 \end{cases}$$

3.2. حالة البرنامج الخطي الأولي له صيغة مختلطة بقيود مساواة $(=)$

لإيجاد المسألة الثنائية لهذا النوع من البرامج الخطية نأخذ المثال التالي:

♦ **مثال (3.4)**

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي التالي:

$$Max\ Z = 4x_1 + 6x_2 + 10x_3$$
$$S/C \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 30 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 60 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

♦ **الحل**

القيد الثالث من البرنامج الخطي لا يحقق شرط الصيغة القانونية وبالتالي يجب تحويله إلى قيد يتحقق فيه شرط الصيغة القانونية، كما أن هذا القيد هو قيد كيفي أي أن عكس المساواة يمكن أن يكون أكبر أو تساوي $(\geq)$ أو أصغر أو تساوي $(\leq)$ كما يلي:

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 60 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 60 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 60 \end{cases}$$

كما يجب كذلك تحويل القيد من النوع أكبر أو تساوي إلى قيد من النوع أصغر أو تساوي وذلك بضرب طرفي القيد في العدد (-1) كما يلي:

$$(-1)x_1 - (-1)2x_2 + (-1)2x_3 \geq (-1)60 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq -60$$

وبالتالي يصبح البرنامج الخطي الأولي بصيغته القانونية من الشكل التالي:

$$Max\ Z = 4x_1 + 6x_2 + 10x_3$$

$$S/C\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 30 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq -60 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

ومنه يمكننا الآن إيجاد البرنامج الثنائي كما يلي:

$$Min\ (W) = 20y_1 + 30y_2 - 60y_3 + 60y_4$$

$$S/C\begin{cases} 3y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq 4 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 - 2y_4 \geq 6 \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 2y_4 \geq 10 \\ y_1; y_2; y_3; y_4 \geq 0 \end{cases}$$

4.2. حالة البرنامج الخطي الأولي له صيغة مختلطة بقيود مساواة (=) والمتغيرات غير مقيدة

في هذه الحالة لتحويل برنامج خطي إلى برنامج ثنائي يتم كما يلي:

• تعظيم **(Max)**	• تدنية **(Min)**
• ثنائي (Dual)	• أولي (Primal)
• أولي (Primal)	• ثنائي (Dual)
• القيد من النوع أصغر أو تساوي (≤)	• متغير من النوع أكبر أو تساوي (≥)
• القيد من النوع تساوي (=)	• متغير من النوع مهما كان (qcp، أو ≷)
• القيد من النوع أكبر أو تساوي (≥)	• متغير من النوع أصغر أو تساوي (≤)
• متغير من النوع أكبر أو تساوي (≤)	• القيد من النوع أصغر أو تساوي (≤)
• متغير من النوع مهما كان (qcp، أو ≷)	• القيد من النوع تساوي (=)
• متغير من النوع أصغر أو تساوي (≥)	• القيد من النوع أكبر أو تساوي (≥)

وتختلف حالة تحويل البرنامج الأولي من حالة التعظيم **(Max)** إلى حالة التدنية $(\boldsymbol{Min})$، عن حالة تحويل برنامج أولي من حالة التدنية $(\boldsymbol{Min})$ إلى حالة التعظيم .$(\boldsymbol{Max})$

في حالة الانتقال من حالة التعظيم $(\boldsymbol{Max})$ إلى حالة التدنية $(\boldsymbol{Min})$ في هذه الحالة يجب احترام الشرطين التاليين:

- لمعرفة اتجاة القيود في البرنامج الثنائي يجب قلب أو عكس فقط العمليات من النوع المساواة أو مهما كان (=و/ أو ≷) الموجودة لدى المتغيرات في البرنامج الأولي؛
- لمعرفة إشارة المتغيرات في البرنامج الثنائي يجب قلب أو عكس جميع اتجاهات القيود المشكلة للبرنامج الأولي.

مثال (4.4)

أوجد ثنائية البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$S/C\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_3 \leq 8 \\ x_1 \gtrless 0\ ; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي لهذا البرنامج الأولي يعطى من الشكل التالي:

$$Min\ W = 10y_1 + 7y_2 + 8y_3$$

$$S/C\begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 = 3 \\ 2y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_2 + 3y_3 \geq -2 \\ y_1 \leq 0\ ;\ y_2 \gtreqless 0;\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

في حالة الانتقال من حالة التدنية $(\boldsymbol{Min})$ إلى حالة التعظيم $(\boldsymbol{Max})$ في هذه الحالة يجب احترام الشرطين التاليين:

- لمعرفة اتجاه القيود في البرنامج الثنائي يجب قلب أو عكس جميع إشارات المتغيرات الموجودة في المسألة الأصلية؛
- لمعرفة إشارة المتغيرات في البرنامج الثنائي يجب قلب أو عكس فقط اتجاهات القيود من النوع المساواة أو مهما كان (= و/ أو $\gtreqless$) القيود المشكلة للبرنامج الأولي.

مثال (5.4)

أوجد ثنائية البرنامج الخطي التالي:

$$Min\ Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$
$$S/C\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_3 \leq -10 \\ x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \gtreqless 0;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل

البرنامج الثنائي لهذا البرنامج الأولي يعطى من الشكل التالي:

$$Max\ W = 12y_1 + 8y_2 - 10y_3$$
$$S/C\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ 2y_1 - 3y_2 = 3 \\ y_2 + 2y_3 \leq -2 \\ y_1 \geq 0\ ;\ y_2 \gtreqless 0;\ y_3 \leq 0 \end{cases}$$

3. العلاقة بين جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي

لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الثنائي أو بالأحرى جدول الحل الأمثل للمسألة الثنائية انطلاقاً من المسألة الأصلية نتبع الخطوات الآتي ذكرها:

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة (S_i) في السطر الأخير (ΔZ) من جدول الحل الأمثل للمسألة الأصلية تُساوي قيم المتغيرات الأساسية (متغيرات القرار) (Y_i) المشكلة للمسألة الثنائية على وجه الترتيب وبالقيمة المطلقة؛
- القيم المقابلة للمتغيرات الأساسية (متغيرات القرار) (x_i) في السطر الأخير (ΔZ) من جدول الحل الأمثل للمسألة الأصلية تُساوي قيم متغيرات الفجوة (S_i) المشكلة للبرنامج الثنائي على وجه الترتيب وبالقيمة المطلقة؛
- قيم المتغيرات الأساسية للمسألة الأصلية والتي تظهر في عمود الكميات (B_i) في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي تُساوي قيم السطر الأخير (ΔW) والمقابلة لمتغيرات الفجوة (S_i) من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛
- قيم متغيرات الفجوة والتي تظهر في عمود الكميات (B_i) في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي تُساوي قيم السطر الأخير (ΔW) والمقابلة للمتغيرات الأساسية (متغيرات القرار) (Y_i) من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛
- عدد المتغيرات التي تظهر في مزيج الحل (متغيرات الأساس) في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يُساوي عدد القيود المشكلة له؛
- إذا كانت المسألة الأولية في حالة تعظيم (Max)، فإنه ينشأ في المسألة الثنائية (Min) متغيرات وهمية أو اصطناعية (A_i)، وبالتالي لملأ أعمدة هذه المتغيرات الوهمية نقوم بنسخ قيم أعمدة متغيرات الفجوة (S_i) وبإشارة معكوسة، أي أن

كل عمود يمثل متغيرة فجوة يقابله عمود متغير اصطناعي بنفس القيم لكن بإشارة معكوسة؛

- أسطر مصفوفة متغيرات مزيج الحل الأمثل في البرنامج الثنائي هي أعمدة مصفوفة المتغيرات المقابلة لها في البرنامج الأولي لكن بإشارة معكوسة؛
- قيمة دالة الهدف (Z) في البرنامج الأولي هي نفسها قيمة دالة الهدف في المسألة الثنائية (W).

مثال (6.4)

ليكن البرنامج الخطي الأولي على الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = x_1 + 2x_2$$
$$S.C \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

ويُعطى جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج الأولي كما يلي:

T_3	C_j	1	2	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_1	
2	x_2	0	1	0	1/3	1/3	3
1	x_1	1	0	0	-1/3	2/3	2
0	S_1	0	0	1	-5/3	4/3	2
Z_j		1	2	0	1/3	4/3	Z = 8
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	0	-1/3	-4/3	

الحل

استخراج جدول الحل الأمثل للمسألة الثنائية المقابلة للمسألة الأولية المعطاة أعلاه:

أولا نقوم بإيجاد المسألة الثنائية (Dual) للمسألة الأصلية (Primal)

$$Max\ (W) = 2y_1 + 4y_2 + 5y_3$$
$$S.C \begin{cases} -3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2 \\ y_1; y_2;\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

لدينا جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي وبالتالي يمكننا استخراج المتغيرات الأساسية (متغيرات القرار) ومتغيرات الفجوة المشكلة للبرنامج الثنائي كما يلي:

T_3	C_j	1	2	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_1	
2	x_2	0	1	0	1/3	1/3	3
1	x_1	1	0	0	-1/3	2/3	2
0	S_1	0	0	1	-5/3	4/3	2
Z_j		1	2	0	1/3	4/3	Z = 8
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	0	-1/3	-4/3	
		⬆	⬆	⬆	⬆	⬆	
		S_1	S_2	y_1	y_2	y_3	

ويكون جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي كما يلي

T	C_j	2	4	5	0	0	+M	+M	B_i

CB	YB	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	A_1	A_1	
4	y_2	5/3	1	0	1/3	-1/3	-1/3	1/3	**1/3**
5	y_3	-4/3	0	1	-2/3	-1/3	2/3	1/3	**4/3**
W_j		**0**	**4**	**5**	**-2**	**-3**	**2**	**3**	**W = 8**
$\Delta W = C_j - W_j$		**2**	**0**	**0**	**2**	**3**	**M-2**	**M-3**	

حلول المسألة الثنائية هو كما يلي:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1/3 \\ y_3 = 4/3 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{W = 8}$$

4. تحليل الحساسية

إذا اعتبرنا أن نموذج البرمجة الخطية للمشكلة الأصلية (الثنائية) على النحو التالي:

$$Max.(Min)Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$S.C: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i, i = 1,2,\dots.,m$$

$$X_j \geq 0, J = 1,2,\dots\dots,n$$

حيث تُعتبر C_j، b_i، a_{ij} معلمات النموذج، وعادةً تُعطى في شكل قيم رقمية، ويترتب على قيم هذه المعلمات تحديد الحل الأمثل للمشكلة.

ولكن قيم المعلمات C_j، b_i، a_{ij} أو بعضها قد تتغير نتيجة عوامل اقتصادية أو سياسية أو طبيعية، وقد يُثر هذا التغير على الحل الأمثل Z^*، X_j^*. ولكن في العديد من الحالات لا يُؤثر.

ودراسة تأثير هذا التغير في قيمة معلمة أو أكثر هو ما يُسمى بتحليل الحساسية (Analyse de sensibilité)، وبالتالي فتحليل الحساسية يتناول تأثير التغير في قيم بعض أو كل معلمات النموذج، بحيث يُمكن تحديد الحالات التالية:

- إذا لم يُؤدي التغير في قيم المعلمات إلى تغير في الحل الأمثل Z^*، X_j^*، أي لم يُؤثر على قيمة دالة الهدف، او المتغيرات الأساسية X_j^*، وبالتالي يبقى الحل الأمثل كما هو؛
- إذا أدى التغير إلى عدم تغير المتغيرات الأساسية X_j^*في الحل، ولكن تغير في قيم هذه المتغيرات، وبالتالي تغير قيم Z^*، X_j^*؛
- إذا أدى التغير إلى تغير المتغيرات الأساسية X_j^*في الحل النهائي، وبالتالي تغير الحل الأمثل، أي تغير في المتغيرات X_j^* وتغير قيمة Z^*؛

ويُعتبر تحديد أي حالة من هذه الحالات التي أدى التغير في بعض قيم المعلمات ذو أهمية بالغة بالنسبة لمتخذ القرار، فعلى أساس هذا التحديد يُمكن لمتخذ القرار تحديد سياسته بحيث يُمكن:

- تحديد أنواع الموارد التي يُمكن توفير كميات منها بدون إحداث تغيير في السياسة المتبعة (الحل الحالي للنموذج) وبالتالي إنقاص التكاليف؛
- تحديد أنواع الموارد التي بها ندرة وتُؤثر على السياسة الحالية؛

✍ تحديد ظروف السوق بالنسبة للأسعار (التكاليف، الربح) التي يُمكن أن تُؤثر على تغيير السياسة المتبعة (الحال الحالي).

1.4. التغير في معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف

التغير في معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف سوف يُؤدي إلى بقاء الحل أمثل أو يُصبح غير أمثل، ولمعرفة هل الحل أمثل أم لا عند تغير معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف، يتحتم علينا تحديد الحد الأدنى والحد الأعلى لتغير معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف، والتي ضمن حدودها يبقى الحل أمثل، ولتحديد مدى الأمثلية نتبع الخطوات التالية:

- من جدول الحل الأمثل النهائي نستبدل معامل المتغير الذي نبحث له عن مدى الأمثلية بمعامل مجهول القيمة ونرمز له بالرمز (C_i) حيث: $(i = 1,2,3, \dots \dots \dots, n)$؛
- نُعيد حساب الصف (Z_i) وصف $(C_j - Z_i)$؛
- من صف $(C_j - Z_i)$ نقوم باختبار أمثلية الحل، حيث يجب أن تكون جميع قيم $(C_j - Z_i)$ أقل من أو تُساوي الصفر في حالة دالة الهدف من النوع تعظيم (Max)، أو تكون أكبر أو تُساوي الصفر في حالة دالة الهدف من الشكل التدنية (Min)؛
- يتم حل المتراجحات التي تشكلت في الخطوة السابقة، ومن خلالها يتم تحديد مجال المعامل C_j.

♦ مثال (7.4)

ليكن جدول الحل الأمثل لبرنامج رياضي كما يلي:

T	C_j	15	12	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	0	1	1	$-\frac{2}{9}$	12
15	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	6
12	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	4
Z_j		15	12	0	1	$\frac{9}{2}$	Z=138
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	0	-1	$-\frac{9}{2}$	

- حدد مجال تغيرات معاملات متغيرات دالة الهدف.

♦ الحل

البرنامج الرياضي في حالة التعظيم (Max)، وبالتالي حتى يكون الحل أمثل يجب أن تكون جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أقل أو تُساوي الصفر، ومن خلال الجدول يتضح أن جميع قيم (ΔZ) أقل أو تُساوي الصفر، وبالتالي فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل النهائي.

✍ **تحديد مجال الأمثلية للمتغير (x_1)**

ليكن $(\grave{C}_1)$ معامل المتغير x_1 الذي نرغب في إيجاد مجال الأمثلية له، وبالتالي نتحصل على جدول الحل التالي:

T	C_j	C_1	12	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	0	1	1	$-\frac{2}{9}$	12
$\grave{C}_1$	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	6

12	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	4
$\mathbf{Z_j}$		$\dot{C_1}$	12	0	$\frac{1}{3}\dot{C_1}-4$	$-\frac{1}{2}\dot{C_1}+12$	Z=138
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	0	$-\frac{1}{3}\dot{C_1}+4$	$\frac{1}{2}\dot{C_1}-12$	

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أقل أو تُساوي الصفر. وبالتالي:

$$-\frac{1}{3}\dot{C_1}+4\leq 0\Rightarrow\frac{1}{3}\dot{C_1}\geq 4\Rightarrow\dot{C_1}\geq 12$$

$$\frac{1}{2}\dot{C_1}-12\leq 0\Rightarrow\frac{1}{2}\dot{C_1}\leq 12\Rightarrow\dot{C_1}\leq 24$$

ومنه حتى يبقى الحل أمثل يجب أن يكون مجال تغير معامل المتغير x_1 في دالة الهدف محصوراً بين 12 و 24 أي:

$$12\leq\dot{C_1}\leq 24$$

طريقة ثانية

$\Delta x_1\rightarrow$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\mathbf{Z_j}\rightarrow$	15	12	0	1	$\frac{9}{2}$

$$1.\Delta+15\geq 0\Rightarrow\Delta\geq -15$$

$$\frac{1}{3}.\Delta+1\geq 0\Rightarrow\frac{1}{3}.\Delta\geq -1\Rightarrow\Delta\geq -3$$

$$-\frac{1}{2}.\Delta+\frac{9}{2}\geq 0\Rightarrow-\frac{1}{2}.\Delta\geq-\frac{9}{2}\Rightarrow\Delta\geq 9$$

$-\infty$	$\mathbf{-15}$	$\mathbf{-3}$	$\mathbf{9}$	$+\infty$
	////////////////////	////////////////////	////////////////////	////////////////////
		\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\	\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\	\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\
			|||||||||||||||||||||	|||||||||||||||||||||

$$\Rightarrow\Delta\in[-3;\ +9]$$

ومنه يُمكن تغيير المعامل C_1 ضمن المجال $[15-3;\ 15+9]$، أي ان تغير الربح الوحدوي لـ C_1 من 12 إلى 24، سوف يسمح ببقاء الحل الأمثل ثابتاً.

طريقة ثالثة

لتحديد مجال تغير معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف نتبع الخطوات الآتية:

- نحدد المتغير الذي نقوم بإجراء تحليل الحساسية له؛
- نقوم بقسمة السطر (Z_j) على صف المتغير الأساسي الداخل في الحل؛
- نُحدد أصغر قيمة موجبة ونطرحها من معامل المتغير في دالة الهدف لتمثل الحد الأدنى لمدى تغير هذا المتغير؛
- نُحدد أصغر قيمة سالبة ثم نضيفها بالقيمة المطلقة إلى معامل المتغير في دالة الهدف لتُمثل الحد الأعلى لمدى التغير بالنسبة لهذا المتغير.

$\mathbf{Z_j}$	15	12	0	1	$\frac{9}{2}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\mathbf{Z_j}}{x_1}$	15	/	/	3	-9

$$\underset{(+)}{\text{Min}}\{15;\ 3\} = 3$$
$$\underset{(-)}{\text{Min}}\{-9\} = -9$$

الحد الأدنى لمدى تغير معامل المتغير x_1 يُساوي $15 - 3 = 12$

الحد الأعلى لمدى تغير معامل المتغير x_1 يُساوي $15 + |-9| = 24$

$$12 \le C_1 \le 24$$

تحديد مجال الأمثلية للمتغير (x_2)

طريقة أولى

ليكن $(\grave{C}_2)$ معامل المتغير x_2 الذي نرغب في إيجاد مجال الأمثلية له، وبالتالي نتحصل على جدول الحل التالي:

T	C_j	**15**	$\grave{C}_2$	**0**	**0**	**0**	B_i
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	0	1	1	$-\frac{2}{9}$	12
15	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	6
$\grave{C}_2$	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	4
Z_j		15	12	0	$5-\frac{1}{3}\grave{C}_2$	$-\frac{15}{2}+\grave{C}_2$	Z=138
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	0	$-5+\frac{1}{3}\grave{C}_2$	$\frac{15}{2}-\grave{C}_2$	

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أقل أو تُساوي الصفر. وبالتالي:

$$-5+\frac{1}{3}\grave{C}_2 \le 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\grave{C}_2 \le 5 \Rightarrow \grave{C}_2 \le 15$$
$$\frac{15}{2}-\grave{C}_2 \le 0 \Rightarrow \grave{C}_2 \ge \frac{15}{2}$$

ومنه حتى يبقى الحل أمثل يجب أن يكون مجال تغير معامل المتغير x_2 في دالة الهدف محصوراً بين $\frac{15}{2}$ و 15 أي:

$$\frac{15}{2} \le \grave{C}_2 \le 15$$

طريقة ثانية

$\Delta x_2 \longrightarrow$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1
$Z_j \longrightarrow$	15	12	0	1	$\frac{9}{2}$

$$1.\Delta + 12 \ge 0 \Rightarrow \Delta \ge -12$$
$$-\frac{1}{3}.\Delta + 1 \ge 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}.\Delta \ge -1 \Rightarrow \Delta \ge 3$$
$$1.\Delta + \frac{9}{2} \ge 0 \Rightarrow \Delta \ge -\frac{9}{2}$$

$-\infty$	-12	$-\frac{9}{2}$	3	$+\infty$
	////////////////////	////////////////////	////////////////////	////////////////////
		\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\	\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\	\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\

$$\Rightarrow \Delta \in \left[-\frac{9}{2};\ +3\right]$$

ومنه يُمكن تغيير المعامل C_2 ضمن المجال $\left[12+3\ ;\ 12-\frac{9}{2}\right]$، أي ان تغير الربح الوحدوي لـ C_2 من $\frac{15}{2}$ إلى 15، سوف يسمح ببقاء الحل الأمثل ثابتاً.

تحديد مجال الأمثلية للمتغير (S_1)

طريقة أولى

ليكن $(\grave{C}_3)$ معامل المتغير S_1 الذي نرغب في إيجاد مجال الأمثلية له، وبالتالي نتحصل على جدول الحل التالي:

T	C_j	15	12	$\grave{C}_3$	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
$\grave{C}_3$	S_1	0	0	1	1	$-\frac{2}{9}$	12
15	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	6
12	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	4
Z_j		15	12	$\grave{C}_3$	$\grave{C}_3+1$	$-\frac{2}{9}\grave{C}_3+\frac{9}{2}$	Z=138
$\Delta Z=C_j-Z_j$		0	0	0	$-\grave{C}_3-1$	$\frac{2}{9}\grave{C}_3-\frac{9}{2}$	

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أقل أو تُساوي الصفر. وبالتالي:

$$-\grave{C}_3-1\le 0\Rightarrow -\grave{C}_3\le -1\Rightarrow \grave{C}_3\ge 1$$
$$\frac{2}{9}\grave{C}_3-\frac{9}{2}\le 0\Rightarrow \frac{2}{9}\grave{C}_3\le \frac{9}{2}\Rightarrow \grave{C}_3\le \frac{81}{4}$$

ومنه حتى يبقى الحل أمثل يجب أن يكون مجال تغير معامل المتغير S_1 في دالة الهدف محصوراً بين 1 و $\frac{81}{4}$ أي:

$$1\le \grave{C}_3\le \frac{81}{4}$$

تحديد مجال الأمثلية للمتغير (S_2)

ليكن $(\grave{C}_4)$ معامل المتغير خارج الأساس S_2 الذي نرغب في إيجاد مجال الأمثلية له:

حتى يبقى الحل أمثل يجب أن يكون المعامل $\grave{C}_4$ لا يتعدى القيمة Z_4، أي $(\grave{C}_4\le 1)$، وعليه فإن مجال تغير معامل المتغيرة خارج الأساس S_2 هو $]-\infty;1]$ أي ان: $\grave{C}_4\in\ ]-\infty;1]$.

كما يُمكننا الوصول إلى مجال تغير معامل المتغير خارج الأساس S_2 والذي هو $]-\infty;1]$ كما يلي:

معامل المتغير خارج الأساس S_2 هو $C_4=0$. وهذا الأخير قد يتغير بمقدار (موجب أو سالب) يُساوي ΔC_4، فيُصبح $\grave{C}_4$ حيث أن: $\grave{C}_4=C_4+\Delta C_4$ أي: $\grave{C}_4=0+\Delta C_4$، وبتعويض $C_4=0$ بـ: $\grave{C}_4=0+\Delta C_4$ في جدول الحل الأمثل نتحصل على ما يلي:

T	C_j	15	12	0	$\grave{C}_4=0+\Delta C_4$	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	0	1	1	$-\frac{2}{9}$	12
15	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	6
12	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	4
Z_j		15	12	0	1	$\frac{9}{2}$	Z=138

$\Delta Z = C_j - Z_j$	0	0	0	$0 + \Delta C_4 - 1$	$-\frac{9}{2}$	

إذا تغير معامل متغيرة خارج الأساس، فإن القيم التي تتغير في جدول الحل الأمثل هي القيمة $(C_j - Z_j)$ المقابلة لمتغيرة خارج الأساس الذي تغير معاملها، أي الذي يتغير هو $(C_j - Z_j)$ المقابل للمتغيرة خارج الأساس S_2 أي $(C_4 - Z_4)$، حيث يُصبح $(\dot{C_4} - Z_4)$، حيث أن: $\dot{C_4} - Z_4 = 0 + \Delta C_4 - 1$. ويبقى جدول الحل أمثل إذا تحقق شرط الحل الأمثل التالي:

$$\dot{C_4} - Z_4 \leq 0$$

$$\dot{C_4} - Z_4 \leq 0 \Longrightarrow 0 + \Delta C_4 - 1 \leq 0 \Longrightarrow \Delta C_4 \leq 1$$

وهذا يعني أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول يبقى حلاً أمثل مادام مقدار تغير معامل متغيرة خارج الأساس S_2 أقل أو يُساوي 1، أي إذا تعدى مقدار التغير القيمة 1، فإن الحل الأمثل يُصبح حل غير أمثل.

لدينا: $\Delta C_4 \leq 1$ وبإضافة القيمة 0 للطرفين يُصبح: $0 + \Delta C_4 \leq 1 \Longrightarrow 0 + \Delta C_4 \leq 0 + 1$، ونعلم أن: $\dot{C_4} = 0 + \Delta C_4$ إذن يُصبح لدينا ما يلي: $\dot{C_4} \leq 1$ والذي يُكتب: $\dot{C_4} \in]-\infty; 1]$.

تحديد مجال الأمثلية للمتغير (S_3)

ليكن $(\dot{C_5})$ معامل المتغير خارج الأساس S_5 الذي نرغب في إيجاد مجال الأمثلية له:

حتى يبقى الحل أمثل يجب أن يكون المعامل $\dot{C_5}$ لا يتعدى القيمة Z_5، أي $(\dot{C_5} \leq \frac{9}{2})$، وعليه فإن مجال تغير معامل المتغيرة خارج الأساس S_5 هو $]-\infty; \frac{9}{2}]$ أي ان: $\dot{C_5} \in]-\infty; \frac{9}{2}]$.

كما يُمكننا الوصول إلى مجال تغير معامل المتغير خارج الأساس S_3 والذي هو $]-\infty; \frac{9}{2}]$ كما يلي:

معامل المتغير خارج الأساس S_3 هو $C_5 = 0$. وهذا الأخير قد يتغير بمقدار (موجب أو سالب) يُساوي ΔC_5، فيُصبح $\dot{C_5}$ حيث أن: $\dot{C_5} = C_5 + \Delta C_5$ أي: $\dot{C_5} = 0 + \Delta C_5$، وبتعويض $C_5 = 0$ بـ: $\dot{C_5} = 0 + \Delta C_5$ في جدول الحل الأمثل نتحصل على ما يلي:

T	C_j	15	12	0	0	$\dot{C_5} = 0 + \Delta C_5$	B_i
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	0	1	1	$-\frac{2}{9}$	12
15	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	6
12	x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	4
Z_j		15	12	0	1	$\frac{9}{2}$	Z=138
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	0	-1	$0 + \Delta C_5 - \frac{9}{2}$	

إذا تغير معامل متغيرة خارج الأساس، فإن القيم التي تتغير في جدول الحل الأمثل هي القيمة $(C_j - Z_j)$ المقابلة لمتغيرة خارج الأساس الذي تغير معاملها، أي الذي يتغير هو $(C_j - Z_j)$ المقابل للمتغيرة خارج الأساس S_3 أي $(C_5 - Z_5)$، حيث يُصبح $(\dot{C_5} - Z_5)$، حيث أن: $\dot{C_5} - Z_5 = 0 + \Delta C_5 - \frac{9}{2}$. ويبقى جدول الحل أمثل إذا تحقق شرط الحل الأمثل التالي:

$$\dot{C_5} - Z_5 \leq 0$$

$$\dot{C_5} - Z_5 \leq 0 \Longrightarrow 0 + \Delta C_5 - \frac{9}{2} \leq 0 \Longrightarrow \Delta C_5 \leq \frac{9}{2}$$

وهذا يعني أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول الأول يبقى حلاً أمثل مادام مقدار تغير معامل متغيرة خارج الأساس S_3 أقل أو يُساوي $\frac{9}{2}$، أي إذا تعدى مقدار التغير القيمة $\frac{9}{2}$، فإن الحل الأمثل يُصبح حل غير أمثل.

لدينا: $\Delta C_5 \leq \frac{9}{2}$ وبإضافة القيمة 0 للطرفين يُصبح: $0 + \Delta C_5 \leq \frac{9}{2} \Longrightarrow 0 + \Delta C_5 \leq 0 + \frac{9}{2}$، ونعلم أن: $\hat{C}_5 = 0 + \Delta C_5$ إذن يُصبح لدينا ما يلي: $\hat{C}_5 \leq \frac{9}{2}$ والذي يُكتب: $\hat{C}_5 \in \left]-\infty; \frac{9}{2}\right]$.

2.4. التغيرات في الطرف الأيمن للقيود الهيكلية

قبل أن ندرس تأثير التغير في واحد على الأقل من قيم الطرف الأيمن للقيود الهيكلية، أي حدوث تغير في b_i، لابد أن نعرف أنواع القيود في الحل الأمثل Z^*، X_j^* (الحل الحالي).

- يُقال أن القيد رقم (i) $\left(\sum_j a_{ij}X_j \lessgtr b_i\right)$ قيد حرج، إذا أدى حدوث أي تغير في b_i إلى حدوث تغير في الحل الأمثل، ويكون القيد حرج إذا تحقق في صورة معادلة (معادلة في الحل الأمثل) بمعنى $(\sum_j a_{ij}X_j = b_i)$.
- يُقال أن القيد رقم (i) $\left(\sum_j a_{ij}X_j \lessgtr b_i\right)$ قيد غير حرج، إذا حدث أي تغير في قيمة b_i سوف لا يُؤدي إلى حدوث تغير في الحل الأمثل، ويكون القيد غير حرج إذا تحقق في صورة متراجحة ($<$ أو $>$) وليس في شكل معادلة.

لتحديد مدى التغير بالنسبة إلى الطرف الأيمن من القيود الهيكلية وحتى يبقى الحل أمثل نتبع الخطوات التالية:

- نُحدد العمود الذي يُمثل القيد؛
- نقوم بقسمة عمود الثوابت (b_i) على عمود المتغير؛
- نأخذ أصغر قيمة موجبة ونطرحها من قيمة الثابت في الطرف الأيمن من القيود الهيكلية ونحصل على الحد الأعلى؛
- نأخذ أصغر قيمة سالبة ونُضيفها بالقيمة المطلقة إلى قيمة الثابت في الطرف الأيمن من القيود الهيكلية ونحصل على الحد الأدنى.

مثال (8.4)

ليكن البرنامج الرياضي الخطي من الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 16x_1 + 12x_2$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 5000 \\ 10x_1 + 4x_2 \leq 8000 \\ x_1 \leq 700 \\ x_2 \leq 1900 \\ x_1;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وليكن جدول الحل الأمثل التالي:

T_3	C_j	16	12	0	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_3	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	100
12	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	500
16	x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	600
0	S_4	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	1400
Z_j		16	12	$\frac{14}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	Z=15600
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	

المطلوب

- إيجاد المصفوفة C؛
- أوجد حدود التغيرات الممكن حدوثها في الطرف الأيمن للقيدين (3) و (4)، بحيث لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.
- أوجد حدود التغيرات الممكن حدوثها في الطرف الأيمن للقيد (1)، بحث لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

الحل

إيجاد المصفوفة C

إن التغير في بعض أو كل معلمات الطرف الأيمن (b_i) بحيث $(i = 1,2, \dots \dots, m)$ يُؤثر على شرط الإمكانية، فقد يُؤدي إلى تغير في الحل الأمثل الحالي، أو قد يُؤدي إلى عدم تغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل (X_j^*) و (Z^*) ولكن لا يُؤدي إلى تغير في قيمهم.

فإذا اعتبرنا جدول الحل الأمثل الحالي، واعتبرنا المصفوفة C، حيث تُمثل أعمدة المصفوفة المتغيرات المكملة أو المصطنعة المناظرة لـ (b_i)، $(i = 1,2, \dots \dots, m)$، التي تُمثل متغيرات أساسية في الحل المبدئي، وتُمثل صفوف المصفوفة المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل الحالي، حيث العنصر C_{ik} يُشير إلى العنصر المناظر للمتغير الأساسي (i)، والمتغير أو المصطنع (k)، أي المناظر للقيد رقم (k).

المصفوفة C هي معكوس مصفوفة معاملات المتغيرات الأساسية في القيود الهيكلية، أي $(C = B^{-1})$، حيث: $(X_B^* = B^{-1}b)$.

فإذا أشرنا إلى الطرف الأيمن للقيد رقم (k) بالرمز b_k فإذا حدث تغير في b_k بمقدار Δ_k المسموح بها حتى تظل المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل هي نفسها المتغيرات، ولكن بقيم مختلفة، يُمكن اشتقاقها من العلاقة التالية:

$$\underset{C_{ik}}{\text{Max}}\left\{\frac{-X_{Bi}}{C_{ik}}\right\} or\ 0 \leq \Delta_k \leq \underset{C_{ik}}{\text{Min}}\left\{\frac{-X_{Bi}}{C_{ik}}\right\} or\ 0$$

حيث تُشير X_{Bi} إلى قيمة المتغير الأساسي رقم (i) في الحل الأمثل الحالي، ويُمكن تحديد القيم للمتغيرات الأساسية X_B^* بعد إحداث التغير في b من العلاقة التالية:

$$X_B^* = C(b + \Delta)$$

حيث: X_B^* متجه المتغيرات الأساسية، $(b + \Delta)$ يُشير إلى متجه الطرف الأيمن بعد التغير في قيم b_i.

من جدول الحل الأمثل نجد أن المصفوفة C تُكتب على النحو التالي:

$$\begin{matrix} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (100)\ S_1^* \\ (500)\ S_2^* \\ (600)\ S_3^* \\ (1400)\ S_4^* \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ايجاد حدود التغيرات الممكن حدوثها في الطرف الأيمن للقيدين (3) و (4)، بحيث لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

$$Max.\left\{\frac{-100}{1}, -, -, -\right\} \leq \Delta_3 \longrightarrow \Delta_3 \geq -100$$

أو:

ΔS_3	B_i
1	100
0	500
0	600
0	1400

$$1.\Delta + 100 \geq 0 \Longrightarrow \Delta \geq -100$$

$$\grave{b}_3 = b_3 + \Delta = 700 - 100 = 600$$

ومنه الطاقة الإنتاجية للقيد الثالث تتغير ضمن المجال $[600;\ 700]$

كذلك:

$$Max.\left\{-, -, -, \frac{-1400}{1}\right\} \leq \Delta_4 \longrightarrow \Delta_4 \geq -1400$$

أو

S_4	B_i
0	100
0	500
0	600
1	1400

$$1.\Delta + 1400 \geq 0 \Longrightarrow \Delta \geq -1400$$

$$\grave{b}_4 = b_4 + \Delta = 1900 - 1400 = 500$$

ومنه الطاقة الإنتاجية للقيد الرابع تتغير ضمن المجال $[500;\ 1900]$

ايجاد حدود التغيرات الممكن حدوثها في الطرف الأيمن للقيد (1)، بحث لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

$$Max.\left\{\frac{-100}{1/5}\ ;\ \frac{-500}{1/2}\right\} \leq \Delta_1 \leq Min.\left\{\frac{-600}{-1/5}; \frac{-1400}{-1/2}\right\}$$

$$\Longrightarrow\ -500 \leq \Delta_1 \leq 2800$$

وبما أن $b_1 = 5000$ وبالتالي فإن المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل لا تتغير عندما يُصبح $4500 \leq b_1 \leq 7800$، ولكن تتغير قيم المتغيرات الأساسية فقط.

أو:

ΔS_1	B_i
$\frac{1}{5}$	100
$\frac{1}{2}$	500
$-\frac{1}{5}$	600
$-\frac{1}{2}$	1400

$$\frac{1}{5}.\Delta + 100 \geq 0 \Longrightarrow \frac{1}{5}.\Delta \geq -100 \Longrightarrow \Delta \geq -500$$

$$\frac{1}{2}.\Delta + 500 \geq 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}.\Delta \geq -500 \Longrightarrow \Delta \geq -1000$$

$$-\frac{1}{5}.\Delta + 600 \geq 0 \Longrightarrow -\frac{1}{5}.\Delta \geq -600 \Longrightarrow \Delta \geq 3000$$

$$-\frac{1}{2}.\Delta + 1400 \geq 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2}.\Delta \geq -1400 \Longrightarrow \Delta \geq 2800$$

- نأخذ أصغر قيمة موجبة ونُضيفها إلى قيمة الثابت في الطرف الأيمن من القيود الهيكلية ونحصل على الحد الأعلى؛

$$\underset{(+)}{\text{Min}}\{2800\ ;\ \ 3000\} = 2800$$

الحد الأعلى يُساوي $5000 + 2800 = 7800$

- نأخذ أصغر قيمة سالبة ونطرحها من قيمة الثابت في الطرف الأيمن من القيود الهيكلية ونحصل على الحد الأدنى.

الحد الأدنى يُساوي $5000\text{-}500 = 4500$

3.4. إضافة متغير أو متغيرات جديدة

إن إضافة متغيرة جديد سيؤثر على أمثلية المسألة، حيث أنها ستضيف معاملات جديدة إلى دالة الهدف وقيود المسألة، وقد تكون متغيرة أساس لها دور في تحسين الحل (قيمة دالة الهدف)، أو متغيرة خارج الأساس ليس لها القدرة على تحسين قيمة الحل الأمثل.

ويبقى الحل أمثلاً طالما كانت Cj للمتغيرة المضافة تحقق شرط الأمثلية (سالبة في نموذج التعظيم، وموجبة في نموذج التدنية)، حيث يمكن حسابها وفق العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{C'_j = C_j - C_{j\,base} \times B^{-1} \times a_i}$$

حيث:

C'_j: معامل المتغيرة الجديدة في جدول الحل الأمثل؛

C_j: معامل المتغيرة الجديدة في دالة الهدف؛

$C_{j\,base}$: معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف؛

B^{-1}: معكوس المصفوفة B وتمثل معاملات متغيرات الفجوة في جدول الحل الأمثل؛

a_i: معاملات المتغيرة الجديدة في القيود الوظيفية.

مثال (9.4)

ليكن البرنامج الرياضي الخطي من الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 100x_1 + 60x_2 + 80x_3$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 1200 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 1000 \\ 4x_1 + 12x_2 + x_3 \leq 3800 \\ x_1;\ x_2;\ x_3; \geq 0 \end{cases}$$

نفرض أن المؤسسة تود إنتاج منتج آخر x_4، يحقق ربحا قدره 55 وحدة، كما أن إنتاجه يتطلب 4,5 وحدات من المورد الأول، ووحدتين من المورد الثاني و 3 وحدات من المورد الثالث.

الحل

يُصبح البرنامج الرياضي بعد إضافة متغير جديد من الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 100x_1 + 60x_2 + 80x_3 + 55x_4$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4{,}5x_4 \leq 1200 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 1000 \\ 4x_1 + 12x_2 + x_3 + 3x_4 \ \leq 3800 \\ x_1;\ x_2;\ x_3; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

بتطبيق العلاقة أعلاه نحصل على:

$$C'_4 = 55 - (100 \quad 60 \quad 0) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{8}{3} & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$55 - 70 = -15 < 0$$

بما أن قيمة Cj سالبة (تحقق شرط الأمثلية لنموذج التعظيم) فذلك يعني أن إنتاج هذا المنتج غير اقتصادي، أي أن إنتاج كل وحدة واحدة منه ستؤدي إلى تخفيض الأرباح بمقدار 15 وحدة، ما يعني أنه عبارة عن متغيرة خارج الأساس، أي ليس لها أي تأثير على قيمة الحل الأمثل.

T_3	C_j	100	60	80	55	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	S_3	
100	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	150
60	x_2	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	100
00	S_3	0	0	-6	-1	$\frac{8}{3}$	-5	1	2000
Z_j		100	60	110	70	$\frac{40}{3}$	5	0	**Z=21000**
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	-30	-15	$-\frac{40}{3}$	-5	0	

4.4. إضافة قيد أو قيود جديدة.

من الطبيعي جداً أن إضافة قيد جديد إلى المسألة الرياضية سيؤثر على مزيج الحل الأساسي، وكذلك على قيمة الدالة الاقتصادية (دالة الهدف).

مثال (10.4)

ليكن البرنامج الخطي الرياضي التالي:

$$Max\ (Z) = 40x_1 + 30x_2 + 25x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 360 \\ x_1;\ x_2;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

وليكن جدول الحل النهائي الأمثل كما يلي:

T_3	C_j	40	30	25	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
25	x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	70
0	S_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	10

40	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	30
Z_j		40	32,5	25	2,5	0	7,5	**Z=2950**
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	-2,5	0	-2,5	0	-7,5	

نرغب في إضافة قيد جديد للبرنامج الخطي كما يلي:

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 300$$

المطلوب

أُدرس تأثير إضافة القيد الجديد على برنامج الحل الأمثل

- **الحل**

نقوم بتحويل القيد الجديد إلى صيغته النموذجية كما يلي:

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + S_4 = 300$$

متغير الفجوة S_4 يكون متغير أساسي عند الحل الأولي أي داخل في الحل، وتكون قيم صفه المقابلة للمتغيرات الأخرى كما يلي:

$$(3 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 300)$$

سنقوم بدراسة تأثير دخول المتغيرتين (x_1) و (x_3) على صف متغيرة الفجوة (S_4) الجديد معتمدين على نتائج الحل النهائي قبل إضافة القيد كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 300 \end{pmatrix} - \left[2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 70 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 70 \end{pmatrix}$$

وعلى أساس هذه النتائج يكون جدول الحل الأمثل بعد إضافة القيد الجديد كما يلي:

T_3	C_j	40	30	25	0	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
25	x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	70
0	S_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	**0**	10
40	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	**0**	30
0	S_4	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	**1**	70
Z_j		40	32,5	25	2,5	0	7,5	0	**Z=2950**
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	-2,5	0	-2,5	0	-7,5	0	

كل قيم سطر التقييم (ΔZ) أقل أو تساوي الصفر، وبالتالي الحل أمثل، أي أن في هذه الحالة إضافة قيد جديد لم يُؤثر على برنامج الحل الأمثل، ولم يُؤثر على قيمة دالة الأرباح.

تمارين الفصل الرابع

التمرين الأول

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي الأولي التالي:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 100 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي الأولي التالي:

$$Max\ (Z) = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثالث

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي الأولي التالي:

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ 2x_1 - x_2 \geq 10 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الرابع

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي الأولي التالي:

$$Min\ (Z) = 5x_1 + 2x_2$$
$$S.C \begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 50 \\ x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 2x_1 - 2x_2 = 70 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الخامس

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي الأولي التالي:

$$Max\ (Z) = 5x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 150 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 200 \\ x_1 \gtreqless 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين السادس

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي الأولي التالي:

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 50 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 \gtreqless 0; x_2 \leq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين السابع

ليكن البرنامج الرياضي الأولي **(Primal)** من الشكل التالي:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$
$$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

وليكن جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج الأولي كما يلي:

T_1	C_j	2	4	1	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	-1	0	-3	1	0	-2	**10**
0	S_2	-3	0	-3	0	1	-1	**5**
4	x_2	1	1	2	0	0	1	**10**
$C_j - Z_j$		4	4	8	0	0	4	**Z = 40**
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**-2**	**0**	**-7**	**0**	**0**	**-4**	

✍ أوجد البرنامج الثنائي **(Dual)** للبرنامج الأولي **(Primal)**؛

✍ من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي **(Primal)** أوجد جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي **(Dual)**؛

✍ أوجد حلول البرنامج الثنائي **(Dual)**.

التمرين الثامن

ليكن البرنامج الخطي الأولي كما يلي:

$$Max\ (Z) = 4x_1 + 4x_2 + 2x_3$$
$$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

وليكن جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج الأولي كما يلي:

T_1	C_j	4	4	2	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
4	x_2	0	1	$1/3$	$2/3$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{100}{3}$
4	x_1	1	0	$1/3$	$\frac{-1}{3}$	$2/3$	0	$\frac{40}{3}$
0	S_3	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{160}{3}$
$C_j - Z_j$		4	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$Z = \frac{560}{3}$
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**0**	**0**	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-4}{3}$	**0**	

✍ أوجد البرنامج الثنائي **(Dual)** للبرنامج الأولي **(Primal)**؛

✍ انطلاقاً من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي **(Primal)**، استنتج جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي **(Dual)**؛

✍ أوجد حلول البرنامج الثنائي **(Dual)**.

التمرين التاسع

ليكن البرنامج الخطي الأولي كما يلي:

$$Min\ (Z) = 6x_1 + 4x_2 + 10x_3$$
$$S/C \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 65 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

وليكن جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج الأولي كما يلي:

T_2	C_j	6	4	10	0	0	M	M	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_2	
6	x_1	1	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{50}{3}$
4	x_2	0	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$
0	S_2	0	0	-3	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{35}{3}$
$C_j - Z_j$		6	4	6	$\frac{-4}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$	$Z = \frac{380}{3}$
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	4	$\frac{4}{3}$	0	$M - \frac{4}{3}$	$M - \frac{10}{3}$	

✍ أوجد البرنامج الثنائي **(Dual)** للبرنامج الأولي **(Primal)**؛

✍ انطلاقاً من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي **(Primal)**، استنتج جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي **(Dual)**؛

✍ أوجد حلول البرنامج الثنائي **(Dual)**.

التمرين العاشر

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

وليكن جدول الحل الأمثل التالي:

T_3	C_j	2	4	3	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
4	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$
3	x_3	$\frac{5}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{50}{3}$
0	S_3	$-\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{80}{3}$

$C_j - Z_j$	$\frac{23}{6}$	4	3	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	$\mathbf{Z = \frac{230}{3}}$
$\Delta Z = C_j - Z_j$	$-\frac{11}{6}$	**0**	**0**	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$	**0**	

المطلوب

- أوجد مدى التغير بالنسبة إلى المتغيرات الأساسية؛
- أوجد مدى التغير بالنسبة إلى الإمكانيات المتاحة.

حلول تمارين الفصل الرابع

التمرين الأول

ايجاد البرنامج الثنائي للبرنامج الرياضي الأولي التالي:

- البرنامج الأولي (Primal)

$$Max\ (Z) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$S.C: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 100 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- البرنامج الثنائي (Dual)

$$Min\ (W) = 80y_1 + 100y_2 + 60y_3$$
$$S.C: \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ y_1; y_2; y_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني

ايجاد البرنامج الثنائي للبرنامج الرياضي الأولي التالي:

- البرنامج الأولي (Primal)

$$Max\ (Z) = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3$$
$$S.C: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

قبل ايجاد البرنامج الثنائي لهذا البرنامج الأصلي يجب تحويل الصيغة المختلطة للبرنامج الأولي إلى الصيغة القانونية كما يلي:

نلاحظ أن القيد الثاني للبرنامج الأولي لا يحقق شرط القانونية، لأن من شرط القانونية في حالة التعظيم (Max) يجب أن تكون جميع القيود أقل أو تساوي $(\leq b_i)$.

لتحويل المتراجحة رقم (2) من أكبر إلى أصغير يجب ضرب طرفي القيد أو المتراجحة في العدد (-1) كما يلي:

$$(-1)-x_1 + (-1)x_2 + (-1)x_3 \geq (-1)12 \Leftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 \leq -12$$

وبالتالي يصبح البرنامج الأولي بالصيغة القانونية التالية:

$$Max\ (Z) = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3$$
$$S.C: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq -12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

من هذا البرنامج الأولي يمكننا استنتاج البرنامج الثنائي:

- البرنامج الثنائي (Dual)

$$Min\ (W) = 10y_1 - 12y_2 + 30y_3$$
$$S.C: \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4 \\ y_1 - y_2 + y_3 \geq 2 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ y_1; y_2; y_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثالث

✍ ايجاد البرنامج الثنائي للبرنامج الرياضي الأولي التالي:

- البرنامج الأولي (Primal)

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$S.C: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ 2x_1 - x_2 \geq 10 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- البرنامج الثنائي (Dual)

$$Max\ (W) = 12y_1 + 18y_2 + 10y_3$$
$$S.C: \begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 3 \\ y_1; y_2; y_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الرابع

✍ **ايجاد البرنامج الثنائي للبرنامج الرياضي الأولي التالي**

- البرنامج الأولي (Primal)

$$Min\ (Z) = 5x_1 + 2x_2$$
$$S.C: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 50 \\ x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 2x_1 - 2x_2 = 70 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

قبل ايجاد البرنامج الثنائي لهذا البرنامج الأصلي يجب تحويل الصيغة المختلطة للبرنامج الأولي إلى الصيغة القانونية كما يلي:

نلاحظ أن القيد الثاني لا حقق شرط القانونية للبرنامج الأولي ولتحقيق شرط القانونية يجب ضرب طرفي المتراجحة في العدد (-1)

$$(-1)x_1 + (-1)3x_2 \leq (-1)24 \Leftrightarrow -x_1 - 3x_2 \geq -24$$

القيد الثالث هو قيد كيفي وبالتالي فهو ينقسم إلى قيدين كما يلي:

$$2x_1 - 2x_2 = 70 \dots\dots(3) \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x_1 - 2x_2 \geq 70 \dots\dots..(4) \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 70 \dots\dots..(5) \end{matrix}$$

المتراجحة رقم (5) لا تحقق شرط القانونية وبالتالي يجب ضرب طرفي هذه المتراجحة في العدد (-1) كما يلي:

$$(-1)2x_1 - (-1)2x_2 \leq (-1)70 \Leftrightarrow -2x_1 + 2x_2 \geq -70$$

وبالتالي يصبح البرنامج الأولي من الشكل التالي:

- **البرنامج الأولي (Primal)**

$$Min\ (Z) = 5x_1 + 2x_2$$
$$S.C: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 50 \\ -x_1 - 3x_2 \geq -24 \\ 2x_1 - 2x_2 \geq 70 \\ -2x_1 + 2x_2 \geq -70 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

أما البرنامج المقابل لهذا البرنامج الأولي فسيكون من الشكل التالي:

$$Max\ (W) = 50y_1 - 24y_2 + 70y_3 - 70y_4$$
$$S.C: \begin{cases} -2y_1 - y_2 + 2y_3 - 2y_4 \leq 5 \\ y_1 - 3y_2 - 2y_3 + 2y_4 \leq 2 \\ y_1; y_2; y_3; y_4 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الخامس

✍ **ايجاد البرنامج الثنائي للبرنامج الرياضي الأولي التالي:**

- **البرنامج الأولي (Primal)**

$$Max\ (Z) = 5x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$S.C: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 150 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 200 \\ x_1 \gtreqless 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

في هذه الحالة نلاحظ ان المتغيرات غير مقيدة وبالتالي للانتقال من Max إلى Min يجب احترام شرطين أساسيين هما؛

✍ لمعرفة اتجاة القيود في البرنامج الثنائي يجب قلب أو عكس فقط العمليات من النوع المساواة أو مهما كان ($=$ و/ أو $\gtreqless$) الموجودة لدى المتغيرات في البرنامج الأولي؛

✍ لمعرفة إشارة المتغيرات في البرنامج الثنائي يجب قلب أو عكس جميع اتجاهات القيود المشكلة للبرنامج الأولي.

وبالتالي يكون البرنامج الثنائي (Dual) كما يلي:

$$Min\ (W) = 120y_1 + 150y_2 + 200y_3$$
$$S.C: \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = 120 \\ 2y_1 + y_2 + xy_3 \geq 150 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 200 \\ y_1 \geq 0; y_2 \leq 0; y_3 \gtreqless 0 \end{cases}$$

التمرين السادس

✍ **ايجاد البرنامج الثنائي للبرنامج الرياضي الأولي التالي:**

- **البرنامج الأولي (Primal)**

$$Min\ (Z) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$S.C: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 50 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 \gtreqless 0; x_2 \leq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

في حالة الانتقال من حالة التدنية $(\boldsymbol{Min})$ إلى حالة التعظيم $(\boldsymbol{Max})$ في هذه الحالة يجب احترام الشرطين التاليين:

✍ لمعرفة اتجاه القيود في البرنامج الثنائي يجب قلب أو عكس جميع إشارات المتغيرات الموجودة في المسألة الأصلية؛

✍ لمعرفة إشارة المتغيرات في البرنامج الثنائي يجب قلب أو عكس فقط اتجاهات القيود من النوع المساواة أو مهما كان ($=$ و/ أو $\gtreqless$) القيود المشكلة للبرنامج الأولي.

$$Max\ (W) = 20y_1 + 50y_2 + 10y_3$$
$$S.C: \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 = 2 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 4 \\ y_1 \leq \mathbf{0}; y_2 \geq 0; y_3 \gtreqless 0 \end{cases}$$

التمرين السابع

✍ **ايجاد البرنامج الثنائي (Dual) للبرنامج الأولي (Primal)؛**

Primal	Dual
$\text{Max (Z)} = 2x_1 + 4x_2 + x_3$	$\text{Min (W)} = 30y_1 + 15y_2 + 10y_3$

$S/C\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 30 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 15 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_1; x_2; x_3 \ge 0 \end{cases}$	$S/C\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 2 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 4 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ y_1; y_2; y_3 \ge 0 \end{cases}$

ايجاد جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي انطلاقاً من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي

من جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج الأولي نجد:

T_1	C_j	2	4	1	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	-1	0	-3	1	0	-2	**10**
0	S_2	-3	0	-3	0	1	-1	**5**
4	x_2	1	1	2	0	0	1	**10**
$C_j - Z_j$		4	4	8	0	0	4	**Z = 40**
$\Delta Z = C_j - Z_j$		**-2**	**0**	**-7**	**0**	**0**	**-4**	
		⬆	⬆	⬆	⬆	⬆	⬆	
		S_1	S_2	S_3	y_1	y_2	y_3	

وبالتالي يكون جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي كما يلي:

T_1	C_j	2	4	1	0	0	0	+M	+M	+M	B_i
CB	YB	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
1	y_3	2	1	1	0	-1	0	0	1	0	**4**
0	S_3	3	3	0	0	-2	1	0	2	-1	**7**
0	S_1	1	3	0	1	-1	0	-1	1	0	**2**
$C_j - W_j$		2	1	1	0	-1	0	**0**	**1**	**0**	**W = 40**
$\Delta W = C_j - w_j$		**0**	**3**	**0**	**0**	**1**	**0**	M	M-1	M	

حلول البرنامج الثنائي (Dual).

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 4 \\ S_1 = 2 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 7 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ A_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{Min\ (W) = 40}$$

التمرين الثامن

ايجاد البرنامج الثنائي (Dual) للبرنامج الأولي (Primal)؛

Primal	Dual
$Max\ (Z) = 4x_1 + 4x_2 + 2x_3$	$Min\ (w) = 80y_1 + 60y_2 + 100y_3$

$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$	$S/C \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4 \\ y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1; y_2; y_3 \geq 0 \end{cases}$

ايجاد جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي انطلاقاً من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي

من جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج الأولي نجد:

T_1	C_j	4	4	2	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
4	x_2	0	1	$1/3$	$2/3$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{100}{3}$
4	x_1	1	0	$1/3$	$\frac{-1}{3}$	$2/3$	0	$\frac{40}{3}$
0	S_3	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{160}{3}$
$C_j - Z_j$		4	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$Z = \frac{560}{3}$
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-4}{3}$	0	
		⬆ S_1	⬆ S_2	⬆ S_3	⬆ y_1	⬆ y_2	⬆ y_3	

وبالتالي يكون جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي كما يلي:

T_1	C_j	80	60	100	0	0	0	M	M	M	B_i
CB	YB	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
0	S_3	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	$1/3$	$1/3$	-1	$\frac{2}{3}$
80	y_1	1	0	$1/3$	$1/3$	$\frac{-2}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
60	y_2	0	1	$1/3$	$\frac{-2}{3}$	$1/3$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
$C_j - Z_j$		80	60	$\frac{140}{3}$	$\frac{-40}{3}$	$\frac{-100}{3}$	0	$\frac{40}{3}$	$\frac{100}{3}$	0	$Z = \frac{560}{3}$
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	$\frac{160}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{100}{3}$	0	$M - \frac{40}{3}$	$M - \frac{100}{3}$	M	

حلول البرنامج الثنائي (Dual).

$$\begin{cases} y_1 = \frac{4}{3} \\ y_2 = \frac{4}{3} \\ y_3 = 0 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = \frac{2}{3} \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ A_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{Min\,(W) = \frac{560}{3}}$$

التمرين التاسع

ايجاد البرنامج الثنائي (Dual) للبرنامج الأولي (Primal)؛

لدينا البرنامج الأولي كما يلي:

$$Min\,(Z) = 6x_1 + 4x_2 + 10x_3$$
$$S/C \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 65 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نُلاحظ أن القيد الثاني والثالث للبرنامج الأولي لا يُحقق شرط القانونية للبرنامج الرياضي، حيث من المفروض أن جميع قيود البرنامج في حالة التدنية (Min) يجب أن تكون من الشكل أكبر أو تُساوي (≥ 0).

- القيد الثاني هو قيد كيفي من النوع (=)، ولتحويله إلى قيد من الشكل أكبر أو تُساوي ينتج عنه قيدين كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 30 \ldots\ldots\ldots (1) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

لتحويل القيد الثاني يجب ضرب القيد في العدد (-1) وبالتالي يُصبح القيد كما يلي:

$$(2) \Longrightarrow (-1)x_1 + (-1)2x_2 + (-1)x_3 \geq (-1)30$$
$$\Longrightarrow -x_1 + -2x_2 + -x_3 \geq -30$$

- القيد الثالث هو قيد من النوع أقل من أو يُساوي، ولتحويله إلى قيد من الشكل أكبر أو تُساوي يجب ضرب طرفي القيد في (-1) كما يلي:

$$(2) \Leftrightarrow (-1)2x_1 + (-1)3x_2 - (-1)x_3 \leq (-1)65$$
$$(2) \Longrightarrow -2x_1 + -3x_2 + x_3 \geq -65$$

وبالتالي يَصبح البرنامج الرياضي الأولي:

$$Min\,(Z) = 6x_1 + 4x_2 + 10x_3$$
$$S/C \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 30 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 65 \\ x_1; x_2; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Primal	Dual
$Min\,(Z) = 6x_1 + 4x_2 + 10x_3$	$Max\,(w) = 20y_1 + 30y_2 - 30y_3 - 65y_4$

$S/C\begin{cases}2x_1-2x_2+2x_3\geq 20\\ x_1+2x_2+x_3\geq 30\\ x_1+2x_2+x_3\geq 30\\ 2x_1+3x_2-x_3\leq 65\\ x_1;x_2;x_3\geq 0\end{cases}$	$S/C\begin{cases}2y_1+y_2-y_3-2y_4\geq 6\\ -2y_1+2y_2-2y_3-3y_4\geq 4\\ 2y_1+y_2-y_3+y_4\geq 10\\ y_1;y_2;y_3;y_4\geq 0\end{cases}$

ايجاد جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي انطلاقاً من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي

من جدول الحل الأمثل لهذا البرنامج الأولي نجد:

T_2	C_j	20	30	-30	-65	0	0	0	B_i
CB	YB	y_1	y_2	y_3	y_4	S_1	S_2	S_3	
20	y_1	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{50}{3}$
30	y_2	0	1	-1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$
0	S_3	0	0	0	3	-1	0	1	$\frac{35}{3}$
C_j-W_j		20	30	-30	$-\frac{160}{3}$	$\frac{50}{3}$	$\frac{20}{3}$	0	$Z=\frac{380}{3}$
$\Delta W=C_j-Z_j$		0	0	0	$-\frac{35}{3}$	$-\frac{50}{3}$	$-\frac{20}{3}$	0	
		⬆ S_1	⬆ S_2	⬆ S_3	⬆ y_1		⬆ y_2		

حلول البرنامج الثنائي (Dual).

$$\begin{cases}y_1=\frac{50}{3}\\ y_2=\frac{20}{3}\\ y_3=0\\ y_4=0\\ S_1=0\\ S_2=0\\ S_3=\frac{35}{3}\end{cases}\Rightarrow Max\,(W)=\frac{380}{3}$$

التمرين العاشر

لدينا البرنامج الرياضي والحل الأمثل له

$$Max\,(Z)=2x_1+4x_2+3x_3$$

$$S/C\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3\leq 60\\ 2x_1+x_2+2x_3\leq 40\\ x_1+3x_2+2x_3\leq 80\\ x_1;x_2;x_3\geq 0\end{cases}$$

وليكن جدول الحل الأمثل التالي:

T_3	C_j	2	4	3	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	

4	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$
3	x_3	$\frac{5}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{50}{3}$
0	S_3	$-\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{80}{3}$
$C_j - Z_j$		$\frac{23}{6}$	4	3	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	$Z = \frac{230}{3}$
$\Delta Z = C_j - Z_j$		$-\frac{11}{6}$	**0**	**0**	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$	**0**	

ايجاد مدى التغير بالنسبة إلى المتغيرات الأساسية

- المتغير الأساس x_2

ليكن $(\grave{C}_2)$ معامل المتغير x_2 الذي نرغب في إيجاد مجال الأمثلية له، وبالتالي نتحصل على جدول الحل التالي:

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أقل أو تُساوي الصفر. وبالتالي:

T_3	C_j	2	$\grave{C}_2$	3	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
$\grave{C}_2$	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$
3	x_3	$\frac{5}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{50}{3}$
0	S_3	$-\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{80}{3}$
$C_j - Z_j$		$\frac{1}{3}\grave{C}_2 + \frac{23}{6}$	$\grave{C}_2$	3	$\frac{1}{3}\grave{C}_2 - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}\grave{C}_2 + \frac{6}{3}$	0	$Z = \frac{230}{3}$
$\Delta Z = C_j - Z_j$		$-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\grave{C}_2$	**0**	**0**	$-\frac{1}{3}\grave{C}_2 + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\grave{C}_2 - \frac{6}{3}$	**0**	

$$-\frac{1}{3}\grave{C}_2 + \frac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}\grave{C}_2 \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \grave{C}_2 \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3}\grave{C}_2 - \frac{6}{3} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\grave{C}_2 \leq \frac{6}{3} \Rightarrow \grave{C}_2 \leq 6$$

ومنه حتى يبقى الحل أمثل يجب أن يكون مجال تغير معامل المتغير x_2 في دالة الهدف محصوراً بين $\frac{3}{2}$ و 6 أي:

$$\frac{3}{2} \leq \grave{C}_2 \leq 6$$

- المتغير الأساس x_3

ليكن $(\grave{C}_3)$ معامل المتغير x_3 الذي نرغب في إيجاد مجال الأمثلية له، وبالتالي نتحصل على جدول الحل التالي:

يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم سطر التقييم (ΔZ) أقل أو تُساوي الصفر. وبالتالي:

T_3	C_j	2	4	$\grave{C}_3$	0	0	0	B_i
CB	XB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
4	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$

$\dot{C}_3$	x_3	$\frac{5}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{50}{3}$
0	S_3	$-\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{80}{3}$
$C_j - Z_j$		$\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\dot{C}_3$	4	$\dot{C}_3$	$\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\dot{C}_3$	$-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\dot{C}_3$	0	$Z = \frac{230}{3}$
$\Delta Z = C_j - Z_j$		$\frac{5}{6}-\frac{5}{6}\dot{C}_3$	**0**	**0**	$-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\dot{C}_3$	$\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\dot{C}_3$	**0**	

$$\frac{5}{6}-\frac{5}{6}\dot{C}_3 \le 0 \Rightarrow -\frac{5}{6}\dot{C}_3 \le -\frac{5}{6} \Rightarrow \dot{C}_3 \ge 1$$
$$-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\dot{C}_3 \le 0 \Rightarrow \frac{1}{6}\dot{C}_3 \le \frac{4}{3} \Rightarrow \dot{C}_2 \le 8$$
$$\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\dot{C}_3 \le 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}\dot{C}_3 \le -\frac{4}{3} \Rightarrow \dot{C}_3 \ge 2$$

ومنه حتى يبقى الحل أمثل يجب أن يكون مجال تغير معامل المتغير x_3 في دالة الهدف محصوراً بين 2 و 8 أي:

$$2 \le \dot{C}_2 \le 8$$

ايجاد مدى التغير بالنسبة إلى الإمكانيات المتاحة.

- **بالنسبة للقيد الأول**

نقوم بقسمة قيم عمود الكميات (B_i) على قيم عمود المتغير (S_1)

S_1	B_i	$\frac{B_i}{S_1}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$	20
$-\frac{1}{6}$	$\frac{50}{3}$	-100
$-\frac{2}{3}$	$\frac{80}{3}$	-40

$$\underset{(-)}{\text{Min}}(-100;\ -40) = -40$$
$$\underset{(+)}{\text{Min}}(20;\ /) = 20$$
$$60 - 40 \le b_1 \le 60 + 40$$
$$20 \le b_1 \le 100$$

- **بالنسبة للقيد الثاني**

نقوم بقسمة قيم عمود الكميات (B_i) على قيم عمود المتغير (S_2)

S_2	B_i	$\frac{B_i}{S_2}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{20}{3}$	-20
$\frac{2}{3}$	$\frac{50}{3}$	25
$-\frac{1}{3}$	$\frac{80}{3}$	-80

$$\underset{(-)}{\text{Min}}(-20;\ -80) = -20$$

$$\underset{(+)}{\text{Min}}(25;\ /) = 25$$

$$40 - 25 \leq b_2 \leq 40 + 25$$

$$15 \leq b_2 \leq 60$$

- **بالنسبة للقيد الثاني**

نقوم بقسمة قيم عمود الكميات (B_i) على قيم عمود المتغير (S_3)

S_3	B_i	$\frac{B_i}{S_3}$
0	$\frac{20}{3}$	/
0	$\frac{50}{3}$	/
1	$\frac{80}{3}$	$\frac{80}{3}$

$$\underset{(-)}{\text{Min}}(--;\ --) = /$$

$$\underset{(+)}{\text{Min}}\left(\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{3}};\ /\right) = \frac{\mathbf{80}}{\mathbf{3}}$$

الفصل الخامس: نمـــــاذج النقـــل

تمهيد

من بين الحالات الخاصة للبرمجة الخطية في بحوث العلميات حالة مشاكل النقل (Problèmes de transport)، إذ تُعتبر مشكلة النقل أو نموذج النقل من الأساليب الرياضية المهمة المساعدة في عملية اتخاذ القرارات المناسبة والملائمة في نقل كميات من المواد (البضائع والسلع) من مصادر تصنيعها وانتاجها وتخزينها إلى وجهات متعددة (Destinations)، وذلك بما يجعل مجموع تكاليف نقل هذه السلع والبضائع أقل ما يُمكن. كما تُخصص طريقة النقل في توزيع الموارد البشرية والمادية بأفضل صورة على اعتبار أن هذه الموارد محدودة دائماً.

وُلدت أفكار طريقة النقل في عام 1941 وتطورت على يد العالم دانتزينغ عام 1953، ويُفترض بأن كل المتغيرات الموجودة ضمن مصفوفة النقل قيم موجبة أو معدومة.

1. مفهوم نموذج النقل

أصبحت مشكلة النقل اليوم ذات أهمية كبيرة من الناحية الاقتصادية الغاية منها الحول على أقل تكلفة نقل ممكنة كما أنها من العناصر المهمة في إيصال السلع إلى وجهات طلبها، لذا فإن نموذج النقل هو نموذج كمي يهدف إلى تحديد خطة مثلى لنقل كميات مثلى من منتوج ما من مصادرها إلى عدد من جهات طلبها بأقل كلفة ممكنة وتُمثل البيانات اللازمة للنموذج بالآتي:

- مستوى العرض للوحدات المتاحة لكل مصدر والكميات المطلوبة لجهات الطلب؛
- تكلفة الوحدة الواحدة من المادة من كل مصدر إلى جهة طلبها.

إذن الهدف من نموذج النقل هو تحديد الكمية المنقولة من المنتوج بأقل كلفة ممكنة.

2. الخصائص الرئيسية لنموذج النقل

- أن تكون المصادر وجهات الطلب متعددة للمنتوج أو تتعدد مصادر بوجود جهة طلب واحدة أو بالعكس أي وجود مصدر واحد مع عدة جهات طلب؛
- الطاقات لكل مصدر من المصادر وكل مركز من جهات الطلب ثابتة ومحددة وبشكل دقيق؛
- تجانس الوحدات المنقولة من المادة أو المنتوج؛
- وجود مسار واحد بشكل مباشر عند نقل الكميات من المصدر إلى جهات طلبها؛
- تساوي الكميات المعروضة في مراكز تجهيزها مع الكميات المطلوبة في جهات طلبها وفي حالة عدم تحقق هذه الحالة نلجأ إلى إضافة الكمية إلى الجهة الذي حدث فيها العجز سواء كانت مصادر تجهيز أو مراكز طلب.

لتشكيل مصفوفة النقل يتطلب منا ما يلي:

- معرفة الكميات المتاحة A_i حيث: $i = 1,2, \dots \dots \dots, m$؛
- معرفة الكميات المطلوبة B_i حيث: $j = 1,2, \dots \dots \dots, m$؛
- تكاليف النقل C_{ij} بين مراكز العرض التي تحوي الكميات المتاحة i وبين مراكز الطلب التي تحوي الكميات المطلوبة j.
- وضع هذه المعلومات ضمن مصفوفة النقل كما يوضحه الجدول أدناه

جدول (1.5): مصفوفة النقل

B_i / A_i	b_1	b_2	…..	b_j	…….	b_n
a_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	…..	C_{1j} x_{1j}	…..	C_{1n} x_{1n}
a_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	…..	C_{2j} x_{2j}	…..	C_{2n} x_{2n}

.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
a_i	C_{i1} x_{i1}	C_{i2} x_{i2}	.....	C_{ij} x_{ij}	.....	C_{in} x_{in}
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
a_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}	.....	C_{mj} x_{mj}	.....	C_{mn} x_{mn}

المصدر: صبحي المحمد، إبراهيم نائب، حسن مشرقي، أنعام باقية، بحوث العمليات، منشورات جامعة حلب، كلية الاقتصاد، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، 2008، ص. 188.

نرمز للكميات المنقولة X_{ij} بين المصدر **i** إلى المستهلك **J**.

وتكون دالة الهدف وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$\boldsymbol{F(X)} = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \cdots \ldots + C_{1j}X_{1j} + \cdots \ldots C_{1n}X_{1n} + C_{m1}X_{m1} + C_{m2}X_{m2} + \cdots \ldots$$
$$+ C_{mj}X_{mj} + \cdots \ldots + C_{mn}X_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}.X_{ij} \rightarrow Min \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث:

$$a_1 + a_2 + \cdots \ldots + a_i + \cdots + a_m = \sum_{i=1}^{m} a_i \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$b_1 + b_2 + \cdots \ldots + b_i + \cdots + b_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ونمن خلال هاتين المعادلتين (2) و(3) ميز حالتين:

الحالة الأولى: حالة تساوي كميات الطلب مع كميات الاستهلاك أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

الحالة الثانية: حالة عدم تساوي كميات الطلب مع كميات الاستهلاك أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

انطلاقاً من العادلة (5) نميز حالتين كذلك كما يلي:

حالة كميات الطلب أصغر من كميات الاستهلاك أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

وهنا لا بد من إضافة مورد وهمي ترتيبه $(\boldsymbol{m+1})$ حيث يتساوى الفرق بين الكميات المطلوبة والكميات المتاحة وتكلفة كل خلية فيه مساوية للصفر أي:

$$C_{m+1.n} = 0$$

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \ldots\ldots\ldots (7)$$

✍ حالة كميات الطلب أكبر من كميات الاستهلاك أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \dots\dots\dots\dots (8)$$

وهنا لا بد من إضافة مستهلك وهمي ترتيبه $(n+)$حيث وهو يُساوي الفرق بينهما وتكلفة النقل إليه مساوية للصفر أي:

$$C_{m+1.n} = 0$$

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \dots\dots\dots (9)$$

إن كلاً من a و b يُوصلنا إلى أن الكميات المتاحة متساوية مع الكميات المطلوبة:

عند تعبئة الخلايا في المصفوفة يجب أن يكون:

✍ عدد الخلايا الممتلئة = عدد الأسطر + عدد الأعمدة ناقص واحد (1)؛

✍ عدد الخلايا الممتلئة = $(m+n-1)$؛

حيث:

n: عدد الأعمدة؛

m. عدد الأسطر.

3. خطوات حل مسألة النقل

يُمكن تلخيص إيجاد الحل الأمثل لمسألة النقل وفق الخطوات التالية:

❶ إعطاء حل أساسي (مبدئي) ممكن للمسألة

يُراعى فيه تحقيق التوازن بين المطلوب والمتاح، كما يجب أن يكون عدد مجاهيل القاعدة في هذا الحل المبدئي بعدد الشروط الخطية، أي أن: $(m+n-1)$. ويُمكن إيجاد حل مبدئي بعدة طرائق منها:

✍ طريقة الركن الشمالي الغربي؛

✍ طريقة الكلفة الأقل؛

✍ طريقة فوجل.

كل من بين هذه الطرق يقودنا إلى الوصول إلى حل مبدئي (تكاليف مبدئية) نستند إليها للوصول إلى حلول متتابعة ومتوالية إلى أن نصل إلى الحل الأمثل (Solution optimale) الذي يُعطينا أفضل توزيع بأقل النفقات.

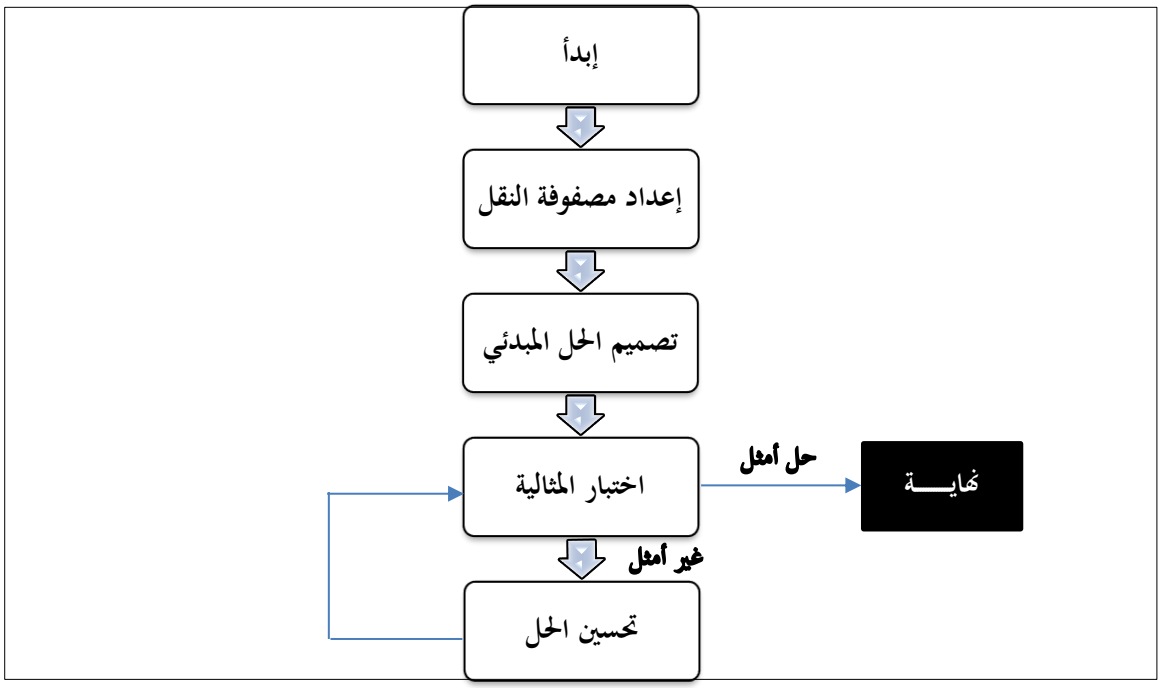
❷ اختبار أمثلية الحل

لاختبار أمثلية الحل، يتم اختبار الخلايا الفارغة التي لم تستخدم في الحل لمعرفة مدى إمكانية استخدامها وأثر ذلك في تخفيض التكاليف. ولاختبار ما إذا كان الحل أمثلاً أم لا يتم اتباع إحدى الطريقتين:

✍ طريقة الحجر المتنقل أو القفز على الصخور (المسار المتعرج)؛

✍ طريقة التوزيع المعتدل.

الشكل (1.5): المراحل الأساسية لنموذج النقل



المصدر: جمال عبد العزيز صابر، بحوث العمليات في المحاسبة، كلية التجارة، جامعة القاهرة، القاهرة، 2009؛ ص. 7.

4. طرق حل مسائل النقل

لحل نماذج النقل هناك ثلاثة طرق أساسية تتمثل كما يلي:

1.4. طريقة الركن الشمالي الغربي (طريقة الدرج)

تُعتبر طريقة الزاوية الشمالية الغربية (الركن الأعلى الأيسر) الطريقة الأسهل تطبيقاً. حيث تسمح هذه الطريقة بالحصول على حل أساس مقبول **(Une solution de base acceptable)** ومبدأ هذه الطريقة مستمد من اسمها، حيث أنه تبعاً لهذه الطريقة نبدأ بملأ الخلية الفارغة الواقعة في الركن الشمالي الغربي أي الركن الأعلى الأيسر لجدول النقل.

لإيجاد التكلفة وفق هذه الطريقة يجب إتباع الخطوات التالية:

- ابدأ بأول خلية من اليسار والذي يقع في الركن الشمالي الغربي؛
- اختر عدد المواد ليصبح مساوياً لعدد الطلبيات (طاقة التخزين) أو العرض (طاقة إنتاج المصنع) أيهما أقل؛
- اطرح عدد المواد من الطلب والعرض وصفر عدد المواد باتجاه الطلبيات إذا كانت نتيجة الطلب مساوية للصفر (بعد عملية الطرح) أو باتجاه العرض إذا كانت نتيجة العرض مساوية للصفر؛
- انتقل إلى المربع الذي يليه؛
- إذا كانت قيمة المواد في أحد المربعات مساوية للصفر فاقفز عنه؛
- لاحظ أن عملية المرور المربعات أو الخلايا تكون بشكل تتابعي في السطر الواحد وباتجاه اليمين وعند الانتهاء من السطر يتم الانتقال إلى السطر الثاني وهكذا.

مثال (1.5)

المصفوفة التالية تكاليف نقل الكميات بين مراكز العرض a_i حيث $(i = 1,2,3)$ ومراكز الطلب b_jحيث: $(j =$ 1,2,3,4) بالإضافة إلى الكميات المتوفرة في مراكز العرض والكميات المطلوبة في مراكز الطلب كما يبينه الجدول أدناه:

b_j / a_i	$b_1 = 80$	$b_2 = 90$	$b_3 = 110$	$b_4 = 80$
$a_1 = 120$	2	3	4	1
$a_2 = 140$	3	2	1	3
$a_3 = 100$	4	1	2	4

المطلوب:

إيجاد أقل تكلفة ممكنة لنقل الكميات من مصادرها إلى مراكز الطلب بطرقة الركن الشمالي الغربي.

الحل

التوزيع يبدأ من اليسار إلى اليمين لتعبئة الخلايا وذلك خلية بخلية ابتداءً من السطر الأول وفق الحاجة، أي لا نُعطي مستهلكاً أكثر من حاجته، ولا نحمل مورداً أكثر من طاقته أي مراعاة الكميات المتاحة والكميات المطلوبة.

نبدأ بتعبئة خلايا المصفوفة بشكل تتابعي بداية من السطر الأول من اليسار وباتجاه اليمين مع مراعاة أقل تكلفة في الخلايا، ومن خلال المصفوفة نلاحظ أن الخلية X_{11} تحتاج إلى 80 حيث نعطيها من المورد a_1 حاجتها فقط وننتقل إلى الخلية الثانية X_{12} ونعطيها ما تبقى من المورد a_1 إن كانت تستوعب ومن ثم ننتقل إلى السطر الثاني إلى الخلية X_{22} ونعطيها من المورد a_2 حاجتها المتبقية، ....وهكذا بالنسبة لجميع الخلايا. والحل الابتدائي معطى بالجول أدناه:

B_i / A_i	$b_1 = 80$	$b_2 = 90$	$b_3 = 110$	$b_4 = 80$
$a_1 = 120$	**2** 80	**3** 40	**4** /	**1** /
$a_2 = 140$	**3** /	**2** 50	**1** 90	**3** /
$a_3 = 100$	**4** /	**1** /	**2** 20	**4** 80

من الجدل أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(m = 3)$ وعدد الأعمدة $(n = 4)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m + n - 1$$
$$= 4 + 3 - 1$$
$$= 6$$

إذن الشرط محقق فعلاً وبالتالي لا داعي لإضافة قيمة صفر في إحدى الخلايا الفارغة التي تُفيدنا في اختبار الخلايا الفارغة كما سنجد لاحقاً، بحيث يقع الصفر على رأس أحد المسارات المستخدمة.

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

قيم متغيرات القرار:

$X_{11} = 80$	$X_{12} = 40$	$X_{13} = 0$	$X_{14} = 0$
$X_{21} = 0$	$X_{22} = 50$	$X_{23} = 90$	$X_{24} = 0$
$X_{31} = 0$	$X_{32} = 0$	$X_{33} = 20$	$X_{34} = 80$

موزعة كما يلي:

متغيرات الأساس الموجبة: عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 3 - 1) = 6$

$X_{11} = 80$; $X_{12} = 40$; $X_{22} = 50$; $X_{23} = 90$; $X_{33} = 20$; $X_{34} = 80$

✍ **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{13} = 0;\ X_{14} = 0;\ X_{21} = 0;\ X_{24} = 0;\ X_{31} = 0;\ X_{32} = 0$$

✍ **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}=(2*80)+(3*40)+(2*50)+(1*90)+(2*20)+(4*80)=830\ DA$$

2.4. طريقة الكلفة الأقل

تُعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق المستخدمة للحصول على حل أساس مقبول لنماذج النقل، ويُستمد مبدأ هذه الطريقة من تسميتها، حيث أنه تبعاً لهذه الطريقة نبدأ بملأ الخانة الفارغة التي لها أدنى تكلفة وحدوية للنقل حيث أننا ننظر إلى المصفوفة بوضعها كليةً، ونعطي الخلية ذات التكلفة الأقل حاجتها ومن ثم ننتقل إلى خلية أخرى تكون تكلفتها تلي تكلفة الخلية السابقة ودائماً يجب مراعاة الكميات المتاحة والكميات المطلوبة أيهما أقل.

وكذلك يجب مراعاة شرط أن عدد الخلايا الممتلئة تساوي على الأسطر مضافاً اليه عدد الأعمدة ناقص واحد.

نعود للمثال السابق فنجد جدول الحل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 80$	$b_2 = 90$	$b_3 = 110$	$b_4 = 80$
$a_1 = 120$	2 — 40	3 — /	4 — /	1 — 80
$a_2 = 140$	3 — 30	2 — /	1 — 110	3 — /
$a_3 = 100$	4 — 10	1 — 90	2 — /	4 — /

بالنظر إلى المصفوفة نلاحظ أن الخلية X_{14} هي الأقل تكلفة فنعطيها حاجتها من المورد a_1 ثم ننتقل إلى الخلية X_{23} ونعطيها حاجتها من المورد a_2 ثم ننتقل إلى الخلية X_{32} ونعطيها حاجتها من المورد a_3 وهكذا ننتقل إلى الخلايا التي تلي بعضها البعض بالتكلفة مع مراعاة الكميات المتاحة والكميات المطلوبة.

من الجدل أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(m = 4)$وعدد الأعمدة $(n = 3)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m + n - 1$$
$$= 4 + 3 - 1$$
$$= 6$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

✍ **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11} = 40$	$X_{12} = 0$	$X_{13} = 0$	$X_{14} = 80$
$X_{21} = 30$	$X_{22} = 0$	$X_{23} = 110$	$X_{24} = 0$
$X_{31} = 10$	$X_{32} = 90$	$X_{33} = 0$	$X_{34} = 0$

موزعة كما يلي:

✍ **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 3 - 1) = 6$

$$X_{11} = 40\ ;\ X_{14} = 80;\ X_{21} = 30;\ X_{23} = 110;\ X_{31} = 10;\ X_{32} = 90$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12} = 0;\ X_{13} = 0;\ X_{22} = 0;\ X_{24} = 0;\ X_{33} = 0;\ X_{34} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (2*40) + (3*0) + (4*0) + (1*80) + (3*30) + (2*0)$$
$$+ (1*110) + (3*0) + (4*10) + (1*90) + (2*0) + (4*0) = \boldsymbol{490\ DA}$$

3.4. طريقة فوجل (Méthode de Vogel's)

هذه الطريقة أفضل من الطرق السابقة، وكثيراً ما تؤدي إلى الحل الأمثل أو قريباً منه. وللوصول إلى الحل المبدئي بهذه الطريقة نتبع الخطوات الآتي ذكرها:

- يُحسب الفرق بين أقل تكلفتين (غير متساويتين) في كل سطر وفي كل عمود. وهنا لا يصح أن يكون الفرق صفراً (إذا توافق في أي عمود أو سطر تكلفتان متساويتان لا يُؤخذ الفرق بينهما) ونضعها في عمود وسطر إضافيين؛
- نأخذ السطر أو العمود ذا الفرق الأكبر وبالتالي يجب إشباع الخلية ذات التكلفة الأقل الموجودة فيهما قبل غيرها بحسب شروط الكميات المتوافرة والكميات المطلوبة المقابلة لها؛
- نهمل السطر أو العمود الذي يتم إشباعه ونعدم أرقام الكميات المتوافرة والمطلوبة بطرح الكمية التي وضعناها في الخلية ذات التكلفة الأقل؛
- نكرر الخطوات السابقة مع الأخذ بالحسبان الأسطر والأعمدة المهملة سابقاً حتى نحصل على أفضل توزيع، بأن يكون عدد الخلايا الممتلئة يساوي عدد الأسطر مضافاً إليه عدد الأعمدة ناقصا واحد.

نعود للمثال السابق ونطبق عليه طريقة فوجل:

B_i / A_i		$b_1 = 80$	$b_2 = 90$	$b_3 = 110$	$b_4 = 80$	فروقات الأسطر		
						أ	ب	ج
$a_1 = 120$		**2** **40**	**3** /	**4** /	**1** **80**	1	1	1
$a_2 = 140$		**3** **30**	**2** /	**1** **110**	**3** /	1	1	1
$a_3 = 100$		**4** **10**	**1** **90**	**2** /	**4** /	1	1	**(3)**
فروقات الأعمدة	أ	1	1	1	**(2)**			
	ب	1	1	**(1)**	/			
	ج	1	1	/	/			

من الجدول أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(m = 4)$ وعدد الأعمدة $(n = 3)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m + n - 1$$
$$= 4 + 3 - 1$$
$$= 6$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

- **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11}=40$	$X_{12}=0$	$X_{13}=0$	$X_{14}=80$
$X_{21}=30$	$X_{22}=0$	$X_{23}=110$	$X_{24}=0$
$X_{31}=10$	$X_{32}=90$	$X_{33}=0$	$X_{34}=0$

موزعة كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1)=(4+3-1)=6$

$$X_{11}=40\ ;\ X_{14}=80;\ X_{21}=30;\ X_{23}=110;\ X_{31}=10;\ X_{32}=90$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12}=0;\ X_{13}=0;\ X_{22}=0;\ X_{24}=0;\ X_{33}=0;\ X_{34}=0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$Z\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}=(2*40)+(1*80)+(3*30)+(1*110)+(4*10)+(1*90)+=490\ DA$$

مثال (2.5)

لتكن لدينا المصفوفة التالية من الشكل:

B_i / A_i	$b_1=400$	$b_2=900$	$b_3=200$	$b_4=500$
$a_1=500$	12	13	4	6
$a_2=700$	6	4	10	11
$a_3=800$	10	9	12	4

المطلوب

إيجاد أقل تكلفة ممكنة بالطرق الثلاثة

الحل

أولاً: طريقة الركن الشمالي الغربي

ترتكز هذه الطريقة على التوزيع خلية من اليسار إلى اليمين بحيث نراعي الكميات المتاحة والكميات المطلوبة (لا نأخذ من مورد أكثر مما عنده ولا نعطي المستهلك أكثر حاجته).

B_i / A_i	$b_1=400$	$b_2=900$	$b_3=200$	$b_4=500$
$a_1=500$	12 — 400	13 — 100	4 — /	6 — /
$a_2=700$	6 — /	4 — 700	10 — /	11 — /
$a_3=800$	10 — /	9 — 100	12 — 200	4 — 500

من الجدول أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(m=4)$ وعدد الأعمدة $(n=3)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies\ = m+n-1$$
$$= 4+3-1$$
$$= 6$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

- **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11}=400$	$X_{12}=100$	$X_{13}=0$	$X_{14}=0$
$X_{21}=0$	$X_{22}=700$	$X_{23}=0$	$X_{24}=0$
$X_{31}=0$	$X_{32}=100$	$X_{33}=200$	$X_{34}=500$

موزعة كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1)\ =\ (4+3-1)\ =\ 6$

$$X_{11}=400\ ;\ X_{12}=100;\ X_{22}=700;\ X_{32}=100;\ X_{33}=200;\ X_{34}=500$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{13}=0;\ X_{14}=0;\ X_{21}=0;\ X_{23}=0;\ X_{24}=0;\ X_{31}=0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} =(12*400)+ (13*100)+(4*700)+(9*100)+(12*200)+(4*500)=\mathbf{14200\ DA}$$

ثانيا: طريقة التكلفة الأقل

تبعاً لهذه الطريقة نبدأ بملأ الخانة الفارغة التي لها أدنى تكلفة وحدوية للنقل حيث أننا ننظر إلى المصفوفة بوضعها كليةً، ونعطي الخلية ذات التكلفة الأقل حاجتها ومن ثم ننتقل إلى خلية أخرى تكون تكلفتها تلي تكلفة الخلية السابقة ودائماً يجب مراعاة الكميات المتاحة والكميات المطلوبة أيهما أقل.

B_i / A_i	$b_1=400$	$b_2=900$	$b_3=200$	$b_4=500$
$a_1=500$	**12** **300**	**13**	**4** 200	**6**
$a_2=700$	**6** /	**4** 700	**10** /	**11** /
$a_3=800$	**10** **100**	**9** **200**	**12** /	**4** 500

من الجدل أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(m=4)$ وعدد الأعمدة $(n=3)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies\ = m+n-1$$
$$= 4+3-1$$
$$= 6$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

- **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11}=300$	$X_{12}=0$	$X_{13}=200$	$X_{14}=0$
$X_{21}=0$	$X_{22}=700$	$X_{23}=0$	$X_{24}=0$

$X_{31}=100$	$X_{32}=200$	$X_{33}=0$	$X_{34}=500$

موزعة كما يلي:

- متغيرات الأساس الموجبة: عددها يساوي: $(m+n-1)=(4+3-1)=6$

$$X_{11}=300\,;\ X_{13}=200;\ X_{22}=700;\ X_{31}=100;\ X_{32}=200;\ X_{34}=500$$

- متغيرات خارج الأساس المعدومة: تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12}=0;\ X_{14}=0;\ X_{21}=0;\ X_{23}=0;\ X_{24}=0;\ X_{33}=0$$

- قيمة دالة الهدف:

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}=(12*300)+(4*200)+(4*700)+(10*100)+(9*200)+(4*500)=12000\ DA}$$

ثالثاً: طريقة فوجل

B_i / A_i		$b_1=400$	$b_2=900$	$b_3=200$	$b_4=500$	فروقات الأسطر			
						أ	ب	ج	د
$a_1=500$		12 /	13 /	4 200	6 300	2	(6)	/	/
$a_2=700$		6 /	4 700	10 /	11 /	2	2	2	2
$a_3=800$		10 400	9 200	12 /	4 200	5	5	5	1
فروقات الأعمدة	أ	4	5	(6)	2				
	ب	4	5	/	2				
	ج	4	5	/	(7)				
	د	4	(5)	/	/				

من الجدول أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(m=4)$ وعدد الأعمدة $(n=3)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m+n-1$$
$$= 4+3-1$$
$$= 6$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

- **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11}=0$	$X_{12}=0$	$X_{13}=200$	$X_{14}=300$
$X_{21}=0$	$X_{22}=700$	$X_{23}=0$	$X_{24}=0$
$X_{31}=400$	$X_{32}=200$	$X_{33}=0$	$X_{34}=200$

موزعة كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1)=(4+3-1)=6$

$$X_{13}=200\,;\ X_{14}=300;\ X_{22}=700;\ X_{31}=400;\ X_{32}=200;\ X_{34}=200$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{11}=0;\ X_{12}=0;\ X_{21}=0;\ X_{23}=0;\ X_{24}=0;\ X_{33}=0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} =(4*200)+(6*300)+(4*700)+(10*400)+(9*200)+(4*200)=12000\ DA$$

5. إيجاد الحل الأمثل (اختبار الحل الأساسي الأولي)

إن الطرق الثلاثة السالفة الذكر تُستخدم فقط في إيجاد الحل الأساسي الأولي، حيث أن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية حل المشكلة (الحل الأمثل)، وإنما هناك أساليب أخرى لاختبار هل أن الحل الأساسي الذي تم التوصل إليه من خلال تطبيق إحدى الطرق الثلاثة هو أمثل أم هناك حلولاً أخرى أمثل منه، وللوصول إلى هكذا حلول هناك طريقتان لاختبار أمثليه الحل كما يلي:

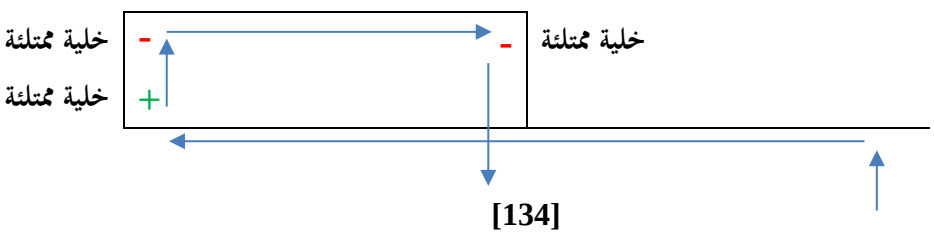
1.5. طريقة الحجر المتنقل

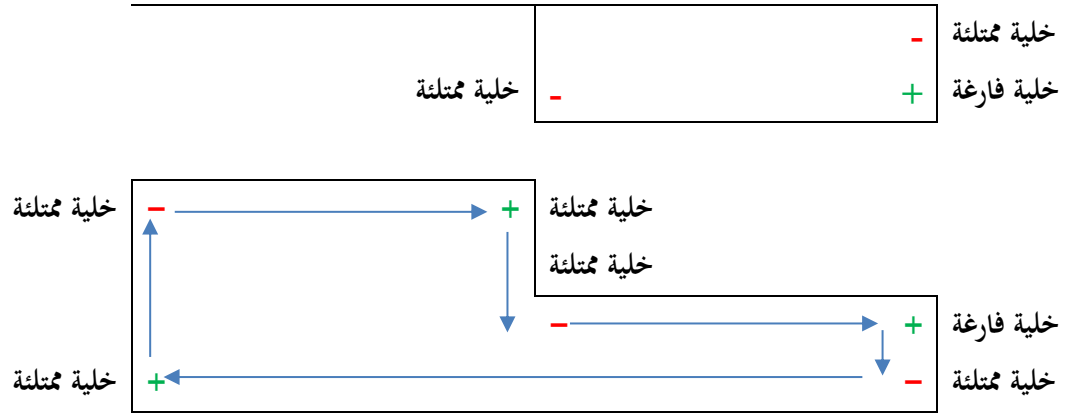
إن الانتقال إلى حل أفضل يعتمد على اختبار مثالية الحل، وعلى الفرصة الضائعة، ويتم اختبار الخلايا الفارغة بالانتقال من خلية فارغة إلى خلية ممتلئة بأقصر طريق ممكن، ثم إلى خلية ممتلئة، بحيث ننتهي إلى الخلية الفارغة نفسها التي انطلقنا منها دون أن تدخل في الحساب مرة ثانية.

فإذا انتهينا من الخلايا الفارغة يكون تعديل الخلايا الممتلئة بالزيادة أو النقصان بحسب المسار في الاختبار ويُراعى عند اختبار الخلايا الفارغة ما يلي:

- الاختبار يتم اعتباراً من الخلية الفارغة الأولى في السطر الأول إلى الخلايا الفارغة في السطر نفسه، ثم الانتقال إلى السطر الثاني وهكذا؛
- يُحدد المسار بالانتقال من الخلية الفارغة المراد اختبارها إلى خلية مليئة أخرى حتى يتم الوصول إلى الخلية نفسها، حيث يُمكن تجاوز خلايا فارغة أو ممتلئة بحيث نصل إلى خلية ممتلئة؛
- اتجاه المسار دائماً بزوايا قائمة (خطوط أفقية أو عمودية)، بحيث يكون التحرك أو ما يُطلق عليه مسار الحلقة مغلقاً أفقياً يميناً أو يساراً، إلى الأعلى أو إلى الأسفل، لا يجوز التحرك القطري؛
- خط السير يجب أن يمر بخلايا ممتلئة فقط ماعدا الخلية المراد تقييمها، وفي حالة الانعطاف فإن الخلايا الممتلئة في وسط الطريق لا تُؤخذ بعين الاعتبار؛
- نأخذ الخلية المراد اختبارها إشارة (+) ثم تتغير الإشارة في كل خطوة من خطوات المسارين (+) إلى (−) وهكذا؛

ويُراعى أن يكون عدد الخلايا في المسار زوجياً (4 أو 6) رؤوس، وفي الغالب نبدأ باختبار الخلية التي يكون مسارها ذا التكلفة السالبة الأكبر، وتأخذ الأشكال التالية:





- حساب صافي التغير في التكلفة على أساس المسار ينتج عنه الإشارات (+)، (−)، (+)، (−)،(+)، (−)،(+)، (−)،...؛
- بعد حساب صافي التغير في التكلفة للخلايا الفارغة يُمكن الحصول على:
  - إذا ظهرت قيم صافي التغير في التكلفة لجميع الخلايا الفارغة في الجدول أكبر أو تُساوي الصفر (≥ 0)، يعني أن الجدول الذي توصلنا إليه هو جدول الحل الأمثل؛
  - إذا ظهر صافي التغير في التكلفة أقل أو يُساوي الصفر (≤ 0) لخلية أو أكثر في الجدول، فهذا يعني أن الجدول الذي توصلنا إليه ليس جدول الحل الأمثل، وبالتالي ننتقل إلى الخطوة الموالية؛
- نختار الخلية الفارغة التي بها أكبر صافي تغير متبوع بإشارة سالبة (−)، ويتم ملؤها بأكبر عدد ممكن من الكميات، مع مراعاة في ذلك الكمية المتاحة والكمية المطلوبة؛
- إذا كان أكبر صافي تغير متبوع بإشارة سالبة (−) موجود في أكثر من خلية، نختار الخلية التي بها أقل تكلفة، وإذا كان هناك تساوي في التكاليف نختار الخلية التي يُمكن ملؤها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة؛
- نُكرر الخطوات السابقة بنقل القيم بين الخلايا، واختبار الخلايا الفارغة بنفس الطريقة حتى يتم الوصول إلى الحل الأفضل؛
- عند عدم تحقق شرط عدد الخلايا الممتلئة بأنها تُساوي عدد الأسطر مُضافاً إليها عدد الأعمدة ناقصاً واحد، عندئذٍ نتبع ما يلي:
  - نُحدد الخلية التي تتساوى عندها العرض والطلب.
  - نختار خلية بجانب الخلية السابقة إما في السطر أو العمود، ونعتبرها مليئة (وهمية) بالكمية صفر بشرط أن تُساعد على اختبار أكبر عدد ممكن من الخلايا الفارغة، وأن تكون واقعة على أحد الرؤوس الموجبة في الاختبار.
- يُفضل التوزيع بطريقة الركن الشمالي الغربي لحساب التكاليف المبدئية.

مثال (2.6)

ليكن الحل الأساسي الأولي ممثل في الجدول أدناه

B_i / A_i	$b_1 = 400$	$b_2 = 900$	$b_3 = 200$	$b_4 = 500$
$a_1 = 500$	12 — 400	13 — 100	4 — /	6 — /
$a_2 = 700$	6 — /	4 — 700	10 — /	11 — /
$a_3 = 800$	10 — /	9 — 100	12 — 200	4 — 500

من الجدل أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(m = 4)$ وعدد الأعمدة $(n = 3)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m + n - 1$$
$$= 4 + 3 - 1$$
$$= 6$$

تكلفة النقل

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (12*400)+(13*100)+(4*700)+(9*100)+(12*200)+(4*500)=\mathbf{14200\ DA}$$

اختبار الخلايا الفارغة

نختبر الخلايا الفارغة بأشكال هندسية بخطو أفقية أو عمودية، بحيث نبدأ بخلية فارغة وننتقل إلى خلية ممتلئة، ومن ثم ممتلئة... إلى أن نعود إلى الخلية الفارغة نفسها.

الخطوة الأولى: حساب صافي التغير في التكلفة للخلايا الفارغة (تقييم الخلايا الفارغة):

$$\Delta_{13} = 4 - 12 + 9 - 13 = -12$$
$$\Delta_{14} = 6 - 4 + 9 - 13 = -2$$
$$\Delta_{21} = 6 - 4 + 13 - 12 = +3$$
$$\Delta_{23} = 10 - 12 + 9 - 4 = +3$$
$$\Delta_{24} = 11 - 4 + 9 - 4 = -12$$
$$\Delta_{31} = 10 - 9 + 13 - 12 = +2$$

الخطوة الثانية: تحديد الخلية الفارغة التي تدخل إلى جدول الحل

لتحديد الخلية الفارغة التي يتم اختيارها لتدخل إلى الحل نعتمد على نتائج تقييم الخلايا الفارغة المتوصل إليها في الخطوة الأولى، أو بعبارة أخرة نعتمد على قيم (Δ_{ij})، حيث يتم الخلية الفارغة التي تدخل إلى جدول الحل هي الخلية الفارغة ذات أقل Δ_{ij}سالب، وهذا وفق القاعدة الرياضية التالية:

$$\boldsymbol{Min}(\Delta_{ij}\ ;\ \Delta_{ij} < 0)$$

نُلاحظ أن هناك بعض الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي فإن هذا الجدول ليس جدول الحل الأمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة (−) والذي هو $(\Delta_{13} = -12)$، ونقوم بملئها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الموارد المتاحة.

إدخال هذه الخلية (x_{13}) إلى جدول الحل يكون عن طريق ملئها،

الخطوة الثالثة: تحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل (تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$)

يتم تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$ يمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل وفق القاعدة التالية: أعظم كمية ممكنة لملأ الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل تُساوي أقل كمية (x_{ij}) للخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة للمسار.

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{13}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{13} = 200$$
$$x_{12} = 100$$
$$Min\ (x_{13} = 200\ ;\ x_{12} = 100) = x_{12} = 100$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـ$\boldsymbol{\theta}$) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{13}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 100$.

الخطوة الرابعة: استنتاج حل الأساس المقبول الجديد

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{13}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 100)$،كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -100)$ من الخلية المملوءة (x_{33})؛
- إضافة كمية $(\theta = 100)$ إلى الخلية المملوءة (x_{32})؛
- طرح كمية $(-\theta = -100)$ من الخلية المملوءة (x_{12})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 400$	$b_2 = 900$	b_3 =200	b_4 =500
$a_1 = 500$	12 — 400	13 — $-\theta = -100$ — 100	4 — $\theta = 100$ — 100	6 — /
$a_2 = 700$	6 — /	4 — 700	10 — /	11 — /
$a_3 = 800$	10 — /	9 — $\theta = 100$ — 100	12 — $-\theta = -100$ — 200	4 — 500

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 400$	$b_2 = 900$	b_3 =200	b_4 =500
$a_1 = 500$	12 — 400	13 — /	4 — 100	6 — /
$a_2 = 700$	6 — /	4 — 700	10 — /	11 — /
$a_3 = 800$	10 — /	9 — 200	12 — 100	4 — 500

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة**: عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 3 - 1) = 6$

$$X_{11} = 400\ ;\ X_{13} = 100;\ X_{22} = 700;\ X_{32} = 200;\ X_{33} = 100;\ X_{34} = 500$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة**: تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12} = 0;\ X_{14} = 0;\ X_{21} = 0;\ X_{23} = 0; X_{24} = 0;\ X_{31} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف**:

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z=}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (12*400)+ (4*100)+(4*700)+(9*200)+(12*100)+(4*500)=\mathbf{13000\ DA}$$

اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)

$$X_{12} = 13 - 4 + 12 - 9 = +12 \Longrightarrow \Delta_{12} = +12$$
$$X_{14} = 6 - 4 + 12 - 4 = +10 \Longrightarrow \Delta_{14} = +10$$
$$X_{21} = 6 - 12 + 4 - 12 + 9 - 4 = -9 \Longrightarrow \Delta_{21} = -9$$
$$X_{23} = 10 - 12 + 9 - 4 = +3 \Longrightarrow \Delta_{23} = +3$$

$$X_{24} = 11 - 4 + 12 - 10 = +9 \Longrightarrow \Delta_{24} = +9$$
$$X_{31} = 10 - 12 + 4 - 12 = -10 \Longrightarrow \Delta_{31} = -10$$

نُلاحظ أن هناك بعض الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي فإن هذا الجدول ليس جدول الحل الأمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة (−) والذي هو ($\Delta_{31} = -10$)، ونقوم بملئها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الموارد المتاحة.

إدخال هذه الخلية (x_{31}) إلى جدول الحل يكون عن طريق ملئها،

الخطوة الثالثة: تحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل (تحديد أعظم قيمة لـ θ)

يتم تحديد أعظم قيمة لـ θ يمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل وفق القاعدة التالية: أعظم كمية ممكنة لملأ الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل تُساوي أقل كمية (x_{ij}) للخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة للمسار.

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{31}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{33} = 100$$
$$x_{12} = 400$$
$$Min\ (x_{33} = 100\ ;\quad x_{11} = 400) = x_{12} = 100$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـθ) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{31}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 100$.

الخطوة الرابعة: استنتاج حل الأساس المقبول الجديد

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{31}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية ($\theta = 100$)، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية ($-\theta = -100$) من الخلية المملوءة (x_{33})؛
- إضافة كمية ($\theta = 100$) إلى الخلية المملوءة (x_{13})؛
- طرح كمية ($-\theta = -100$) من الخلية المملوءة (x_{11})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 400$	$b_2 = 900$	b_3 =200	b_4 =500
$a_1 = 500$	12 $-\theta = -100$ 400	13 /	4 $\theta = 100$ 100	6 /
$a_2 = 700$	6 /	4 700	10 /	11 /
$a_3 = 800$	10 $\theta = 100$ 100	9 200	12 $-\theta = -100$ 100	4 500

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 400$	$b_2 = 900$	b_3 =200	b_4 =500
$a_1 = 500$	12 300	13 /	4 200	6 /

$a_2 = 700$	6 /	4 700	10 /	11 /
$a_3 = 800$	10 100	9 200	12 /	4 500

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1) = (4+3-1) = 6$

$$X_{11} = 300\ ;\ X_{13} = 200;\ X_{22} = 700;\ X_{31} = 100;\ X_{32} = 200;\ X_{34} = 500$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12} = 0;\ X_{14} = 0;\ X_{21} = 0;\ X_{23} = 0;\ X_{24} = 0; X_{33} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} =(12*300)+ (4*200)+(4*700)+(10*100)+(9*200)+(4*500)=12000\ DA}$$

- **اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)**

$$X_{12} = 13-9+10-12 = +2 \Longrightarrow \Delta_{13} = +2$$
$$X_{14} = 6-4+10-12 = 0 \Longrightarrow \Delta_{14} = 0$$
$$X_{21} = 6+4-9+10 = +11 \Longrightarrow \Delta_{21} = +11$$
$$X_{23} = 10-4+12-10+9-4 = +13 \Longrightarrow \Delta_{23} = +13$$
$$X_{24} = 11-4+9-4 = +12 \Longrightarrow \Delta_{24} = +12$$
$$X_{33} = 12-4+12-10 = +10 \Longrightarrow \Delta_{33} = +10$$

نُلاحظ أن هناك جميع الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير موجب أو معدوم، وبالتالي فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل.

2.5. طريقة التوزيع المعدلة

تنص هذه الطريقة على إضافة عموداً وصفاً جديداً للمصفوفة الأصلية، العمود $(\mathcal{U}_i)$ يُمثل قيم الأسطر والسطر (V_i) يُمثل قيم الأعمدة. ونحسب قيم الصفوف والأعمدة المضافة بالاستناد إلى تكلفة الخلايا الممتلئة التي نسميها بالقيم المساعدة بعد أن نفترض دائماً $(\mathcal{U}_1 = 0)$.

تكلفة الخلية الممتلئة = $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها. حيث: $(i = 1, m,)$، $(j = 1, n,)$.

$$C_{ij} = \mathcal{U}_i + V_J$$

بعد حساب القيم المساعدة نلجأ إلى اختبار الخلايا الفارغة كالتالي:

قيمة اختبار تكلفة الخلية الفارغة = تكلفة هذه الخلية الفارغة – $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها.

فإذا كانت نتيجة الاختبار كلها قيماً سالبة فهذا يعني أن استخدام هذه الخلايا في النقل يُمكن أن يُوفر في تكاليف النقل، ونأخذ أشدها سلبياً، أما إذا كانت نتيجة الاختبار قيماً موجبة، فهذا يعني أن استخدامها سيؤدي إلى زيادة التكاليف وإنما نحصل على جدول توزيع جديد بالتكاليف نفسها.

يتم اختبار الخلية الفارغة التي يُمكن أن تُوفر أكثر من غيرها فيما لو استخدمت في الحل ويتم نقل أقل عدد من الوحدات في الخلايا السالبة ضمن المسار في الخلية الفارغة لتضاف وتُطرح هذه الكمية نفسها بحسب الإشارة (عند الموجب نُضيف وعند السالب نطرح)، ونُتابع الحل في عملية اختبار مثالية الحلول المتتابعة حتى نحصل على الحل الأمثل الذي تكون فيه نتيجة اختبار الخلايا الفارغة كلها قيماً موجبة أو صفراً في حالة تخفيض التكاليف.

♦ **مثال (2.7)**

نعتبر جدول الحل الأمثل لمسألة النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 15$	$b_2 = 18$	b_3 =22
$a_1 = 10$	2 /	1 10	5 5
$a_2 = 25$	7 3	4 /	3 22
$a_3 = 20$	6 12	2 8	4 /

المطلوب

أوجد الحل الأمثل بواسطة الطريقة المعدلة

♦ **الحل**

إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل

نقوم بإضافة عموداً وصفاً جديداً للمصفوفة الأصلية، العمود ($\mathcal{U}_i$) يُمثل قيم الأسطر والسطر (V_i) يُمثل قيم الأعمدة. ونحسب قيم الصفوف والأعمدة المضافة بالاستناد إلى تكلفة الخلايا الممتلئة التي نسميها بالقيم المساعدة بعد أن نفترض دائماً ($\mathcal{U}_1 = 0$)، كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 15$	$b_2 = 18$	b_3 =22	$\mathcal{U}_i$
$a_1 = 10$	2 /	1 10	5 /	$\mathcal{U}_1$
$a_2 = 25$	7 3	4 /	3 22	$\mathcal{U}_2$
$a_3 = 20$	6 12	2 8	4 /	$\mathcal{U}_3$
V_i	V_1	V_2	V_3	

نقوم بحساب تكلفة الخلية الممتلئة = ($V_j + \mathcal{U}_i$) الموجودين في سطرها وعمودها. حيث: ($j = 1, n,$)، ($i = 1, m,$)، حيث تكلفة الخلية الممتلئة تُحسب كما يلي:

$$C_{ij} = \mathcal{U}_i + V_J$$

وتتشكل لنا مجموعة من المعادلات يُمكن حلها كما يلي:

$$C_{12} = \mathcal{U}_1 + V_2 = 1$$
$$C_{21} = \mathcal{U}_2 + V_1 = 7$$
$$C_{23} = \mathcal{U}_2 + V_3 = 3$$
$$C_{31} = \mathcal{U}_3 + V_1 = 6$$
$$C_{32} = \mathcal{U}_3 + V_2 = 2$$

لحل هذه المعادلات نُعطي المتغير $\mathcal{U}_1$ القيمة صفر (0)، وبالتالي نتحل على ما يلي:

$$\mathcal{U}_1 = 0 \Longrightarrow V_2 = 1$$
$$V_2 = 1 \Longrightarrow \mathcal{U}_3 = 1$$
$$\mathcal{U}_3 = 1 \Longrightarrow V_1 = 5$$

$$V_1 = 5 \Longrightarrow \mathcal{U}_2 = 2$$
$$\mathcal{U}_2 = 2 \Longrightarrow V_3 = 1$$

بعد حساب القيم المساعدة نلجأ إلى اختبار الخلايا الفارغة كالتالي:

قيمة اختبار تكلفة الخلية الفارغة = تكلفة هذه الخلية الفارغة – $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها.

$$\overline{C_{ij}} = C_{ij} - (\mathcal{U}_i + V_j)$$

وبالتالي نتحصل على تكاليف الخلايا الفارغة كما يلي:

$$\overline{C_{11}} = C_{11} - (\mathcal{U}_1 + V_1) = 2 - (0 + 5) = -3 < 0$$
$$\overline{C_{13}} = C_{13} - (\mathcal{U}_1 + V_3) = 5 - (0 + 1) = 4 > 0$$
$$\overline{C_{22}} = C_{22} - (\mathcal{U}_2 + V_2) = 4 - (2 + 1) = 1 > 0$$
$$\overline{C_{33}} = C_{33} - (\mathcal{U}_3 + V_3) = 4 - (1 + 1) = 2 > 0$$

نُلاحظ أن الخلية (x_{11}) لها أقل تكلفة سالبة $(\bar{C}_{11} = -3)$ وبالتالي فإن المتغير (x_{11}) سوف يدخل إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، وباستخدام طريقة المسار المغلق نتحصل على ما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 15$	$b_2 = 18$	$b_3 = 22$	$\mathcal{U}_i$
$a_1 = 10$	2 (+) /	1 (-) 10	5 /	$\mathcal{U}_1$
$a_2 = 25$	7 3	4 /	3 22	$\mathcal{U}_2$
$a_3 = 20$	6 (-) 12	2 (+) 8	4 /	$\mathcal{U}_3$
V_i	V_1	V_2	V_3	

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{11}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{12} = 10$$
$$x_{31} = 12$$
$$Min\ (x_{12} = 10\ ;\quad x_{31} = 12) = x_{12} = 10$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـ$\boldsymbol{\theta}$) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{11}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 10$

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{31}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 10)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -10)$ من الخلية المملوءة (x_{12})؛
- إضافة كمية $(\theta = 10)$ إلى الخلية المملوءة (x_{32})؛
- طرح كمية $(-\theta = -10)$ من الخلية المملوءة (x_{31})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 15$	$b_2 = 18$	$b_3 = 22$	$\mathcal{U}_i$
$a_1 = 10$	2 $\theta = 10$ /	1 $-\theta = -10$ 10	5 /	$\mathcal{U}_1$
$a_2 = 25$	7 3	4 /	3 22	$\mathcal{U}_2$

$a_3 = 20$	6 $-\theta = -10$ 12	2 $\theta = 10$ 8	4 /	$\mathcal{U}_3$
V_i	V_1	V_2	V_3	

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 15$	$b_2 = 18$	$b_3 = 22$	$\mathcal{U}_i$
$a_1 = 10$	2 10	1 /	5 /	$\mathcal{U}_1$
$a_2 = 25$	7 3	4 /	3 22	$\mathcal{U}_2$
$a_3 = 20$	6 2	2 18	4 /	$\mathcal{U}_3$
V_i	V_1	V_2	V_3	

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1) = (3+3-1) = 5$

$$X_{11} = 10\ ;\ X_{21} = 3;\ X_{23} = 22;\ X_{31} = 2;\ X_{32} = 18$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12} = 0;\ X_{13} = 0;\ X_{22} = 0;\ X_{24} = 0; X_{33} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}x_{ij} = (2*10) + (7*3) + (3*22) + (6*2) + (2*18) = \mathbf{155\ DA}$$

اختبار الخلايا الفارغة

نقوم بحساب تكلفة الخلية الممتلئة = $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها. حيث: $(j = 1, n,)$، $(i = 1, m,)$.

حيث تكلفة الخلية الممتلئة تُحسب كما يلي:

$$\mathrm{C_{ij}} = \mathcal{U}_\mathrm{i} + \mathrm{V_j}$$

وتتشكل لنا مجموعة من المعادلات يُمكن حلها كما يلي:

$$\mathrm{C_{11}} = \mathcal{U}_1 + \mathrm{V_1} = 2$$
$$\mathrm{C_{21}} = \mathcal{U}_2 + \mathrm{V_1} = 7$$
$$\mathrm{C_{23}} = \mathcal{U}_2 + \mathrm{V_3} = 3$$
$$\mathrm{C_{31}} = \mathcal{U}_3 + \mathrm{V_1} = 6$$
$$\mathrm{C_{32}} = \mathcal{U}_3 + \mathrm{V_2} = 2$$

لحل هذه المعادلات نُعطي المتغير $\mathcal{U}_1$ القيمة صفر (0)، وبالتالي نتحل على ما يلي:

$$\mathcal{U}_1 = 0 \Longrightarrow \mathrm{V_1} = 2$$
$$\mathrm{V_1} = 2 \Longrightarrow \mathcal{U}_2 = 5$$
$$\mathcal{U}_2 = 5 \Longrightarrow \mathrm{V_3} = -2$$
$$\mathrm{V_1} = 2 \Longrightarrow \mathcal{U}_3 = 4$$
$$\mathcal{U}_3 = 4 \Longrightarrow \mathrm{V_2} = -2$$

بعد حساب القيم المساعدة نلجأ إلى اختبار الخلايا الفارغة كالتالي:

قيمة اختبار تكلفة الخلية الفارغة = تكلفة هذه الخلية الفارغة – $(\mathrm{V_j} + \mathcal{U}_\mathrm{i})$ الموجودين في سطرها وعمودها.

$$\overline{C_{ij}} = C_{ij} - (\mathcal{U}_i + V_j)$$

وبالتالي نتحصل على تكاليف الخلايا الفارغة كما يلي:

$$\overline{C_{12}} = C_{12} - (\mathcal{U}_1 + V_2) = 1 - (0 - 2) = 3 > 0$$
$$\overline{C_{13}} = C_{13} - (\mathcal{U}_1 + V_3) = 5 - (0 - 2) = 7 > 0$$
$$\overline{C_{22}} = C_{22} - (\mathcal{U}_2 + V_2) = 4 - (5 - 2) = 1 > 0$$
$$\overline{C_{33}} = C_{33} - (\mathcal{U}_3 + V_3) = 4 - (4 - 2) = 2 > 0$$

نُلاحظ أن جميع قيم $\overline{C_{ij}}$ موجبة، وبالتالي وصلنا إلى الحل الأمثل.

تمارين الفصل الخامس

التمرين الأول

نفترض مسألة النقل التالية:

B_i / A_i	$b_1 = 105$	$b_2 = 65$
$a_1 = 60$	4	2
$a_2 = 40$	7	5
$a_3 = 70$	3	10

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول

- بطريقة الركن الشمالي الغربي؛
- طريقة الكلفة الأقل؛
- طريقة فوجل.

التمرين الثاني

نفترض مسألة النقل التالية:

B_i / A_i	$b_1 = 200$	$b_2 = 600$	$b_3 = 400$
$a_1 = 400$	7	6	5
$a_2 = 500$	4	8	1
$a_3 = 300$	2	3	9

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول

- بطريقة فوجل؛

التمرين الثالث

نفترض مسألة النقل التالية:

B_i / A_i	$b_1 = 400$	$b_2 = 200$	$b_3 = 600$	$b_4 = 400$
$a_1 = 300$	4	7	2	10
$a_2 = 500$	5	8	7	11
$a_3 = 700$	10	9	6	13

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول

طريقة الكلفة الأقل؛

التمرين الرابع

نفترض مسألة النقل التالية:

B_i / A_i	$b_1 = 13$	$b_2 = 17$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 20$	2	5	5	3
$a_2 = 15$	1	3	3	4
$a_3 = 25$	2	4	1	3

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول

بطريقة الركن الشمالي الغربي؛

طريقة الكلفة الأقل؛

طريقة فوجل.

التمرين الخامس

نفترض مسألة النقل التالية:

B_i / A_i	$b_1 = 800$	$b_2 = 100$	$b_3 = 700$	$b_4 = 400$
$a_1 = 500$	1	5	10	2
$a_2 = 300$	6	11	15	3
$a_3 = 400$	12	4	13	2
$a_4 = 200$	12	7	9	1
$a_5 = 600$	21	8	7	9

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول

بطريقة الركن الشمالي الغربي؛

طريقة الكلفة الأقل؛

طريقة فوجل.

التمرين السادس

نفترض مسألة النقل التالية:

B_i / A_i	$b_1 = 80$	$b_2 = 60$	$b_3 = 40$	$b_4 = 30$

$a_1 = 90$	2	1	3	2
$a_2 = 70$	3	3	3	1
$a_3 = 50$	3	3	2	1

المطلوب:

- أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة الركن الشمالي الغربي؛
- أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بواسطة طريقة الحجر المتنقل.

التمرين السابع

نفترض مسألة النقل التالية:

B_i / A_i	$b_1 = 40$	$b_2 = 22$	$b_3 = 38$
$a_1 = 35$	6	5	2
$a_2 = 42$	5	4	3
$a_3 = 23$	3	7	6

المطلوب:

- أوجد الحل الأساسي الأول بطريقة الركن الشمالي الغربي؛
- أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بواسطة الطريقة المعدلة.

التمرين الثامن

نفترض مسألة النقل التالية:

B_i / A_i	$b_1 = 150$	$b_2 = 320$	$b_3 = 200$
$a_1 = 150$	2	4	0
$a_2 = 200$	3	1	5
$a_3 = 325$	6	2	4
$a_4 = 25$	1	7	9

المطلوب:

- أوجد الحل الأساسي الأولي بطريقة التكلفة الأقل.

التمرين التاسع

الجدول التالي يُمثل مصفوفة التكلفة لمسألة النقل الآتية:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$
$a_1 = 100$	4	11	0	2
$a_2 = 190$	9	6	1	3
$a_3 = 200$	5	7	2	10

المطلوب

- أوجد الحل الأساسي الأولي بواسطة طريقة الركن الشمالي الغربي؛
- أوجد الحل الأمثل لهذه المسألة بواسطة الطريقتين.

حلول تمارين الفصل الخامس

التمرين الأول

1. إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة الركن الشمالي الغربي

ترتكز هذه الطريقة على التوزيع خلية من اليسار إلى اليمين بحيث نراعي الكميات المتاحة والكميات المطلوبة (لا نأخذ من مورد أكثر مما عنده ولا نعطي المستهلك أكثر حاجته).

B_i / A_i	$b_1 = 105$	$b_2 = 65$
$a_1 = 60$	4 | 60	2 | /
$a_2 = 40$	7 | 40	5 | /
$a_3 = 70$	3 | 5	10 | 65

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{2} b_j = 170$$

- نقوم بنقل 60 وحدة من المورد a_1 إلى المركز b_1 وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_1 ولم يتبق في مخزون المورد a_1أي وحدة.
- نقوم بنقل 40 وحدة من المورد a_2 إلى المركز b_1 وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_1 ولم يتبق في مخزون المورد a_2 أي وحدة.
- نقوم بنقل 5 وحدات فقط من المورد a_3 إلى المركز b_1 وبالتالي تم تلبية جميع احتياجات المركز b_1 وثم نقوم بنقل 65 وحدة المتبقية من المورد a_3 إلى المركز b_2 ومن ثم لم يتبق في مخزون المورد a_3 أي وحدة.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت ويجب أن يتحقق الشرط التالي: وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يُساوي 4 خلايا، حيث نلاحظ أن عدد الأسطر m=3 وعدد الأعمدة n=2، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$\begin{aligned} Nombre\ des\ cellules\ remplies &= m + n - 1 \\ &= 3 + 2 - 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

عدد الخلايا المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة) – 1

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

✍ **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11} = 60$	$X_{12} = 0$
$X_{21} = 40$	$X_{22} = 0$
$X_{31} = 5$	$X_{32} = 65$

موزعة كما يلي:

✍ متغيرات الأساس الموجبة: عددها يساوي: $(m + n - 1) = (3 + 2 - 1) = 4$

$$X_{11} = 60\ ;\ X_{21} = 40;\ X_{31} = 5;\ X_{32} = 65$$

✍ متغيرات خارج الأساس المعدومة: تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12} = 0;\ X_{22} = 0$$

✍ قيمة دالة الهدف:

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} C_{ij}x_{ij} = 60(4) + 40(7) + 5(3) + 65(10) = 1185}$$

2. طريقة الكلفة الأقل

تبعاً لهذه الطريقة نبدأ بملأ الخانة الفارغة التي لها أدنى تكلفة وحدوية للنقل حيث أننا ننظر إلى المصفوفة بوضعها كليةً، ونعطي الخلية ذات التكلفة الأقل حاجتها ومن ثم ننتقل إلى خلية أخرى تكون تكلفتها تلي تكلفة الخلية السابقة ودائماً يجب مراعاة الكميات المتاحة والكميات المطلوبة أيهما أقل.

B_i / A_i	$b_1 = 105$	$b_2 = 65$
$a_1 = 60$	4 /	2 60
$a_2 = 40$	7 35	5 5
$a_3 = 70$	3 70	10 /

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{2} b_j = 170$$

- نقوم بنقل 60 وحدة من المورد a_1 إلى المركز b_2 عند الخلية (x_{12}) لأنها تُمثل أدنى تكلفة، وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_1 ولم يتبق في مخزون المورد a_1 أي وحدة.
- نقوم بنقل 70 وحدة من المورد a_3 إلى المركز b_1 عند الخلية (x_{31}) ولم يتبق في مخزون المورد a_3 أي وحدة.
- نقوم بنقل 5 وحدات فقط من المورد a_2 إلى المركز b_2 عند الخلية (x_{22}) وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_2.
- نقوم بنقل 35 وحدة المتبقية من المورد a_2 إلى المركز b_1 عند الخلية (x_{21}) وبالتالي تم تلبية جميع احتياجات المركز b_1 ومن ثم لم يتبق في مخزون المورد a_2 أي وحدة.

من الجدل أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(\boldsymbol{m} =)$وعدد الأعمدة $(\boldsymbol{n = 2})$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$\begin{aligned} Nombre\ des\ cellules\ remplies &= m + n - 1 \\ &= 3 + 2 - 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

✍ **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11} = 0$	$X_{12} = 60$
$X_{21} = 35$	$X_{22} = 5$

$X_{31} = 70$	$X_{32} = 0$

موزعة كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (3 + 2 - 1) = 4$

$$X_{12} = 60\ ;\ X_{21} = 35;\ X_{22} = 5;\ X_{31} = 70$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{11} = 0;\ X_{32} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} C_{ij}x_{ij} = (4*0) + (2*60) + (7*35) + (5*5) + (3*70) + (10*0) = 600$$

3. إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة فوجل

- يُحسب الفرق بين أقل تكلفتين (غير متساويتين) في كل سطر وفي كل عمود. وهنا لا يصح أن يكون الفرق صفراً (إذا توافق في أي عمود أو سطر تكلفتان متساويتان لا يُؤخذ الفرق بينهما) ونضعها في عمود وسطر إضافيين؛
- نأخذ السطر أو العمود ذا الفرق الأكبر وبالتالي يجب إشباع الخلية ذات التكلفة الأقل الموجودة فيهما قبل غيرها بحسب شروط الكميات المتوافرة والكميات المطلوبة المقابلة لها؛
- نهمل السطر أو العمود الذي يتم إشباعه ونعدم أرقام الكميات المتوافرة والمطلوبة بطرح الكمية التي وضعناها في الخلية ذات التكلفة الأقل؛
- نكرر الخطوات السابقة مع الأخذ بالحسبان الأسطر والأعمدة المهملة سابقاً حتى نحصل على أفضل توزيع، بأن يكون عدد الخلايا الممتلئة يساوي عدد الأسطر مضافاً إليه عدد الأعمدة ناقصا واحد.

B_i / A_i		$b_1 = 105$	$b_2 = 65$	فروقات الأسطر		
				ج	ب	أ
$a_1 = 60$		4 — 35	2 — 25	2	2	2
$a_2 = 40$		7 — /	5 — 40	2	2	2
$a_3 = 70$		3 — 70	10 — /	(7)	/	
فروقات الأعمدة	أ	1	3			
	ب	(3)	3			
	ج	/	(3)			

من الجدول أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(= \boldsymbol{m})$ وعدد الأعمدة $(\boldsymbol{n = 2})$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m + n - 1$$
$$= 3 + 2 - 1$$
$$= 4$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

- **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11}=35$	$X_{12}=25$
$X_{21}=0$	$X_{22}=40$
$X_{31}=70$	$X_{32}=0$

موزعة كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1)=(3+2-1)=4$

$$X_{11}=35\ ;\ X_{12}=25;\ X_{22}=40;\ X_{31}=70$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{21}=0;\ X_{32}=0$$

- **قيمة دالة الهدف**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} C_{ij}x_{ij}=(4*35)+(2*25)+(5*40)+(3*70)=600$$

التمرين الثاني

1. إيجاد الحل الأساسي وفق طريقة فوجل.

B_i / A_i		$b_1=200$	$b_2=600$	$b_3=400$	فروقات الأسطر		
					أ	ب	ج
$a_1=400$		7 /	6 400	5 /	1	1	1
$a_2=500$		4 100	8 /	1 400	3	(4)	/
$a_3=300$		2 100	3 200	9 /	1	1	1
فروقات الأعمدة	أ	2	3	(4)			
	ب	2	3	/			
	ج	(5)	3	/			

من الجدول أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(m=)$ وعدد الأعمدة $(n=3)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m+n-1$$
$$= 3+3-1$$
$$= 5$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

- **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11}=0$	$X_{12}=400$	$X_{13}=0$
$X_{21}=100$	$X_{22}=0$	$X_{23}=400$
$X_{31}=100$	$X_{32}=200$	$X_{33}=0$

موزعة كما يلي:

- متغيرات الأساس الموجبة: عددها يساوي: $(m+n-1)=(3+3-1)=5$

$$X_{12}=400\ ;\ X_{21}=100;\ X_{23}=400;\ X_{31}=100;\ X_{32}=200$$

- متغيرات خارج الأساس المعدومة: تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{11} = 0;\ X_{13} = 0;\ X_{22} = 0;\ X_{33} = 0$$

- قيمة دالة الهدف:

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}x_{ij} = (6*400) + (4*100) + (1*400) + (2*100) + (3*200) = 4000$$

التمرين الثالث

1. إيجاد الحل الأساسي وفق طريقة الكلفة الأقل

تبعاً لهذه الطريقة نبدأ بملأ الخانة الفارغة التي لها أدنى تكلفة وحدوية للنقل حيث أننا ننظر إلى المصفوفة بوضعها كليةً، ونعطي الخلية ذات التكلفة الأقل حاجتها ومن ثم ننتقل إلى خلية أخرى تكون تكلفتها تلي تكلفة الخلية السابقة ودائماً يجب مراعاة الكميات المتاحة والكميات المطلوبة أيهما أقل.

B_i / A_i	$b_1 = 400$	$b_2 = 200$	$b_3 = 600$	$b_4 = 400$
$a_1 = 350$	4 /	7 /	2 350	10 /
$a_2 = 550$	5 400	8 150	7 /	11 /
$a_3 = 700$	10 /	9 50	6 250	13 400

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1600$$

- نقوم بنقل 350 وحدة من المورد (a_1) إلى المركز (b_3) عند الخلية (x_{13}) لأنها تُمثل أدنى تكلفة، وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز (b_3) ولم يتبق في مخزون المورد (a_1) أي وحدة.
- نقوم بنقل 400 وحدة من المورد (a_2) إلى المركز (b_1) عند الخلية (x_{21}) وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز (b_1) وبقي في مخزون المورد (a_2)150 وحدة.
- نقوم بنقل 250 وحدة من المورد (a_3) إلى المركز(b_3) عند الخلية (x_{33}) وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز(b_3)وبقي لدينا 450 وحدة من المورد (a_3)؛
- نقوم بنقل 150 وحدة المتبقية من المورد (a_2) إلى المركز (b_2) عند الخلية (x_{22}) وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز (b_2) ومن ثم لم يتبق في مخزون المورد (a_2) أي وحدة.
- نقوم بنقل 50 وحدة من المورد (a_3) إلى المركز (b_2) عند الخلية (x_{32}) وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز (b_2).
- نقوم بنقل 400 وحدة المتبقية من المورد (a_3) إلى المركز (b_3) عند الخلية (x_{33}) وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز (b_3).

من الجدل أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(m =)$ وعدد الأعمدة $(n = 4)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m + n - 1$$
$$= 3 + 4 - 1$$
$$= 6$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

- قيم متغيرات القرار:

$X_{11} = 0$	$X_{12} = 0$	$X_{13} = 350$	$X_{14} = 0$
$X_{21} = 400$	$X_{22} = 150$	$X_{23} = 0$	$X_{24} = 0$
$X_{31} = 0$	$X_{32} = 50$	$X_{33} = 250$	$X_{34} = 400$

موزعة كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (3 + 4 - 1) = 6$

$$X_{13} = 350\ ;\ X_{21} = 400;\ X_{22} = 150;\ X_{32} = 50;\ X_{33} = 250;\ X_{34} = 400$$

- متغيرات خارج الأساس المعدومة: تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{11} = 0;\ X_{12} = 0;\ X_{14} = 0;\ X_{23} = 0;\ X_{24} = 0;\ X_{31} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}} = (2 * 350) + (5 * 400) + (8 * 150) + (9 * 50) + (6 * 250) + (13 * 400) = \mathbf{11050}$$

التمرين الرابع

1. إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة الركن الشمالي الغربي

ترتكز هذه الطريقة على التوزيع خلية من اليسار إلى اليمين بحيث نراعي الكميات المتاحة والكميات المطلوبة (لا نأخذ من مورد أكثر مما عنده ولا نعطي المستهلك أكثر حاجته).

B_i / A_i	$b_1 = 13$	$b_2 = 17$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 20$	**2** 13	**5** 7	**5** /	**3** /
$a_2 = 15$	**1** /	**3** 10	**3** **5**	**4** /
$a_3 = 25$	**2** /	**4** /	**1** 11	**3** 14

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 60$$

- نقوم بنقل 13 وحدة من المورد a_1 إلى المركز b_1 وبالتالي يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_1 وبقي في مخزون المورد $7a_1$ وحدات.

- نقوم بنقل 7 وحدات المتبقية من المورد a_1 إلى المركز b_2 وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_2 ولم يتبق في مخزون المورد a_1 أي وحدة.
- نقوم بنقل 10 وحدات فقط من المورد a_2 إلى المركز b_2 وبالتالي تم تلبية جميع احتياجات المركز b_2 وثم نقوم بنقل 5 وحدات المتبقية من المورد a_2 إلى المركز b_3 ومن ثم لم يتبق في مخزون المورد a_2 أي وحدة.
- نقوم بنقل 11 وحدة فقط من المورد a_3 إلى المركز b_3 وبالتالي تم تلبية جميع احتياجات المركز b_3 وثم نقوم بنقل14 وحدة المتبقية من المورد a_3 إلى المركز b_4 ومن ثم لم يتبق في مخزون المورد a_3 أي وحدة.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت ويجب أن يتحقق الشرط التالي: وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يُساوي 6 خلايا، حيث نلاحظ أن عدد الأسطر $(m = 3)$ وعدد الأعمدة $(n = 4)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m + n - 1$$
$$= 3 + 4 - 1$$
$$= 6$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

قيم متغيرات القرار:

$X_{11} = 13$	$X_{12} = 7$	$X_{13} = 0$	$X_{14} = 0$
$X_{21} = 0$	$X_{22} = 10$	$X_{23} = 5$	$X_{24} = 0$
$X_{31} = 0$	$X_{32} = 0$	$X_{33} = 11$	$X_{34} = 14$

موزعة كما يلي:

متغيرات الأساس الموجبة: عددها يساوي: $(m + n - 1) = (3 + 4 - 1) = 6$

$X_{11} = 13\ ;\ X_{12} = 7;\ X_{22} = 10;\ X_{23} = 5;\ X_{33} = 11;\ X_{34} = 14$

متغيرات خارج الأساس المعدومة: تمثل باقي متغيرات القرار:

$X_{13} = 0;\ X_{14} = 0;\ X_{21} = 0;\ X_{22} = 10; X_{24} = 0;\ X_{31} = 0;\ X_{32} = 0$

قيمة دالة الهدف:

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (2*13)+ (5*7)+(3*10)+(3*5)+(1*11)+(3*14)=159}$$

2. إيجاد الحل الأساسي وفق طريقة الكلفة الأقل

تبعاً لهذه الطريقة نبدأ بملأ الخانة الفارغة التي لها أدنى تكلفة وحدوية للنقل حيث أننا ننظر إلى المصفوفة بوضعها كليةً، ونعطي الخلية ذات التكلفة الأقل حاجتها ومن ثم ننتقل إلى خلية أخرى تكون تكلفتها تلي تكلفة الخلية السابقة ودائماً يجب مراعاة الكميات المتاحة والكميات المطلوبة أيهما أقل.

B_i / A_i	$b_1 = 13$	$b_2 = 17$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 20$	2 /	5 6	5 /	3 14
$a_2 = 15$	1 13	3 2	3 /	4 /

$a_3 = 25$	**2**	/	**4**	**9**	**1**	16	**3** /

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 60$$

- نقوم بنقل 13 وحدة من المورد (a_2) إلى المركز (b_1) عند الخلية (x_{21}) لأنها تُمثل أدنى تكلفة، وبالتالي يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز (b_1) ولم يتبق في مخزون المورد (a_2) إلا وحدتين.
- نقوم بنقل 16 وحدة من المورد (a_3) إلى المركز (b_3) عند الخلية (x_{33}) وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز (b_3) وبقي في مخزون المورد (a_3) 9 وحدات.
- نقوم بنقل 14 وحدة من المورد (a_1) إلى المركز (b_4) عند الخلية (x_{14}) وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز (b_4) وبقي في مخزون المورد (a_1) 6 وحدات.
- نقوم بنقل وحدتين من المورد (a_2) إلى المركز (b_2) عند الخلية (x_{22}) وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز (b_2) ولم يتبق في مخزون المورد (a_2) أي وحدة؛
- نقوم بنقل 9 وحدات المتبقية من المورد (a_3) إلى المركز (b_2) عند الخلية (x_{32}) وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز (b_2) ومن ثم لم يتبق في مخزون المورد (a_3) أي وحدة؛
- نقوم بنقل 6 وحدات المتبقية من المورد (a_1) إلى المركز (b_2) عند الخلية (x_{12}) وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز (b_2) ومن ثم لم يتبق في مخزون المورد (a_1) أي وحدة.

من الجدل أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(\boldsymbol{m} =)$ وعدد الأعمدة $(\boldsymbol{n = 4})$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$\begin{aligned} Nombre\ des\ cellules\ remplies &= m + n - 1 \\ &= 3 + 4 - 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

✍ **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11} = 0$	$X_{12} = 6$	$X_{13} = 0$	$X_{14} = 14$
$X_{21} = 13$	$X_{22} = 2$	$X_{23} = 0$	$X_{24} = 0$
$X_{31} = 0$	$X_{32} = 9$	$X_{33} = 16$	$X_{34} = 0$

موزعة كما يلي:

✍ **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (3 + 4 - 1) = 6$

$$X_{12} = 6\,;\ X_{14} = 14;\ X_{21} = 13;\ X_{22} = 2;\ X_{32} = 9;\ X_{33} = 16$$

✍ **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{11} = 0;\ X_{13} = 0;\ X_{23} = 0;\ \ X_{24} = 0;\ X_{31} = 0; X_{34} = 0$$

✍ **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z=} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (5*6)+(3*14)+(1*13)+(3*2)+ (4*9)+ (1*16) = \mathbf{143}$$

3. إيجاد الحل الأساسي وفق طريقة فوجل.

B_i / A_i		$b_1 = 13$	$b_2 = 17$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$	فروقات الأسطر		
						أ	ب	ج
$a_1 = 20$		2 /	5 6	5 /	3 14	1	2	
$a_2 = 15$		1 13	3 2	3 /	4 /	2	0	
$a_3 = 25$		2 /	4 9	1 16	3 /	1	1	
فروقات الأعمدة	أ	1	1	2	0			
	ب	/	1	/	0			

من الجدل أعلاه نلاحظ أن عدد الأسطر $(= \boldsymbol{m})$ وعدد الأعمدة $(\boldsymbol{n = 4})$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m + n - 1$$
$$= 3 + 4 - 1$$
$$= 6$$

- أكبر فرق في السطور هو 2 ويُقابل المورد (a_2)، وبالتالي نقوم بنقل 13 وحدة من المورد (a_2) إلى المركز (b_1) عند الخلية (x_{21}) لأنها تُمثل أدنى تكلفة، وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز (b_1) ولم يتبق في مخزون المورد (a_2) إلا وحدتين.
- أكبر فرق في الأعمدة هو 2 ويُقابل المركز (b_3)، وبالتالي نقوم بنقل 16 وحدة من المورد (a_3) إلى المركز (b_3) عند الخلية (x_{33}) لأنها تُمثل أدنى تكلفة، وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز (b_3) ولم يتبق في مخزون المورد (a_3) إلا 9 وحدات.
- أكبر فرق في السطور هو 2 ويُقابل المورد (a_1)، وبالتالي نقوم بنقل 14 وحدة من المورد (a_1) إلى المركز (b_4) عند الخلية (x_{14}) لأنها تُمثل أدنى تكلفة، وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز (b_4) ولم يتبق في مخزون المورد (a_1) إلا6 وحدات.
- بقي العمود الممثل للمركز (b_2)، حيث يتم تعبئة الخلايا الأقل تكلفة، فنقوم بنقل الوحدتين المتبقيتين من المورد (a_2) إلى الخلية (x_{22}) لأنها تُمثل أدنى تكلفة، وبالتالي لم يتم تلبية جميع احتياجات المركز (b_2) ولم يتبق في مخزون المورد (a_2) أي وحدة
- نقوم بنقل 9 وحدات من المورد (a_3) إلى المركز (b_2) عند الخلية (x_{32})، وبالتالي لم يتم تلبية جميع احتياجات المركز (b_2) ولم يتبق في مخزون المورد (a_3)أي وحدة.
- نقوم بنقل 6 وحدات المتبقية من المورد (a_1)إلى المركز (b_2) عند الخلية (x_{12})، وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز (b_2)ولم يتبق في مخزون المورد (a_1) أي وحدة.

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

قيم متغيرات القرار:

$X_{11} = 0$	$X_{12} = 6$	$X_{13} = 0$	$X_{14} = 14$
$X_{21} = 13$	$X_{22} = 2$	$X_{23} = 0$	$X_{24} = 0$
$X_{31} = 0$	$X_{32} = 9$	$X_{33} = 16$	$X_{34} = 0$

موزعة كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1) = (3+4-1) = 6$

$$X_{12}=6\,;\ X_{14}=14;\ X_{21}=13;\ X_{22}=2;\ X_{32}=9;\ X_{33}=16$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{11}=0;\ X_{13}=0;\ X_{23}=0;\ X_{24}=0;\ X_{31}=0;X_{34}=0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z=}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}=(5*6)+(3*14)+(1*13)+(3*2)+(4*9)+(1*16)=\mathbf{143}$$

التمرين الخامس

1. إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة الركن الشمالي الغربي

ترتكز هذه الطريقة على التوزيع خلية من اليسار إلى اليمين بحيث نراعي الكميات المتاحة والكميات المطلوبة (لا نأخذ من مورد أكثر مما عنده ولا نعطي المستهلك أكثر حاجته).

B_i / A_i	$b_1 = 800$	$b_2 = 100$	$b_3 = 700$	$b_4 = 400$
$a_1 = 500$	**1** **500**	**5** /	**10** /	**2** /
$a_2 = 300$	**6** **300**	**11** /	**15** /	**3** /
$a_3 = 400$	**12** /	**4** **100**	**13** **300**	**2** /
$a_4 = 200$	**12** /	**7** /	**9** **200**	**1** /
$a_5 = 600$	**21** /	**8** /	**7** 200	**9** 400

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 2000$$

- نقوم بنقل 500 وحدة من المورد a_1 إلى المركز b_1 وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_1 ولم يتبق في مخزون المورد a_1أي وحدة.
- نقوم بنقل 300 وحدة من المورد a_2 إلى المركز b_1 وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_1 ولم يتبق في مخزون المورد a_2أي وحدة.
- نقوم بنقل 100 وحدة فقط من المورد a_3 إلى المركز b_2 وبالتالي تم تلبية جميع احتياجات المركز b_2، ثم نقوم بنقل 300 وحدة المتبقية المورد a_3 إلى المركز b_3، ولم يتبق في مخزون المورد a_3 أي وحدة.
- نقوم بنقل 200 وحدة من المورد a_4 إلى المركز b_3، ولم يتبق في مخزون المورد a_4أي وحدة.
- نقوم بنقل 200 وحدة من المورد a_5 إلى المركز b_3 وبالتالي تم تلبية جميع احتياجات المركز b_3، ثم نقوم بنقل 400 وحدة

المتبقية المورد a_5 إلى المركز b_4، ولم يتبق في مخزون المورد a_5 أي وحدة.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت ويجب أن يتحقق الشرط التالي:

وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يُساوي **7** خلايا، حيث نلاحظ أن عدد الأسطر $(m = 5)$ وعدد الأعمدة $(n = 4)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$Nombre\ des\ cellules\ remplies = m + n - 1$$
$$= 5 + 4 - 1$$
$$= 8$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

✍ **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11} = 13$	$X_{12} = 7$	$X_{13} = 0$	$X_{14} = 0$
$X_{21} = 0$	$X_{22} = 10$	$X_{23} = 5$	$X_{24} = 0$
$X_{31} = 0$	$X_{32} = 0$	$X_{33} = 11$	$X_{34} = 14$

موزعة كما يلي:

✍ **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (3 + 4 - 1) = 6$

$X_{11} = 13\ ;\ X_{12} = 7;\ X_{22} = 10;\ X_{23} = 5;\ X_{33} = 11;\ X_{34} = 14$

✍ **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$X_{13} = 0;\ X_{14} = 0;\ X_{21} = 0;\ X_{22} = 10; X_{24} = 0;\ X_{31} = 0;\ X_{32} = 0$

✍ **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z= \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (2*13)+ (5*7)+(3*10)+(3*5)+(1*11)+(3*14)=159}$$

التمرين السادس

1. إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة الركن الشمالي الغربي

ترتكز هذه الطريقة على التوزيع خلية من اليسار إلى اليمين بحيث نراعي الكميات المتاحة والكميات المطلوبة (لا نأخذ من مورد أكثر مما عنده ولا نعطي المستهلك أكثر حاجته).

B_i / A_i	$b_1 = 80$	$b_2 = 60$	$b_3 = 40$	$b_4 = 30$
$a_1 = 90$	2 — **80**	1 — **10**	3 — /	2 — /
$a_2 = 70$	3 — /	3 — **50**	3 — **20**	1 — /
$a_3 = 50$	3 — /	3 — /	2 — **20**	1 — **30**

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 210$$

- نقوم بنقل 80 وحدة من المورد a_1 إلى المركز b_1 وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_1 ولم يتبق في مخزون المورد a_1 إلا 10 وحدات.
- نقوم بنقل 10 وحدات المتبقية من المورد a_1 إلى المركز b_2 وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_2 ولم يتبق في مخزون المورد a_1 أي وحدة.
- نقوم بنقل 50 وحدة فقط من المورد a_2 إلى المركز b_2 وبالتالي تم تلبية جميع احتياجات المركز b_2، ثم نقوم بنقل 20 وحدة المتبقية المورد a_2 إلى المركز b_3، ولم يتبق في مخزون المورد a_2 أي وحدة.
- نقوم بنقل 20 وحدة من المورد a_3 إلى المركز b_3، ثم نقوم بنقل 30 وحدة المتبقية المورد a_3 إلى المركز b_4، ولم يتبق في مخزون المورد a_3 أي وحدة.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت ويجب أن يتحقق الشرط التالي: وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يُساوي **7** خلايا، حيث نلاحظ أن عدد الأسطر $(m = 3)$ وعدد الأعمدة $(n = 4)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$\begin{aligned} Nombre\ des\ cellules\ remplies &= m + n - 1 \\ &= 3 + 4 - 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

✍ **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11} = 80$	$X_{12} = 10$	$X_{13} = 0$	$X_{14} = 0$
$X_{21} = 0$	$X_{22} = 50$	$X_{23} = 20$	$X_{24} = 0$
$X_{31} = 0$	$X_{32} = 0$	$X_{33} = 20$	$X_{34} = 30$

موزعة كما يلي:

✍ **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (3 + 4 - 1) = 6$

$$X_{11} = 80\ ;\ X_{12} = 10;\ X_{22} = 50;\ X_{23} = 20;\ X_{33} = 20;\ X_{34} = 30$$

✍ **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{13} = 0;\ X_{14} = 0;\ X_{21} = 0;\ X_{24} = 0;\ X_{31} = 0;\ X_{32} = 0$$

✍ **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z=} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (2*80) + (1*10) + (3*50) + (3*20) + (2*20) + (1*30) = \mathbf{450}$$

2. إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بواسطة طريقة الحجر المتنقل

✍ **اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)**

$$\begin{aligned} X_{13} &= 3 - 3 + 3 - 1 = +2 \Longrightarrow \Delta_{12} = +2 \\ X_{14} &= 2 - 1 + 2 - 3 + 3 - 1 = +2 \Longrightarrow \Delta_{14} = +2 \\ X_{21} &= 3 - 3 + 1 - 2 = -1 \Longrightarrow \Delta_{21} = -1 \\ X_{24} &= 1 - 1 + 2 - 3 = -1 \Longrightarrow \Delta_{24} = -1 \end{aligned}$$

$$X_{31} = 3 - 2 + 3 - 3 + 1 - 2 = 0 \Longrightarrow \Delta_{31} = 0$$
$$X_{32} = 3 - 2 + 3 - 3 = +1 \Longrightarrow \Delta_{32} = +1$$

نُلاحظ أن هناك بعض الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي فإن هذا الجدول ليس جدول الحل الأمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة (−)، وأقل تكلفة والذي هو ($\Delta_{24} = -1$)، ونقوم بملئها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الموارد المتاحة.

إدخال هذه الخلية (x_{24}) إلى جدول الحل يكون عن طريق ملئها،

تحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل (تحديد أعظم قيمة لـ θ)

يتم تحديد أعظم قيمة لـ θ يمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل وفق القاعدة التالية: أعظم كمية ممكنة لملأ الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل تُساوي أقل كمية (x_{ij}) للخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة للمسار.

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{24}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{34} = 30$$
$$x_{23} = 20$$
$$Min\ (x_{34} = 30\ ;\quad x_{23} = 20) = x_{23} = 20$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـθ) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{24}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 20$.

استنتاج حل الأساس المقبول الجديد

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{24}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية ($\theta = 20$)، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية ($-\theta = -20$) من الخلية المملوءة (x_{34})؛
- إضافة كمية ($\theta = 20$) إلى الخلية المملوءة (x_{33})؛
- طرح كمية ($-\theta = -20$) من الخلية المملوءة (x_{23})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 80$	$b_2 = 60$	$b_3 = 40$	$b_4 = 30$
$a_1 = 90$	2 — 80	1 — 10	3 — /	2 — /
$a_2 = 70$	3 — /	3 — 50	3 — $-\theta = -20$ — 20	1 — $\theta = 20$ — /
$a_3 = 50$	3 — /	3 — /	2 — $\theta = 20$ — 20	1 — $-\theta = -20$ — 30

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 80$	$b_2 = 60$	$b_3 = 40$	$b_4 = 30$
$a_1 = 90$	2 — 80	1 — 10	3 — /	2 — /

$a_2 = 70$	3 /	3 50	3 /	1 20
$a_3 = 50$	3 /	3 /	2 40	1 10

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 3 - 1) = 6$

$$X_{11} = 80\ ;\ X_{12} = 10;\ X_{22} = 50;\ X_{24} = 20;\ X_{33} = 40;\ X_{34} = 10$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{13} = 0;\ \ X_{14} = 0;\ X_{21} = 0;\ X_{23} = 0;\ X_{31} = 0; X_{32} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (2 * 80) + (1 * 10) + (3 * 50) + (1 * 20) + (2 * 40) + (1 * 10)$$
$$= \mathbf{430}\ \boldsymbol{DA}$$

- **اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)**

$$X_{13} = 3 - 2 + 1 - 1 + 3 - 1 = +3 \Longrightarrow \Delta_{13} = +3$$
$$X_{14} = 2 - 1 + 3 - 1 = +3 \Longrightarrow \Delta_{14} = +3$$
$$X_{21} = 3 - 3 + 1 - 2 = -1 \Longrightarrow \Delta_{21} = -1$$
$$X_{23} = 3 - 1 + 1 - 2 = +1 \Longrightarrow \Delta_{23} = +1$$
$$X_{31} = 3 - 2 + 1 - 3 + 1 - 1 = -1 \Longrightarrow \Delta_{31} = -1$$
$$X_{32} = 3 - 1 + 1 - 3 = 0 \Longrightarrow \Delta_{32} = 0$$

نُلاحظ أن هناك بعض الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي فإن هذا الجدول ليس جدول الحل الأمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة $(-)$، وأقل تكلفة، ويُمكن تشغيلها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة، والذي هو $(\Delta_{21} = -1)$، ونقوم بملئها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الموارد المتاحة.

إدخال هذه الخلية (x_{21}) إلى جدول الحل يكون عن طريق ملئها،

- **تحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل (تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$)**

يتم تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$ يمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل وفق القاعدة التالية: أعظم كمية ممكنة لملأ الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل تُساوي أقل كمية (x_{ij}) للخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة للمسار.

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{21}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{22} = 50$$
$$x_{11} = 80$$
$$Min\ (x_{22} = 50\ ;\ \ x_{11} = 80) = x_{22} = 50$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـ$\boldsymbol{\theta}$) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{21}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 50$.

- **استنتاج حل الأساس المقبول الجديد**

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{24}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 50)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -50)$ من الخلية المملوءة (x_{22})؛
- إضافة كمية $(\theta = 50)$ إلى الخلية المملوءة (x_{12})؛
- طرح كمية $(-\theta = -50)$ من الخلية المملوءة (x_{11})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 80$	$b_2 = 60$	b_3 =40	b_4 =30
$a_1 = 90$	2 $-\theta = -50$ 80	1 $\theta = 50$ 10	3 /	2 /
$a_2 = 70$	3 $\theta = 50$ /	3 $-\theta = -50$ 50	3 /	1 20
$a_3 = 50$	3 /	3 /	2 40	1 10

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 80$	$b_2 = 60$	b_3 =40	b_4 =30
$a_1 = 90$	2 30	1 60	3 /	2 /
$a_2 = 70$	3 50	3 /	3 /	1 20
$a_3 = 50$	3 /	3 /	2 40	1 10

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- متغيرات الأساس الموجبة: عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 3 - 1) = 6$

$$X_{11} = 30\ ;\ X_{12} = 60;\ X_{21} = 50;\ X_{24} = 20;\ X_{33} = 40;\ X_{34} = 10$$

- متغيرات خارج الأساس المعدومة: تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{13} = 0;\ X_{14} = 0;\ X_{22} = 0;\ X_{23} = 0;\ X_{31} = 0; X_{32} = 0$$

- قيمة دالة الهدف:

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (2 * 30) + (1 * 60) + (3 * 50) + (1 * 20) + (2 * 40) + (1 * 10)$$

$$= \mathbf{380}\ \boldsymbol{DA}$$

- **اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)**

$$X_{13} = 3 - 2 + 1 - 1 + 3 - 2 = +2 \Longrightarrow \Delta_{13} = +2$$
$$X_{14} = 2 - 1 + 3 - 2 = +2 \Longrightarrow \Delta_{14} = +2$$
$$X_{22} = 3 - 1 + 2 - 3 = +1 \Longrightarrow \Delta_{22} = +1$$
$$X_{23} = 3 - 1 + 1 - 2 = +1 \Longrightarrow \Delta_{23} = +1$$
$$X_{31} = 3 - 1 + 1 - 3 = 0 \Longrightarrow \Delta_{31} = 0$$
$$X_{32} = 3 - 1 + 2 - 3 + 1 - 1 = +1 \Longrightarrow \Delta_{32} = +1$$

نُلاحظ أن هناك جميع الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير موجب أو معدوم، وبالتالي فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل.

التمرين السابع

1. إيجاد الحل الأساسي (الأولي) بطريقة الركن الشمالي الغربي

ترتكز هذه الطريقة على التوزيع خلية من اليسار إلى اليمين بحيث نراعي الكميات المتاحة والكميات المطلوبة (لا نأخذ من مورد أكثر مما عنده ولا نعطي المستهلك أكثر حاجته).

B_i / A_i	$b_1 = 40$	$b_2 = 22$	$b_3 = 38$
$a_1 = 35$	6 — 35	5 — /	2 — /
$a_2 = 42$	5 — 5	4 — 22	3 — 15
$a_3 = 23$	3 — /	7 — /	6 — 23

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 100$$

- نقوم بنقل 35 وحدة من المورد a_1 إلى المركز b_1 وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_1 ولم يتبق في مخزون المورد a_1 أي وحدة.
- نقوم بنقل 5 وحدات فقط من المورد a_2 إلى المركز b_1 وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_1، ثم نقوم بنقل 22 وحدة من المورد a_2 إلى المركز b_2 وبالتالي تم تلبية جميع احتياجات المركز b_2، ولم يتبق في مخزون المورد a_1 أي وحدة.
- نقوم بنقل 50 وحدة فقط من المورد a_2 إلى المركز b_2 وبالتالي تم تلبية جميع احتياجات المركز b_2، ثم نقوم بنقل 20 وحدة المتبقية المورد a_2 إلى المركز b_3، ثم نقوم بنقل 15 وحدة المتبقية من المورد a_2 إلى المركز b_3 ولم يتبق في مخزون المورد a_2 أي وحدة.
- نقوم بنقل 23 وحدة من المورد a_3 إلى المركز b_3، ولم يتبق في مخزون المورد a_3 أي وحدة.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت ويجب أن يتحقق الشرط التالي:

وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يُساوي **6** خلايا، حيث نلاحظ أن عدد الأسطر $(m = 3)$ وعدد الأعمدة $(n = 3)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$\begin{aligned} Nombre\ des\ cellules\ remplies &= m + n - 1 \\ &= 3 + 3 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

قيم متغيرات القرار:

$X_{11} = 35$	$X_{12} = 0$	$X_{13} = 0$
$X_{21} = 5$	$X_{22} = 22$	$X_{23} = 15$

$X_{31}=0$	$X_{32}=0$	$X_{33}=23$

موزعة كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1)=(3+3-1)=5$

$$X_{11}=35\ ;\ X_{21}=5;\ X_{22}=22;\ X_{23}=15;\ X_{33}=23$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12}=10; X_{13}=0;\ X_{31}=0;\ X_{32}=0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z=}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}C_{ij}x_{ij}=(6*35)+(5*5)+(4*22)+(3*15)+(6*23)=\mathbf{506}$$

- **إيجاد الحل الأمثل بواسطة الطريقة المعدلة**

نقوم بإضافة عموداً وصفاً جديداً للمصفوفة الأصلية، العمود $(\mathcal{U}_i)$ يُمثل قيم الأسطر والسطر (V_i) يُمثل قيم الأعمدة. ونحسب قيم الصفوف والأعمدة المضافة بالاستناد إلى تكلفة الخلايا الممتلئة التي نسميها بالقيم المساعدة بعد أن نفترض دائماً $(\mathcal{U}_1=0)$، كما يلي:

B_i / A_i	$b_1=40$	$b_2=22$	$b_3=38$	$\mathcal{U}_i$
$a_1=35$	6 — 35	5 — /	2 — /	$\mathcal{U}_1$
$a_2=42$	5 — 5	4 — 22	3 — 15	$\mathcal{U}_2$
$a_3=23$	3 — /	7 — /	6 — 23	$\mathcal{U}_3$
V_i	V_1	V_2	V_3	

نقوم بحساب تكلفة الخلية الممتلئة = $(V_j+\mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها. حيث: $(j=1,n,)$، $(i=1,m,)$.

حيث تكلفة الخلية الممتلئة تُحسب كما يلي:

$$C_{ij}=\mathcal{U}_i+V_j$$

وتتشكل لنا مجموعة من المعادلات يُمكن حلها كما يلي:

$$C_{11}=\mathcal{U}_1+V_1=6$$
$$C_{21}=\mathcal{U}_2+V_1=5$$
$$C_{22}=\mathcal{U}_2+V_2=4$$
$$C_{23}=\mathcal{U}_2+V_3=3$$
$$C_{33}=\mathcal{U}_3+V_3=6$$

لحل هذه المعادلات نُعطي المتغير $\mathcal{U}_1$ القيمة صفر (0)، وبالتالي نتحل على ما يلي:

$$\mathcal{U}_1=0\Longrightarrow V_1=6$$
$$V_1=6\Longrightarrow \mathcal{U}_2=-1$$
$$\mathcal{U}_2=-1\Longrightarrow V_2=5$$
$$\mathcal{U}_2=-1\Longrightarrow V_3=4$$
$$V_3=4\Longrightarrow \mathcal{U}_3=2$$

بعد حساب القيم المساعدة نلجأ إلى اختبار الخلايا الفارغة كالتالي:

قيمة اختبار تكلفة الخلية الفارغة = تكلفة هذه الخلية الفارغة – $(V_j + U_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها.

$$\overline{C_{ij}} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

وبالتالي نتحصل على تكاليف الخلايا الفارغة كما يلي:

$$\overline{C_{12}} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 5 - (0 + 5) = 0$$
$$\overline{C_{13}} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 2 - (0 + 4) = -2 < 0$$
$$\overline{C_{31}} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 3 - (2 + 6) = -5 < 0$$
$$\overline{C_{32}} = C_{32} - (U_3 + V_2) = 7 - (2 + 5) = 0$$

نُلاحظ أن الخلية (x_{31}) لها أقل تكلفة سالبة $(\bar{C}_{31} = -5)$ وبالتالي فإن المتغير (x_{31}) سوف يدخل إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، وباستخدام طريقة المسار المغلق نتحصل على ما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 40$	$b_2 = 22$	$b_3 = 38$	U_i
$a_1 = 35$	6 — 35	5 — /	2 — /	U_1
$a_2 = 42$	5 — - 5	4 — 22	3 — + 15	U_2
$a_3 = 23$	3 — + /	7 — /	6 — - 23	U_3
V_i	V_1	V_2	V_3	

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{31}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{33} = 23$$
$$x_{21} = 5$$
$$Min\ (x_{21} = 5\ ;\quad x_{33} = 23) = x_{12} = 5$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـ θ) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{31}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 5$

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{31}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 5)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -5)$ من الخلية المملوءة (x_{33})؛
- إضافة كمية $(\theta = 5)$ إلى الخلية المملوءة (x_{23})؛
- طرح كمية $(-\theta = -5)$ من الخلية المملوءة (x_{21})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 40$	$b_2 = 22$	$b_3 = 38$	U_i
$a_1 = 35$	6 — 35	5 — /	2 — /	U_1
$a_2 = 42$	5 — $-\theta = -5$ 5	4 — 22	3 — $\theta = 5$ 15	U_2
$a_3 = 23$	3 — $\theta = 5$ /	7 — /	6 — $-\theta = -5$ 23	U_3

V_i	V_1	V_2	V_3	

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 40$	$b_2 = 22$	$b_3 = 38$	U_i
$a_1 = 35$	6 — 35	5 — /	2 — /	U_1
$a_2 = 42$	5 — /	4 — 22	3 — 20	U_2
$a_3 = 23$	3 — 5	7 — /	6 — 18	U_3
V_i	V_1	V_2	V_3	

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1) = (3+3-1) = 5$

$X_{11} = 35\,;\ X_{22} = 22;\ X_{23} = 20;\ X_{31} = 5;\ X_{33} = 18$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$X_{12} = 0;\ X_{13} = 0;\ X_{21} = 0;\ X_{32} = 0$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} C_{ij}x_{ij} = (6*35)+(4*22)+(3*20)+(3*5)+(6*18) = \mathbf{481\ DA}$$

اختبار الخلايا الفارغة

نقوم بحساب تكلفة الخلية الممتلئة = $(V_j + U_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها. حيث: $(j = 1, n,)$، $(i = 1, m,)$.

حيث تكلفة الخلية الممتلئة تُحسب كما يلي:

$$\mathrm{C_{ij}} = U_\mathrm{i} + \mathrm{V_J}$$

وتتشكل لنا مجموعة من المعادلات يُمكن حلها كما يلي:

$$\mathrm{C_{11}} = U_1 + \mathrm{V_1} = 2$$
$$\mathrm{C_{22}} = U_2 + \mathrm{V_2} = 4$$
$$\mathrm{C_{23}} = U_2 + \mathrm{V_3} = 3$$
$$\mathrm{C_{31}} = U_3 + \mathrm{V_1} = 3$$
$$\mathrm{C_{33}} = U_3 + \mathrm{V_3} = 6$$

لحل هذه المعادلات نُعطي المتغير U_1 القيمة صفر (0)، وبالتالي نتحل على ما يلي:

$$U_1 = 0 \implies \mathrm{V_1} = 2$$
$$\mathrm{V_1} = 2 \implies U_3 = 1$$
$$U_3 = 1 \implies \mathrm{V_3} = 5$$
$$\mathrm{V_5} = 5 \implies U_2 = -2$$
$$U_2 = -2 \implies \mathrm{V_2} = 6$$

بعد حساب القيم المساعدة نلجأ إلى اختبار الخلايا الفارغة كالتالي:

قيمة اختبار تكلفة الخلية الفارغة = تكلفة هذه الخلية الفارغة – $(\mathrm{V_j} + U_\mathrm{i})$ الموجودين في سطرها وعمودها.

$$\overline{\mathrm{C_{ij}}} = \mathrm{C_{ij}} - (U_\mathrm{i} + \mathrm{V_J})$$

وبالتالي نتحصل على تكاليف الخلايا الفارغة كما يلي:

$$\overline{C_{12}} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 5 - (0 - 6) = 11 > 0$$
$$\overline{C_{13}} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 2 - (0 - 5) = 7 > 0$$
$$\overline{C_{21}} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 5 - (-2 + 2) = 5 > 0$$
$$\overline{C_{32}} = C_{32} - (U_3 + V_2) = 7 - (1 - 6) = 12 > 0$$

نُلاحظ أن جميع قيم $\overline{C_{ij}}$ موجبة، وبالتالي وصلنا إلى الحل الأمثل.

التمرين الثامن

1.إيجاد الحل الأساسي (الأولي) بطريقة التكلفة الأقل

تبعاً لهذه الطريقة نبدأ بملأ الخانة الفارغة التي لها أدنى تكلفة وحدوية للنقل حيث أننا ننظر إلى المصفوفة بوضعها كليةً، ونعطي الخلية ذات التكلفة الأقل حاجتها ومن ثم ننتقل إلى خلية أخرى تكون تكلفتها تلي تكلفة الخلية السابقة ودائماً يجب مراعاة الكميات المتاحة والكميات المطلوبة أيهما أقل.

B_i / A_i	$b_1 = 150$	$b_2 = 320$	$b_3 = 200$
$a_1 = 150$	2	4	0
$a_2 = 200$	3	1	5
$a_3 = 325$	6	2	4
$a_4 = 25$	1	7	9

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 700 > \sum_{j=1}^{3} b_j = 670$$

في هذه الحالة نقوم بإضافة عمود قيمة الطلب به 30 وجميع تكاليفه تُساوي الصفر، فيُصبح مُساوي للطلب، ومن ثم نقوم بالتوزيع بطريقة التكلفة الأقل.

B_i / A_i	$b_1 = 150$	$b_2 = 320$	$b_3 = 200$	$b_4 = 30$
$a_1 = 150$	2 /	4 /	0 150	0 /
$a_2 = 200$	3 /	1 170	5 /	0 30
$a_3 = 325$	6 125	2 150	4 50	0 /
$a_4 = 25$	1 25	7 /	9 /	0 /

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 700$$

- نقوم بنقل 150 وحدة من المورد a_1 إلى المركز b_3 وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_3 ولم يتبق في مخزون المورد a_1 أي وحدة.
- نقوم بنقل 30 وحدة من المورد a_2 إلى المركز b_4، وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_4، ولم يتبق في مخزون المورد a_2، ثم نقوم بنقل 170 وحدة المتبقية من المورد a_2 إلى المركز b_2 حيث لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_2.
- نقوم بنقل 25 وحدة من المورد a_4 إلى المركز b_1 وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_1، ولم يتبق في مخزون المورد a_4 أي وحدة.
- نقوم بنقل 150 وحدة من المورد a_3 إلى المركز b_2، حيث تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_2، ثم نقوم بنقل 50 وحدة من المورد a_3 إلى المركز b_3، ثم بنقل 125 وحدة المتبقية من المورد a_3 إلى المركز b_1، وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_1.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت ويجب أن يتحقق الشرط التالي: وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يُساوي **7** خلايا، حيث نلاحظ أن عدد الأسطر $(m = 4)$ وعدد الأعمدة $(n = 4)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$\begin{aligned} Nombre\ des\ cellules\ remplies &= m + n - 1 \\ &= 4 + 4 - 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

✍ **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11} = 0$	$X_{12} = 0$	$X_{13} = 150$	$X_{14} = 0$
$X_{21} = 0$	$X_{22} = 170$	$X_{23} = 0$	$X_{24} = 30$
$X_{31} = 125$	$X_{32} = 150$	$X_{33} = 50$	$X_{34} = 0$
$X_{41} = 25$	$X_{42} = 0$	$X_{43} = 0$	$X_{44} = 0$

موزعة كما يلي:

✍ **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 4 - 1) = 7$

$X_{13} = 150\ ;\ X_{22} = 170; X_{24} = 30;\ X_{31} = 125;\ X_{32} = 150;\ X_{33} = 50;\ X_{41} = 25$

✍ **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$X_{11} = 0;\ X_{12} = 0; X_{14} = 0;\ X_{21} = 0; X_{23} = 0;\ X_{34} = 0;\ X_{42} = 0;\ X_{43} = 0;\ X_{44} = 0$

✍ **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (0*150)+ (1*170)+(0*30)+(6*125)+(2*150)+(4*50)+(1*25)=1445}$$

التمرين التاسع

1. **إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة الركن الشمالي الغربي**

ترتكز هذه الطريقة على التوزيع خلية من اليسار إلى اليمين بحيث نراعي الكميات المتاحة والكميات المطلوبة (لا نأخذ من مورد أكثر مما عنده ولا نعطي المستهلك أكثر حاجته).

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$
$a_1 = 100$	4	11	0	2
$a_2 = 190$	9	6	1	3
$a_3 = 200$	5	7	2	10
$a_4 = 10$	0	0	0	0

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 490 < \sum_{j=1}^{4} b_j = 500$$

في هذه الحالة نقوم بإضافة سطر قيمة العرض به 10 وحدات وجميع تكاليفه تُساوي الصفر، فيُصبح العرض مُساوي للطلب، ومن ثم نقوم بالتوزيع بطريقة الركن الشمالي الغربي.

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$
$a_1 = 100$	4 **100**	11 /	0 /	2 /
$a_2 = 190$	9 **25**	6 **75**	1 **90**	3 /
$a_3 = 200$	5 /	7 /	2 **10**	10 **190**
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 **10**

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض = مجموع الطلب) أي:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 500 = \sum_{j=1}^{4} b_j = 500$$

- نقوم بنقل 100 وحدة من المورد a_1 إلى المركز b_1 وبالتالي لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_1 ولم يتبق في مخزون المورد a_1 أي وحدة.
- نقوم بنقل 25 وحدة من المورد a_2 إلى المركز b_1، وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_1، ثم نقوم بنقل 75 وحدة المتبقية من المورد a_2 إلى المركز b_2 حيث تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_2. ثم نقوم بنقل 90 وحدة المتبقية من المورد a_2 إلى المركز b_3.
- نقوم بنقل 10 وحدات فقط من المورد a_3 إلى المركز b_3 وبالتالي تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_3، ثم نقوم بنقل 190 وحدة المتبقية من المورد a_3 إلى المركز b_4، حيث لا يُمكن تلبية جميع احتياجات المركز b_4.

- نقوم بنقل 10 وحدات من المورد a_4 إلى المركز b_4، حيث تمت تلبية جميع احتياجات المركز b_4.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت ويجب أن يتحقق الشرط التالي: وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يُساوي **7** خلايا، حيث نلاحظ أن عدد الأسطر $(m = 4)$ وعدد الأعمدة $(n = 4)$، ونلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي:

$$\begin{aligned} Nombre\ des\ cellules\ remplies &= m + n - 1 \\ &= 4 + 4 - 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

يتم قراءة حل الأساس المقبول انطلاقاً من جدول النقل أعلاه كما يلي:

✍ **قيم متغيرات القرار:**

$X_{11} = 100$	$X_{12} = 0$	$X_{13} = 0$	$X_{14} = 0$
$X_{21} = 25$	$X_{22} = 75$	$X_{23} = 90$	$X_{24} = 0$
$X_{31} = 0$	$X_{32} = 0$	$X_{33} = 10$	$X_{34} = 190$
$X_{41} = 0$	$X_{42} = 0$	$X_{43} = 0$	$X_{44} = 10$

موزعة كما يلي:

✍ **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 4 - 1) = 7$

$$X_{11} = 100\ ;\ X_{21} = 25; X_{22} = 75;\ X_{23} = 90;\ X_{33} = 10;\ X_{34} = 190;\ X_{44} = 10$$

✍ **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12} = 0;\ X_{13} = 0; X_{14} = 0;\ X_{24} = 0; X_{31} = 0;\ X_{32} = 0;\ X_{41} = 0;\ X_{42} = 0;\ X_{43} = 0$$

✍ **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\mathbf{Z= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij} = (4*100)+ (9*25)+(6*75)+(1*90)+(2*10)+(10*190)+(0*10)=3085}$$

3. إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بواسطة طريقة الحجر المتنقل

✍ **اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)**

$$\begin{aligned} X_{12} &= 11 - 4 + 9 - 6 = +10 \Longrightarrow \Delta_{12} = +10 \\ X_{13} &= 0 - 4 + 9 - 1 = +4 \Longrightarrow \Delta_{13} = +4 \\ X_{14} &= 2 - 4 + 9 - 1 + 2 - 10 = -2 \Longrightarrow \Delta_{14} = -2 \\ X_{24} &= 3 - 1 + 2 - 10 = -6 \Longrightarrow \Delta_{24} = -6 \\ X_{31} &= 5 - 2 + 1 - 9 = -5 \Longrightarrow \Delta_{31} = -5 \\ X_{32} &= 7 - 2 + 1 - 6 = 0 \Longrightarrow \Delta_{32} = 0 \\ X_{41} &= 0 - 0 + 10 - 2 + 1 - 9 = 0 \Longrightarrow \Delta_{41} = 0 \\ X_{42} &= 0 - 0 + 10 - 2 + 1 - 6 = +3 \Longrightarrow \Delta_{42} = +3 \\ X_{43} &= 0 - 0 + 10 - 2 = +8 \Longrightarrow \Delta_{43} = +8 \end{aligned}$$

نُلاحظ أن هناك بعض الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي فإن هذا الجدول ليس جدول الحل الأمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة $(-)$، وأقل تكلفة والذي هو $(\Delta_{24} = -6)$، ونقوم بملئها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الموارد المتاحة.

إدخال هذه الخلية (x_{24}) إلى جدول الحل يكون عن طريق ملئها،

✍ **تحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل (تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$)**

يتم تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$ يمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل وفق القاعدة التالية: أعظم كمية ممكنة لملأ الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل تُساوي أقل كمية (x_{ij}) للخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة للمسار.

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{24}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{23} = 90$$
$$x_{34} = 190$$
$$Min\ (x_{34} = 190\ ;\quad x_{23} = 90) = x_{23} = 90$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـ$\boldsymbol{\theta}$) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{24}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 90$.

✍ **استنتاج حل الأساس المقبول الجديد**

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{24}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 90)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -90)$ من الخلية المملوءة (x_{23})؛
- إضافة كمية $(\theta = 90)$ إلى الخلية المملوءة (x_{33})؛
- طرح كمية $(-\theta = -90)$ من الخلية المملوءة (x_{34})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$
$a_1 = 100$	**4** **100**	**11** /	**0** /	**2** /
$a_2 = 190$	**9** **25**	**6** **75**	**1** $-\theta = -90$ **90**	**3** $\theta = 90$ /
$a_3 = 200$	**5** /	**7** /	**2** $\theta = 90$ **10**	**10** $-\theta = -90$ **190**
$a_4 = 10$	**0** /	**0** /	**0** /	**0** **10**

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$
$a_1 = 100$	**4** **100**	**11** /	**0** /	**2** /
$a_2 = 190$	**9** **25**	**6** **75**	**1** /	**3** **90**
$a_3 = 200$	**5** /	**7** /	**2** **100**	**10** **100**
$a_4 = 10$	**0** /	**0** /	**0** /	**0** **10**

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1) = (4+4-1) = 7$

$$X_{11} = 100\ ;\ X_{21} = 25;\ X_{22} = 75;\ X_{24} = 90;\ X_{33} = 100;\ X_{34} = 100;\ X_{44} = 10$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12} = 0;\ X_{13} = 0;\ X_{14} = 0;\ X_{23} = 0;\ X_{31} = 0; X_{32} = 0;\ X_{41} = 0; X_{42} = 0;\ X_{43} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$= (4*100) + (9*25) + (6*75) + (3*90) + (2*100) + (10*100) + (0*10) = \mathbf{2545}\ \boldsymbol{DA}$$

- **اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)**

$$X_{12} = 11 - 4 + 9 - 6 = +10 \Longrightarrow \Delta_{12} = +10 > 0$$
$$X_{13} = 0 - 4 + 9 - 3 + 10 - 2 = +10 \Longrightarrow \Delta_{13} = +10 > 0$$
$$X_{14} = 2 - 4 + 9 - 3 = +4 \Longrightarrow \Delta_{14} = +4 > 0$$
$$X_{23} = 1 - 2 + 10 - 3 = +6 \Longrightarrow \Delta_{23} = +6 > 0$$
$$X_{31} = 5 - 10 + 3 - 9 = -11 \Longrightarrow \Delta_{31} = -11 < 0$$
$$X_{32} = 7 - 10 + 3 - 6 = -6 \Longrightarrow \Delta_{32} = -6 < 0$$
$$X_{41} = 0 - 0 + 3 - 9 = -6 \Longrightarrow \Delta_{41} = -6 < 0$$
$$X_{42} = 0 - 0 + 3 - 9 = -6 \Longrightarrow \Delta_{42} = -6 < 0$$
$$X_{43} = 0 - 0 + 10 - 2 = +8 \Longrightarrow \Delta_{43} = +8 > 0$$

نُلاحظ أن هناك بعض الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي فإن هذا الجدول ليس جدول الحل الأمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة $(-)$، وأقل تكلفة، ويُمكن تشغيلها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة، والذي هو $(\Delta_{31} = -11)$، ونقوم بملئها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الموارد المتاحة.

إدخال هذه الخلية (x_{31}) إلى جدول الحل يكون عن طريق ملئها.

- **تحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل (تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$)**

يتم تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$ يمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل وفق القاعدة التالية: أعظم كمية ممكنة لملأ الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل تُساوي أقل كمية (x_{ij}) للخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة للمسار.

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{31}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{21} = 25$$
$$x_{34} = 100$$
$$Min\ (x_{34} = 100\ ;\quad x_{21} = 25) = x_{21} = 25$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـ$\boldsymbol{\theta}$) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{31}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 25$.

- **استنتاج حل الأساس المقبول الجديد**

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{24}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 25)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال

في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -25)$ من الخلية المملوءة (x_{34})؛
- إضافة كمية $(\theta = 25)$ إلى الخلية المملوءة (x_{24})؛
- طرح كمية $(-\theta = -25)$ من الخلية المملوءة (x_{21})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	b_3 =100	b_4 =200
$a_1 = 100$	**4** **100**	**11** /	**0** /	**2** /
$a_2 = 190$	**9** $(-\theta = -25)$ **25**	**6** **75**	**1** /	**3** $\theta = 25$ **90**
$a_3 = 200$	**5** $\theta = 25$ /	**7** /	**2** **100**	**10** $(-\theta = -25)$ **100**
$a_4 = 10$	**0** /	**0** /	**0** /	**0** **10**

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	b_3 =100	b_4 =200
$a_1 = 100$	**4** **100**	**11** /	**0** /	**2** /
$a_2 = 190$	**9** /	**6** **75**	**1** /	**3** **115**
$a_3 = 200$	**5** **25**	**7** /	**2** **100**	**10** **75**
$a_4 = 10$	**0** /	**0** /	**0** /	**0** **10**

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 4 - 1) = 7$

$$X_{11} = 100\ ;\ X_{22} = 75;\ X_{24} = 115;\ X_{31} = 25;\ X_{33} = 100;\ X_{34} = 75;\ X_{44} = 10$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12} = 0;\ X_{13} = 0;\ X_{14} = 0;\ X_{21} = 0; X_{23} = 0;\ X_{32} = 0;\ X_{41} = 0; X_{42} = 0;\ X_{43} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$= (4 * 100) + (6 * 75) + (3 * 115) + (5 * 25) + (2 * 100) + (10 * 75) + (0 * 10) = \boldsymbol{2270\ DA}$$

- **اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)**

$$X_{12} = 11 - 4 + 9 - 10 - 3 + 6 = +9 \Longrightarrow \Delta_{12} = +9 > 0$$
$$X_{13} = 0 - 4 + 5 - 2 = -1 \Longrightarrow \Delta_{13} = -1 < 0$$
$$X_{14} = 2 - 4 + 5 - 10 = -7 \Longrightarrow \Delta_{14} = -7 < 0$$
$$X_{21} = 9 - 5 + 10 - 3 = +11 \Longrightarrow \Delta_{21} = +11 > 0$$
$$X_{23} = 1 - 2 + 10 - 3 = +6 \Longrightarrow \Delta_{23} = +6 > 0$$
$$X_{32} = 7 - 10 + 3 - 6 = -6 \Longrightarrow \Delta_{32} = -6 < 0$$
$$X_{41} = 0 - 0 + 10 - 5 = +4 \Longrightarrow \Delta_{41} = +4 > 0$$
$$X_{42} = 0 - 0 + 3 - 6 = -3 \Longrightarrow \Delta_{42} = -3 < 0$$
$$X_{43} = 0 - 0 + 10 - 2 = +8 \Longrightarrow \Delta_{43} = +8 > 0$$

نُلاحظ أن هناك بعض الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي فإن هذا الجدول ليس جدول الحل الأمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة $(-)$، وأقل تكلفة، ويُمكن تشغيلها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة، والذي هو $(\Delta_{14} = -7)$، ونقوم بملئها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الموارد المتاحة.

إدخال هذه الخلية (x_{14}) إلى جدول الحل يكون عن طريق ملئها.

- **تحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل (تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$)**

يتم تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$ يمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل وفق القاعدة التالية: أعظم كمية ممكنة لملأ الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل تُساوي أقل كمية (x_{ij}) للخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة للمسار.

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{14}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{11} = 100$$
$$x_{34} = 75$$
$$Min\ (x_{11} = 100\ ;\quad x_{34} = 75) = x_{34} = 25$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـ$\boldsymbol{\theta}$) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{14}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 75$.

- **استنتاج حل الأساس المقبول الجديد**

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{24}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 75)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -75)$ من الخلية المملوءة (x_{11})؛
- إضافة كمية $(\theta = 75)$ إلى الخلية المملوءة (x_{31})؛
- طرح كمية $(-\theta = -75)$ من الخلية المملوءة (x_{34})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$
$a_1 = 100$	**4** $(-\theta = -75)$ **100**	**11** /	**0** /	**2** $(\theta = 75)$ /
$a_2 = 190$	**9** /	**6** **75**	**1** /	**3** **115**
$a_3 = 200$	**5** $(\theta = 75)$	**7**	**2**	**10** $(-\theta = -75)$

	25	/	100	75
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$
$a_1 = 100$	4 25	11 /	0 /	2 75
$a_2 = 190$	9 /	6 75	1 /	3 115
$a_3 = 200$	5 100	7 /	2 100	10 /
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 4 - 1) = 7$

$$X_{11} = 25\,;\ X_{14} = 75;\ X_{22} = 75;\ X_{24} = 115;\ X_{31} = 100;\ X_{33} = 100;\ X_{44} = 10$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12} = 0;\ X_{13} = 0;\ X_{21} = 0; X_{23} = 0;\ X_{32} = 0; X_{34} = 0;\ X_{41} = 0; X_{42} = 0;\ X_{43} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$= (4 * 25) + (2 * 75) + + (6 * 75)(3 * 115) + (5 * 100) + (2 * 100) + (0 * 10) = \boldsymbol{1745\ DA}$$

- **اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)**

$$X_{12} = 11 - 2 + 3 - 6 = +6 \Longrightarrow \Delta_{12} = +6 > 0$$
$$X_{13} = 0 - 4 + 5 - 2 = -1 \Longrightarrow \Delta_{13} = -1 < 0$$
$$X_{21} = 9 - 3 + 2 - 4 = +4 \Longrightarrow \Delta_{21} = +4 > 0$$
$$X_{23} = 1 - 3 + 2 - 4 + 5 - 2 = -1 \Longrightarrow \Delta_{23} = -1 < 0$$
$$X_{32} = 7 - 5 + 4 - 2 + 3 - 6 = +1 \Longrightarrow \Delta_{32} = +1 > 0$$
$$X_{34} = 10 - 5 + 4 - 2 = +7 \Longrightarrow \Delta_{34} = +7 > 0$$
$$X_{41} = 0 - 0 + 2 - 4 = -2 \Longrightarrow \Delta_{41} = -2 < 0$$
$$X_{42} = 0 - 0 + 3 - 6 = -3 \Longrightarrow \Delta_{42} = -3 < 0$$
$$X_{43} = 0 - 0 + 2 - 4 + 5 - 2 = +1 \Longrightarrow \Delta_{43} = +1 > 0$$

نُلاحظ أن هناك بعض الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي فإن هذا الجدول ليس جدول الحل الأمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة $(-)$، وأقل تكلفة، ويُمكن تشغيلها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة، والذي هو $(\Delta_{42} = -3)$، ونقوم بملئها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الموارد المتاحة.

إدخال هذه الخلية (x_{42}) إلى جدول الحل يكون عن طريق ملئها.

- **تحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل (تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$)**

يتم تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$ يمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل وفق القاعدة التالية: أعظم كمية ممكنة لملأ الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل تُساوي أقل كمية (x_{ij}) للخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة للمسار.

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{42}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{22} = 75$$
$$x_{44} = 10$$
$$Min\,(x_{22} = 75\ ;\quad x_{44} = 10) = x_{44} = 10$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـ$\boldsymbol{\theta}$) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{42}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 10$.

استنتاج حل الأساس المقبول الجديد

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{42}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 10)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -10)$ من الخلية المملوءة (x_{44})؛
- إضافة كمية $(\theta = 10)$ إلى الخلية المملوءة (x_{24})؛
- طرح كمية $(-\theta = -10)$ من الخلية المملوءة (x_{22})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	b_3 =100	b_4 =200
$a_1 = 100$	**4** 25	**11** /	**0** /	**2** 75
$a_2 = 190$	**9** /	**6** $(-\theta = -10)$ 75	**1** /	**3** $(\theta = 10)$ 115
$a_3 = 200$	**5** 100	**7** /	**2** 100	**10** /
$a_4 = 10$	**0** /	**0** $(\theta = 10)$ /	**0** /	**0** $(-\theta = -10)$ 10

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	b_3 =100	b_4 =200
$a_1 = 100$	**4** 25	**11** /	**0** /	**2** 75
$a_2 = 190$	**9** /	**6** 85	**1** /	**3** 125
$a_3 = 200$	**5** 100	**7** /	**2** 100	**10** /
$a_4 = 10$	**0** /	**0** 10	**0** /	**0** /

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

✍ **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1) = (4+4-1) = 7$

$$X_{11}=25\,;\ X_{14}=75;\ X_{22}=85;\ X_{24}=125;\ X_{31}=100;\ X_{33}=100;\ X_{42}=10$$

✍ **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12}=0;\ \ X_{13}=0;\ \ X_{21}=0; X_{23}=0;\ X_{32}=0; X_{34}=0;\ X_{41}=0; X_{43}=0;\ X_{44}=0$$

✍ **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z}=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}$$

$$=(4*25)+\ (2*75)++(6*85)(3*125)+(5*100)+(2*100)$$
$$+(0*10)=\mathbf{1835}\ \boldsymbol{DA}$$

✍ **اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)**

$$X_{12}=11-2+3-6=+6\Longrightarrow\Delta_{12}=+6>0$$
$$X_{13}=0-4+5-2=-1\Longrightarrow\Delta_{13}=-1<0$$
$$X_{21}=9-3+2-4=+4\Longrightarrow\Delta_{21}=+4>0$$
$$X_{23}=1-3+2-4+5-2=-1\Longrightarrow\Delta_{23}=-1<0$$
$$X_{32}=7-5+4-2+3-6=+1\Longrightarrow\Delta_{32}=+1>0$$
$$X_{34}=10-5+4-2=+7\Longrightarrow\Delta_{34}=+7>0$$
$$X_{41}=0-4+2-3+6-0=+1\Longrightarrow\Delta_{41}=+1>0$$
$$X_{43}=0-2+5-4+2-3+6-0=+4\Longrightarrow\Delta_{43}=+4>0$$
$$X_{44}=0-3+6-0=+3\Longrightarrow\Delta_{44}=+3>0$$

نُلاحظ أن هناك بعض الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي فإن هذا الجدول ليس جدول الحل الأمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة $(-)$، وأقل تكلفة، ويُمكن تشغيلها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة، والذي هو $(\Delta_{13}=-1)$، ونقوم بملئها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الموارد المتاحة.

إدخال هذه الخلية (x_{13}) إلى جدول الحل يكون عن طريق ملئها.

✍ **تحديد أعظم كمية للخانة الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل (تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$)**

يتم تحديد أعظم قيمة لـ $\boldsymbol{\theta}$ يمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل وفق القاعدة التالية: أعظم كمية ممكنة لملأ الخلية الفارغة المرشحة للدخول إلى جدول الحل تُساوي أقل كمية (x_{ij}) للخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة للمسار.

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{13}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{11}=25$$
$$x_{33}=100$$
$$Min\ (x_{11}=25\ ;\quad x_{33}=100)=x_{11}=25$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـ$\boldsymbol{\theta}$) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{13}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta=25$.

✍ **استنتاج حل الأساس المقبول الجديد**

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{13}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta=10)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال

في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -25)$ من الخلية المملوءة (x_{11})؛
- إضافة كمية $(\theta = 25)$ إلى الخلية المملوءة (x_{31})؛
- طرح كمية $(-\theta = -25)$ من الخلية المملوءة (x_{33})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	b_3 =100	b_4 =200
$a_1 = 100$	**4** $(-\theta = -25)$ **25**	**11** /	**0** $(\theta = 25)$ /	**2** **75**
$a_2 = 190$	**9** /	**6** **85**	**1** /	**3** **125**
$a_3 = 200$	**5** $(\theta = 25)$ **100**	**7** /	**2** $(-\theta = -25)$ **100**	**10** /
$a_4 = 10$	**0** /	**0** **10**	**0** /	**0** /

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	b_3 =100	b_4 =200
$a_1 = 100$	**4** /	**11** /	**0** **25**	**2** **75**
$a_2 = 190$	**9** /	**6** **85**	**1** /	**3** **125**
$a_3 = 200$	**5** **125**	**7** /	**2** **75**	**10** /
$a_4 = 10$	**0** /	**0** **10**	**0** /	**0** /

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة**: عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 4 - 1) = 7$

$$X_{13} = 25\ ;\ X_{14} = 75;\ X_{22} = 85;\ X_{24} = 125;\ X_{31} = 125;\ X_{33} = 75;\ X_{42} = 10$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة**: تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{11} = 0;\ X_{12} = 0;\ X_{21} = 0; X_{23} = 0;\ X_{32} = 0; X_{34} = 0;\ X_{41} = 0; X_{43} = 0;\ X_{44} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف**:

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$= (0 * 25) + (2 * 75) + + (6 * 85)(3 * 125) + (5 * 125) + (2 * 75) + (0 * 10) = \mathbf{1810}\ \boldsymbol{DA}$$

- **اختبار أمثلية الحل (تقييم الخلايا الفارغة)**

$$X_{11} = 4 - 0 + 2 - 5 = +1 \Longrightarrow \Delta_{11} = +1 > 0$$
$$X_{12} = 11 - 2 + 3 - 6 = +6 \Longrightarrow \Delta_{12} = +6 > 0$$
$$X_{21} = 9 - 3 + 2 - 0 + 2 - 5 = +4 \Longrightarrow \Delta_{21} = +4 > 0$$
$$X_{23} = 1 - 3 + 2 - 0 = 0 \Longrightarrow \Delta_{23} = 0$$
$$X_{32} = 7 - 2 + 0 - 2 + 3 - 6 = 0 \Longrightarrow \Delta_{32} = 0$$
$$X_{34} = 10 - 2 + 0 - 2 = +6 \Longrightarrow \Delta_{34} = +6 > 0$$
$$X_{41} = 0 - 5 + 2 - 0 + 2 - 3 + 6 - 0 = +2 \Longrightarrow \Delta_{41} = +2 > 0$$
$$X_{43} = 0 - 0 + 2 - 3 + 6 - 0 = +5 \Longrightarrow \Delta_{43} = +5 > 0$$
$$X_{44} = 0 - 3 + 6 - 0 = +3 \Longrightarrow \Delta_{44} = +3 > 0$$

نُلاحظ أن هناك جميع الخلايا الفارغة في الجدول بها صافي تغير موجب أو معدوم، وبالتالي فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل.

إيجاد الحل الأمثل بواسطة الطريقة المعدلة

نقوم بإضافة عموداً وصفاً جديداً للمصفوفة الأصلية للحل الأساسي الأول، حيث العمود $(\mathcal{U}_i)$ يُمثل قيم الأسطر والسطر (V_i) يُمثل قيم الأعمدة. ونحسب قيم الصفوف والأعمدة المضافة بالاستناد إلى تكلفة الخلايا الممتلئة التي نسميها بالقيم المساعدة بعد أن نفترض دائماً $(\mathcal{U}_1 = 0)$، كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$\mathcal{U}_i$
$a_1 = 100$	4 — 100	11 — /	0 — /	2 — /	$\mathcal{U}_1$
$a_2 = 190$	9 — 25	6 — 75	1 — 90	3 — /	$\mathcal{U}_2$
$a_3 = 200$	5 — /	7 — /	2 — 10	10 — 190	$\mathcal{U}_3$
$a_4 = 10$	0 — /	0 — /	0 — /	0 — 10	$\mathcal{U}_4$
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

نقوم بحساب تكلفة الخلية الممتلئة = $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها. حيث: $(j = 1, n,)$، $(i = 1, m,)$.

حيث تكلفة الخلية الممتلئة تُحسب كما يلي:

$$C_{ij} = \mathcal{U}_i + V_j$$

وتتشكل لنا مجموعة من المعادلات يُمكن حلها كما يلي:

$$C_{11} = \mathcal{U}_1 + V_1 = 4$$
$$C_{21} = \mathcal{U}_2 + V_1 = 9$$
$$C_{22} = \mathcal{U}_2 + V_2 = 6$$
$$C_{23} = \mathcal{U}_2 + V_3 = 1$$
$$C_{33} = \mathcal{U}_3 + V_3 = 2$$
$$C_{34} = \mathcal{U}_3 + V_4 = 10$$
$$C_{44} = \mathcal{U}_4 + V_4 = 0$$

لحل هذه المعادلات نُعطي المتغير $\mathcal{U}_1$ القيمة صفر (0)، وبالتالي نتحل على ما يلي:

$$\mathcal{U}_1 = 0 \Longrightarrow V_1 = 4$$
$$V_1 = 4 \Longrightarrow \mathcal{U}_2 = 5$$
$$\mathcal{U}_2 = 5 \Longrightarrow V_2 = 1$$
$$\mathcal{U}_2 = 5 \Longrightarrow V_3 = -4$$
$$V_3 = -4 \Longrightarrow \mathcal{U}_3 = 6$$
$$\mathcal{U}_3 = 6 \Longrightarrow V_4 = 4$$

$$V_4 = 4 \Rightarrow \mathcal{U}_4 = -4$$

بعد حساب القيم المساعدة نلجأ إلى اختبار الخلايا الفارغة كالتالي:

قيمة اختبار تكلفة الخلية الفارغة = تكلفة هذه الخلية الفارغة – $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها.

$$\overline{C_{ij}} = C_{ij} - (\mathcal{U}_i + V_j)$$

وبالتالي نتحصل على تكاليف الخلايا الفارغة كما يلي:

$$\overline{C_{12}} = C_{12} - (\mathcal{U}_1 + V_2) = 11 - (0 + 1) = +10 > 0$$
$$\overline{C_{13}} = C_{13} - (\mathcal{U}_1 + V_3) = 0 - (0 - 4) = +4 > 0$$
$$\overline{C_{14}} = C_{14} - (\mathcal{U}_1 + V_4) = 2 - (0 + 4) = -2 < 0$$
$$\overline{C_{23}} = C_{23} - (\mathcal{U}_2 + V_3) = 3 - (5 - 4) = +2 > 0$$
$$\overline{C_{31}} = C_{31} - (\mathcal{U}_3 + V_1) = 5 - (6 + 4) = -5 < 0$$
$$\overline{C_{32}} = C_{32} - (\mathcal{U}_3 + V_2) = 7 - (6 - 1) = +2 > 0$$
$$\overline{C_{41}} = C_{41} - (\mathcal{U}_4 + V_1) = 0 - (-4 + 4) = 0$$
$$\overline{C_{42}} = C_{42} - (\mathcal{U}_4 + V_2) = 0 - (-4 + 1) = +3 > 0$$
$$\overline{C_{43}} = C_{43} - (\mathcal{U}_4 + V_3) = 0 - (-4 - 4) = +8 > 0$$

نُلاحظ أن الخلية (x_{31}) لها أقل تكلفة سالبة $(\bar{C}_{31} = -5)$ وبالتالي فإن المتغير (x_{31}) سوف يدخل إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، وباستخدام طريقة المسار المغلق نتحصل على ما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$\mathcal{U}_i$
$a_1 = 100$	4 — 100	11 — /	0 — /	2 — /	$\mathcal{U}_1$
$a_2 = 190$	9 - 25	6 — 75	1 + 90	3 — /	$\mathcal{U}_2$
$a_3 = 200$	5 + /	7 — /	2 - 10	10 — 190	$\mathcal{U}_3$
$a_4 = 10$	0 — /	0 — /	0 — /	0 — 10	$\mathcal{U}_4$
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{31}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{21} = 25$$
$$x_{33} = 10$$
$$Min\ (x_{21} = 25\ ;\quad x_{33} = 10) = x_{33} = 10$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـθ) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{31}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية

$$\theta = 10$$

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{31}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 10)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -10)$ من الخلية المملوءة (x_{33})؛
- إضافة كمية $(\theta = 10)$ إلى الخلية المملوءة (x_{23})؛
- طرح كمية $(-\theta = -10)$ من الخلية المملوءة (x_{21})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$\mathcal{U}_i$
$a_1 = 100$	4 100	11 /	0 /	2 /	$\mathcal{U}_1$
$a_2 = 190$	9 $-\theta = -10$ 25	6 75	1 $(\theta = 10)$ 90	3 /	$\mathcal{U}_2$
$a_3 = 200$	5 $(\theta = 10)$ /	7 /	2 $(-\theta = -10)$ 10	10 190	$\mathcal{U}_3$
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	$\mathcal{U}_4$
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$\mathcal{U}_i$
$a_1 = 100$	4 100	11 /	0 /	2 /	$\mathcal{U}_1$
$a_2 = 190$	9 15	6 75	1 100	3 /	$\mathcal{U}_2$
$a_3 = 200$	5 10	7 /	2 /	10 190	$\mathcal{U}_3$
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	$\mathcal{U}_4$
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 4 - 1) = 7$

$$X_{11} = 100\ ;\ X_{21} = 15;\ X_{22} = 75;\ X_{23} = 100;\ X_{31} = 10;\ X_{34} = 190;\ X_{44} = 10$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{12} = 0;\ X_{13} = 0;\ X_{14} = 0; X_{23} = 0;\ X_{32} = 0; X_{33} = 0;\ X_{41} = 0; X_{42} = 0;\ X_{43} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$= (4 * 100) + (9 * 15) + + (6 * 75)(1 * 100) + (5 * 10) + (10 * 190) + (0 * 10) = \mathbf{3035}\ \boldsymbol{DA}$$

اختبار أمثلية الحل

نقوم بحساب تكلفة الخلية الممتلئة = $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها. حيث: $(j = 1, n,)$، $(i = 1, m,)$.

حيث تكلفة الخلية الممتلئة تُحسب كما يلي:

$$C_{ij} = \mathcal{U}_i + V_J$$

وتتشكل لنا مجموعة من المعادلات يُمكن حلها كما يلي:

$$C_{11} = \mathcal{U}_1 + V_1 = 4$$
$$C_{21} = \mathcal{U}_2 + V_1 = 9$$
$$C_{22} = \mathcal{U}_2 + V_2 = 6$$
$$C_{23} = \mathcal{U}_2 + V_3 = 1$$
$$C_{31} = \mathcal{U}_3 + V_1 = 5$$
$$C_{34} = \mathcal{U}_3 + V_4 = 10$$
$$C_{44} = \mathcal{U}_4 + V_4 = 0$$

لحل هذه المعادلات نُعطي المتغير $\mathcal{U}_1$ القيمة صفر (0)، وبالتالي نتحل على ما يلي:

$$\mathcal{U}_1 = 0 \implies V_1 = 4$$
$$V_1 = 4 \implies \mathcal{U}_2 = 5$$
$$\mathcal{U}_2 = 5 \implies V_2 = 1$$
$$\mathcal{U}_2 = 5 \implies V_3 = -4$$
$$V_1 = 4 \implies \mathcal{U}_3 = 4$$
$$\mathcal{U}_3 = 4 \implies V_4 = 6$$
$$V_4 = 6 \implies \mathcal{U}_4 = -6$$

بعد حساب القيم المساعدة نلجأ إلى اختبار الخلايا الفارغة كالتالي:

قيمة اختبار تكلفة الخلية الفارغة = تكلفة هذه الخلية الفارغة – $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها.

$$\overline{C_{ij}} = C_{ij} - (\mathcal{U}_i + V_J)$$

وبالتالي نتحصل على تكاليف الخلايا الفارغة كما يلي:

$$\overline{C_{12}} = C_{12} - (\mathcal{U}_1 + V_2) = 11 - (0 + 1) = +10 > 0$$
$$\overline{C_{13}} = C_{13} - (\mathcal{U}_1 + V_3) = 0 - (0 - 4) = +4 > 0$$
$$\overline{C_{14}} = C_{14} - (\mathcal{U}_1 + V_4) = 2 - (0 + 6) = -4 < 0$$
$$\overline{C_{23}} = C_{23} - (\mathcal{U}_2 + V_3) = 3 - (5 - 4) = +2 > 0$$
$$\overline{C_{32}} = C_{32} - (\mathcal{U}_3 + V_2) = 7 - (4 + 1) = +2 > 0$$
$$\overline{C_{33}} = C_{33} - (\mathcal{U}_3 + V_3) = 2 - (4 - 4) = +2 > 0$$
$$\overline{C_{41}} = C_{41} - (\mathcal{U}_4 + V_1) = 0 - (-6 + 4) = +2 > 0$$
$$\overline{C_{42}} = C_{42} - (\mathcal{U}_4 + V_2) = 0 - (-6 + 1) = +5 > 0$$
$$\overline{C_{43}} = C_{43} - (\mathcal{U}_4 + V_3) = 0 - (-6 - 4) = +10 > 0$$

نُلاحظ أن الخلية (x_{14}) لها أقل تكلفة سالبة $(\bar{C}_{14} = -4)$ وبالتالي فإن المتغير (x_{14}) سوف يدخل إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، وباستخدام طريقة المسار المغلق نتحصل على ما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	$\mathcal{U}_i$
$a_1 = 100$	4 - 100	11 /	0 /	2 + /	$\mathcal{U}_1$
$a_2 = 190$	9 15	6 75	1 100	3 /	$\mathcal{U}_2$
$a_3 = 200$	5 + 10	7 /	2 /	10 - 190	$\mathcal{U}_3$
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	$\mathcal{U}_4$
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{14}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{11} = 100$$

$$x_{34} = 190$$
$$Min\ (x_{11} = 100\ ;\quad x_{34} = 190) = x_{11} = 100$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـ$\boldsymbol{\theta}$) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{14}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 100$

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{14}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية ($\theta = 100$)، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية ($-\theta = -100$) من الخلية المملوءة (x_{11})؛
- إضافة كمية ($\theta = 100$) إلى الخلية المملوءة (x_{31})؛
- طرح كمية ($-\theta = -100$) من الخلية المملوءة (x_{34})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	b_3 =100	b_4 =200	u_i
$a_1 = 100$	4 ($-\theta = -100$) 100	11 /	0 /	2 ($\theta = 100$) /	u_1
$a_2 = 190$	9 15	6 75	1 100	3 /	u_2
$a_3 = 200$	5 ($\theta = 100$) 10	7 /	2 /	10 (-θ=-100) 190	u_3
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	u_4
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	b_3 =100	b_4 =200	u_i
$a_1 = 100$	4 /	11 /	0 /	2 100	u_1
$a_2 = 190$	9 15	6 75	1 100	3 /	u_2
$a_3 = 200$	5 110	7 /	2 /	10 90	u_3
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	u_4
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 4 - 1) = 7$

$$X_{14} = 100\ ;\ X_{21} = 15;\ X_{22} = 75;\ X_{23} = 100;\ X_{31} = 110;\ X_{34} = 90;\ X_{44} = 10$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{11} = 0;\ X_{12} = 0;\ X_{13} = 0; X_{24} = 0;\ X_{32} = 0; X_{33} = 0;\ X_{41} = 0; X_{42} = 0;\ X_{43} = 0$$

قيمة دالة الهدف:

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$= (2 * 100) + (9 * 15) + + (6 * 75)(1 * 100) + (5 * 110) + (10 * 90) + (0 * 10) = \boldsymbol{2335\ DA}$$

اختبار أمثلية الحل

نقوم بحساب تكلفة الخلية الممتلئة = $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها. حيث: $(j = 1, n,)$، $(i = 1, m,)$.

حيث تكلفة الخلية الممتلئة تُحسب كما يلي:

$$C_{ij} = \mathcal{U}_i + V_J$$

وتتشكل لنا مجموعة من المعادلات يُمكن حلها كما يلي:

$$C_{14} = \mathcal{U}_1 + V_4 = 2$$
$$C_{21} = \mathcal{U}_2 + V_1 = 9$$
$$C_{22} = \mathcal{U}_2 + V_2 = 6$$
$$C_{23} = \mathcal{U}_2 + V_3 = 1$$
$$C_{31} = \mathcal{U}_3 + V_1 = 5$$
$$C_{34} = \mathcal{U}_3 + V_4 = 10$$
$$C_{44} = \mathcal{U}_4 + V_4 = 0$$

لحل هذه المعادلات نُعطي المتغير $\mathcal{U}_1$ القيمة صفر (0)، وبالتالي نتحل على ما يلي:

$$\mathcal{U}_1 = 0 \implies V_4 = 2$$
$$V_4 = 2 \implies \mathcal{U}_4 = -2$$
$$V_4 = 2 \implies \mathcal{U}_3 = 8$$
$$\mathcal{U}_3 = 8 \implies V_1 = -3$$
$$V_1 = -3 \implies \mathcal{U}_2 = 12$$
$$\mathcal{U}_2 = 12 \implies V_2 = -6$$
$$\mathcal{U}_2 = 12 \implies V_3 = -11$$

بعد حساب القيم المساعدة نلجأ إلى اختبار الخلايا الفارغة كالتالي:

قيمة اختبار تكلفة الخلية الفارغة = تكلفة هذه الخلية الفارغة – $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها.

$$\overline{C_{IJ}} = C_{ij} - (\mathcal{U}_i + V_J)$$

وبالتالي نتحصل على تكاليف الخلايا الفارغة كما يلي:

$$\overline{C_{11}} = C_{11} - (\mathcal{U}_1 + V_1) = 4 - (0 - 3) = +7 > 0$$
$$\overline{C_{12}} = C_{12} - (\mathcal{U}_1 + V_2) = 11 - (0 - 6) = +17 > 0$$
$$\overline{C_{13}} = C_{13} - (\mathcal{U}_1 + V_3) = 0 - (0 - 11) = +11 > 0$$
$$\overline{C_{24}} = C_{24} - (\mathcal{U}_2 + V_4) = 3 - (12 - 2) = -7 < 0$$
$$\overline{C_{32}} = C_{32} - (\mathcal{U}_3 + V_2) = 7 - (8 - 6) = +5 > 0$$
$$\overline{C_{33}} = C_{33} - (\mathcal{U}_3 + V_3) = 2 - (8 - 11) = +5 > 0$$
$$\overline{C_{41}} = C_{41} - (\mathcal{U}_4 + V_1) = 0 - (-2 - 3) = +5 > 0$$
$$\overline{C_{42}} = C_{42} - (\mathcal{U}_4 + V_2) = 0 - (-2 - 6) = +8 > 0$$
$$\overline{C_{43}} = C_{43} - (\mathcal{U}_4 + V_3) = 0 - (-2 - 11) = +13 > 0$$

نُلاحظ أن الخلية (x_{24}) لها أقل تكلفة سالبة $(\bar{C}_{24} = -7)$ وبالتالي فإن المتغير (x_{24}) سوف يدخل إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، وباستخدام طريقة المسار المغلق نتحصل على ما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	u_i
$a_1 = 100$	4 /	11 /	0 /	2 100	u_1
$a_2 = 190$	9 - 15	6 75	1 100	3 + /	u_2
$a_3 = 200$	5 + 110	7 /	2 /	10 - 90	u_3
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	u_4
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{24}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{21} = 15$$
$$x_{34} = 90$$
$$Min\ (x_{21} = 15\ ;\quad x_{34} = 90) = x_{21} = 15$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـθ) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{24}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 15$

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{24}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 15)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -15)$ من الخلية المملوءة (x_{21})؛
- إضافة كمية $(\theta = 15)$ إلى الخلية المملوءة (x_{31})؛
- طرح كمية $(-\theta = -15)$ من الخلية المملوءة (x_{34})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	u_i
$a_1 = 100$	4 /	11 /	0 /	2 100	u_1
$a_2 = 190$	9 $(-\theta = -15)$ 15	6 75	1 100	3 $(\theta = 15)$ /	u_2
$a_3 = 200$	5 $(\theta = 15)$ 110	7 /	2 /	10 $(-\theta = -15)$ 90	u_3
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	u_4
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	u_i
$a_1 = 100$	4	11	0	2	u_1

	/	/	/	100	
$a_2 = 190$	9 /	6 75	1 100	3 15	$\mathcal{U}_2$
$a_3 = 200$	5 125	7 /	2 /	10 75	$\mathcal{U}_3$
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	$\mathcal{U}_4$
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m+n-1) = (4+4-1) = 7$

$$X_{14} = 100\ ;\ X_{22} = 75;\ X_{23} = 100;\ X_{24} = 15;\ X_{31} = 125;\ X_{34} = 75;\ X_{44} = 10$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{11} = 0;\ X_{12} = 0;\ X_{13} = 0; X_{21} = 0;\ X_{32} = 0; X_{33} = 0;\ X_{41} = 0; X_{42} = 0;\ X_{43} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$= (2*100) + (6*75) + + (1*100)(3*15) + (5*125) + (10*75) + (0*10) = \mathbf{2170}\ \boldsymbol{DA}$$

اختبار أمثلية الحل

نقوم بحساب تكلفة الخلية الممتلئة = $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها. حيث: $(j = 1, n,)$، $(i = 1, m,)$.

حيث تكلفة الخلية الممتلئة تُحسب كما يلي:

$$C_{ij} = \mathcal{U}_i + V_J$$

وتتشكل لنا مجموعة من المعادلات يُمكن حلها كما يلي:

$$C_{14} = \mathcal{U}_1 + V_4 = 2$$
$$C_{22} = \mathcal{U}_2 + V_2 = 6$$
$$C_{23} = \mathcal{U}_2 + V_3 = 1$$
$$C_{24} = \mathcal{U}_2 + V_4 = 3$$
$$C_{31} = \mathcal{U}_3 + V_1 = 5$$
$$C_{34} = \mathcal{U}_3 + V_4 = 10$$
$$C_{44} = \mathcal{U}_4 + V_4 = 0$$

لحل هذه المعادلات نُعطي المتغير $\mathcal{U}_1$ القيمة صفر (0)، وبالتالي نتحل على ما يلي:

$$\mathcal{U}_1 = 0 \implies V_4 = 2$$
$$V_4 = 2 \implies \mathcal{U}_4 = -2$$
$$V_4 = 2 \implies \mathcal{U}_3 = 8$$
$$\mathcal{U}_3 = 8 \implies V_1 = -3$$
$$V_4 = 2 \implies \mathcal{U}_2 = 1$$
$$\mathcal{U}_2 = 1 \implies V_2 = 5$$
$$\mathcal{U}_2 = 1 \implies V_3 = 0$$

بعد حساب القيم المساعدة نلجأ إلى اختبار الخلايا الفارغة كالتالي:

قيمة اختبار تكلفة الخلية الفارغة = تكلفة هذه الخلية الفارغة – $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها.

$$\overline{C_{ij}} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

وبالتالي نتحصل على تكاليف الخلايا الفارغة كما يلي:

$$\overline{C_{11}} = C_{11} - (U_1 + V_1) = 4 - (0 - 3) = +7 > 0$$
$$\overline{C_{12}} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 11 - (0 - 5) = +16 > 0$$
$$\overline{C_{13}} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 0 - (0 + 0) = 0$$
$$\overline{C_{21}} = C_{24} - (U_2 + V_1) = 9 - (1 - 3) = +11 > 0$$
$$\overline{C_{32}} = C_{32} - (U_3 + V_2) = 7 - (8 - 5) = +4 > 0$$
$$\overline{C_{33}} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 2 - (8 - 0) = -6 < 0$$
$$\overline{C_{41}} = C_{41} - (U_4 + V_1) = 0 - (-2 - 3) = +5 > 0$$
$$\overline{C_{42}} = C_{42} - (U_4 + V_2) = 0 - (-2 - 5) = +7 > 0$$
$$\overline{C_{43}} = C_{43} - (U_4 + V_3) = 0 - (-2 + 0) = +2 > 0$$

نُلاحظ أن الخلية (x_{33}) لها أقل تكلفة سالبة $(\bar{C}_{33} = -6)$ وبالتالي فإن المتغير (x_{33}) سوف يدخل إلى مجموعة المتغيرات الأساسية، وباستخدام طريقة المسار المغلق نتحصل على ما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	U_i
$a_1 = 100$	4 /	11 /	0 /	2 100	U_1
$a_2 = 190$	9 /	6 75	1 - 100	3 + 15	U_2
$a_3 = 200$	5 125	7 /	2 + /	10 - 75	U_3
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	U_4
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

بتتبع مسار الخلية الفارغة (x_{33}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل، نُلاحظ أن الخلايا المملوءة ذات الإشارة السالبة هي:

$$x_{23} = 100$$
$$x_{34} = 75$$
$$Min\ (x_{23} = 100\ ;\quad x_{34} = 75) = x_{34} = 75$$

وعليه أعظم كمية (أعظم قيمة لـθ) يُمكن أن نملأ بها الخلية الفارغة (x_{33}) المرشحة للدخول إلى جدول الحل هي الكمية $\theta = 75$

سيتم استنتاج حل الأساس المقبول الجديد انطلاقاً من جدول النقل الجديد الذي سوف يتم الحصول عليه بعد إدخال الخلية الفارغة (x_{33}) إلى جدول الحل بعد ملئها بالكمية $(\theta = 75)$، كما أن ملء هذه الخلية الفارغة بهذه الكمية سوف يُحدث اختلال في توازن أسطر وأعمدة جدول النقل، وللمحافظة على التوازن يجب:

- طرح كمية $(-\theta = -75)$ من الخلية المملوءة (x_{23})؛
- إضافة كمية $(\theta = 75)$ إلى الخلية المملوءة (x_{24})؛
- طرح كمية $(-\theta = -75)$ من الخلية المملوءة (x_{34})؛

كما هو مُوضح في جدول النقل كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	U_i
$a_1 = 100$	4	11	0	2	U_1

	/	/	/	100	
$a_2 = 190$	9 /	6 75	1 $(-\theta = -75)$ 100	3 $(\theta = 75)$ 15	U_2
$a_3 = 200$	5 125	7 /	2 $(\theta = 75)$ /	10 $(-\theta = -75)$ 75	U_3
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	U_4
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

ويُصبح جدول النقل الجديد كما يلي:

B_i / A_i	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 100$	$b_4 = 200$	U_i
$a_1 = 100$	4 /	11 /	0 /	2 100	U_1
$a_2 = 190$	9 /	6 75	1 25	3 90	U_2
$a_3 = 200$	5 125	7 /	2 75	10 /	U_3
$a_4 = 10$	0 /	0 /	0 /	0 10	U_4
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

انطلاقا من جدول الحل الجديد يُمكن استنتاج وقراءة حل الأساس المقبول الجديد كما يلي:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** عددها يساوي: $(m + n - 1) = (4 + 4 - 1) = 7$

$$X_{14} = 100\ ;\ X_{22} = 75;\ X_{23} = 100;\ X_{24} = 90;\ X_{31} = 125;\ X_{33} = 75;\ X_{44} = 10$$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** تمثل باقي متغيرات القرار:

$$X_{11} = 0;\ X_{12} = 0;\ X_{13} = 0; X_{21} = 0;\ X_{32} = 0; X_{34} = 0;\ X_{41} = 0; X_{42} = 0;\ X_{43} = 0$$

- **قيمة دالة الهدف:**

بغرض الحصول على قيمة دالة الهدف يكفي أن نعوض قيم متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل كما يلي:

$$\boldsymbol{Z} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$= (2 * 100) + (6 * 75) + + (1 * 25)(3 * 90) + (5 * 125) + (2 * 75) + (0 * 10) = \boldsymbol{1720\ DA}$$

اختبار أمثلية الحل

نقوم بحساب تكلفة الخلية الممتلئة = $(V_j + U_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها. حيث: $(i = 1, m,)$، $(j = 1, n,)$. حيث تكلفة الخلية الممتلئة تُحسب كما يلي:

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

وتتشكل لنا مجموعة من المعادلات يُمكن حلها كما يلي:

$$C_{14} = U_1 + V_4 = 2$$
$$C_{22} = U_2 + V_2 = 6$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 = 1$$
$$C_{24} = U_2 + V_4 = 3$$

$$C_{31} = \mathcal{U}_3 + V_1 = 5$$
$$C_{33} = \mathcal{U}_3 + V_3 = 2$$
$$C_{44} = \mathcal{U}_4 + V_4 = 0$$

لحل هذه المعادلات نُعطي المتغير $\mathcal{U}_1$ القيمة صفر (0)، وبالتالي نتحل على ما يلي:

$$\mathcal{U}_1 = 0 \implies V_4 = 2$$
$$V_4 = 2 \implies \mathcal{U}_4 = -2$$
$$V_4 = 2 \implies \mathcal{U}_2 = 1$$
$$\mathcal{U}_2 = 1 \implies V_3 = 0$$
$$V_3 = 0 \implies \mathcal{U}_3 = 2$$
$$\mathcal{U}_2 = 1 \implies V_2 = 5$$
$$\mathcal{U}_3 = 2 \implies V_1 = 3$$

بعد حساب القيم المساعدة نلجأ إلى اختبار الخلايا الفارغة كالتالي:

قيمة اختبار تكلفة الخلية الفارغة = تكلفة هذه الخلية الفارغة – $(V_j + \mathcal{U}_i)$ الموجودين في سطرها وعمودها.

$$\overline{C_{ij}} = C_{ij} - (\mathcal{U}_i + V_j)$$

وبالتالي نتحصل على تكاليف الخلايا الفارغة كما يلي:

$$\overline{C_{11}} = C_{11} - (\mathcal{U}_1 + V_1) = 4 - (0 - 3) = +7 > 0$$
$$\overline{C_{12}} = C_{12} - (\mathcal{U}_1 + V_2) = 11 - (0 - 5) = +16 > 0$$
$$\overline{C_{13}} = C_{13} - (\mathcal{U}_1 + V_3) = 0 - (0 + 0) = 0$$
$$\overline{C_{21}} = C_{24} - (\mathcal{U}_2 + V_1) = 9 - (1 - 3) = +11 > 0$$
$$\overline{C_{32}} = C_{32} - (\mathcal{U}_3 + V_2) = 7 - (2 - 5) = +10 > 0$$
$$\overline{C_{34}} = C_{34} - (\mathcal{U}_3 + V_4) = 10 - (2 - 2) = +10 > 0$$
$$\overline{C_{41}} = C_{41} - (\mathcal{U}_4 + V_1) = 0 - (-2 - 3) = +5 > 0$$
$$\overline{C_{42}} = C_{42} - (\mathcal{U}_4 + V_2) = 0 - (-2 - 5) = +7 > 0$$
$$\overline{C_{43}} = C_{43} - (\mathcal{U}_4 + V_3) = 0 - (-2 + 0) = +2 > 0$$

نُلاحظ أن جميع قيم $\overline{C_{ij}}$ موجبة، وبالتالي وصلنا إلى الحل الأمثل.

قائمـــة المراجـع

- إبراهيم محمد مهدي، **مقدمة بحوث العمليات**، الطرق الكمية في الإدارة، مكتبة الجلاء الجديدة بالمنصورة، 2006-2007.
- إبراهيم موسى عبد الفتاح، **مقدمة في بحوث العمليات، نماذج وتطبيقات، المكتبة العلمية**، الزقازيق، كلية التجارة، 2005-2006؛
- أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، الطبعة الثانية، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر، 2009؛
- أحمد حاتم عبد الله، **بحوث العمليات**، منشورات الجامعة الافتراضية السورية، 2018، متاح على الموقع: https://pedia.svuonline.org/؛
- بلجيلالي فتيحة، **رياضيات المؤسسة**، مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس علوم التسيير، جامعة تيارت، ملحقة قصر الشلالة، 2017-2018؛
- بن جلول خالد، **رياضيات المؤسسة**، مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس LMD، علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير، جامعة قالمة؛
- جمال عبد العزيز صابر، **بحوث العمليات في المحاسبة**، كلية التجارة، جامعة القاهرة، القاهرة، 2009؛
- خالد بن موسى الطاسان، **المدخل إلى البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة**، دار جامعة الملك سعود للنشر، 2019؛
- رند عمران مصطفى الأسطل، **بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية**، الطبعة السادسة، كلية إدارة المال والأعمال، جامعة فلسطين، الطبعة السادسة، 2016؛
- ستي حميد، **محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة مدعمة بأمثلة محلولة**، مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير، جامعة ابن خلدون، تيارت، 2016-2017؛
- سليمان صالح الحميدان، عمر بن محمد حامد، حسن بن محي الدين حميدة، **الأسس الرياضية للبرمجة الخطية**، الطبعة الثانية، دار جامعة الملك سعود للنشر، 2017؛
- سليمان محمد مرجان، **بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، دار الكتب الوطنية، بنغازي، 2002؛
- صبحي المحمد، إبراهيم نائب، حسن مشرقي، أنعام باقية، **بحوث العمليات**، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، 2008؛
- عفاف على حسن الدش، **بحوث العمليات واتخاذ القرارات، الأساليب، التطبيق، استخدام الحزم الرياضية**، الجزء الأول، البرمجة وحيدة الهدف، الطبعة الثانية، مكتبة عين الشمس، القهرة، مصر، 2012؛
- محمد الطراونة، سليمان عبيدان، **مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009؛
- محمد دباس الحميد، **البرمجة الخطية**، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، منشورات جامعة حلب، كلية الهندسة المعلوماتية، 2010؛
- محمود علي متولي عجور، **بحوث العمليات والاحصاء**، الطبعة الأولى، دار الفكر الجامعي، الإسكندرية، مصر، 2007؛
- مولاي بوعلام، **محاضرات وتطبيقات في بحوث العمليات**، مطبوعة موجهة لطلبة الليسانس والماستر، جامعة البويرة، 2016-2017؛
- JEAN CLAUDE Moisdon., ***Recherche Opérationnelle, Méthodes d'optimisation en gestion***., édition, MINES ParisTech, Paris, 2010 ;
- MOULAY EL MEHDI Falloul., ***Une introduction à la recherche opérationnelle & au management des projets***., Edilivre, Paris, 2015.